السؤال الأول: (20 درجة)

ليكن لدينا المستقيم $\mathcal{L}:\begin{cases}\mathcal{P}_1: x+y-z=1\\ \mathcal{P}_2: x-y+z=3\end{cases}$ والكرة: $S: x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+\alpha=0$

1- أوجد احداثيات مسقط $A=(1,2,-1)$ على المستقيم $\mathcal{L}$.

2- ناقش حسب قيم الوسيط α وضع المستقيم $\mathcal{L}$ بالنسبة للكرة. أوجد نقطة التماس في حالة التماس.

3- أوجد، في حالة $\alpha=3$ ، على الكرة S النقاط التي يكون فيها المستوي المماس لها موازياً للمستوي $\mathcal{P}_1$.

السؤال الثاني: (17 درجة)

4- احسب قيمة التكامل:

$$I=\iint_D \sqrt{\frac{y}{x}}\, e^{\sqrt{xy}}\, dxdy \quad ; \qquad D:\{xy=1\ ,\ y=x\ ,\ y=2\}$$

5- احسب التكامل السطحي

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)ds\ ,\ \ \Sigma:\left\{y=\sqrt{4-x^2-z^2}\ \ ,\ \ y=0\right\}$$

السؤال الثالث: (20 درجة)

6- احسب جولان الحقل $\vec{F}=[x^2y+2y,-xy^2,2z]$ حول المنحني الناتج من تقاطع المستوي $z=0$ والسطح $z=1-x^2-y^2$.

7- احسب تفرق ودوران الحقل $\vec{F}=(r-1)^2\vec{r}$. وبيّن أنه كموني. أوجد كمونه العددي W. ثم اثبت أن

$$\oiint_{\Sigma}\left[\frac{1}{r}\nabla w-w\nabla\frac{1}{r}\right]\cdot\overrightarrow{ds}=\iiint_{R}(5r-2)\,dv$$

ثم احسب تدفق هذا الحقل عبر السطح المغلق والموجه $x^2+y^2+z^2=1$.

السؤال الرابع: (23 درجة)

8- أوجد حدودية الاستيفاء التربيعية للتابع $f(x)$ المعطى بالنقاط: $(0.9,1.378)$ و $(0.6,1.265)$ و $(0,1)$، ثم استخدم حدودية الاستيفاء لتقريب قيمة $f(0.45)$ والمشتق $f'(0.45)$.

9- استخدم طريقة النقطة الثابتة في ايجاد قيمة تقريبية للحل الموجب للمعادلة $x^2-2+\cos x=0$، بخطأ لا يتجاوز $\varepsilon=0.008$.

10- أوجد، بطريقة أولر، حل المعادلة التفاضلية: $y'=\frac{1+x}{1+y}$، المحقق للشرط $y(1)=2$ ، عند النقطة $x=1.15$، من أجل $h=0.05$، مقرباً لأربعة أرقام عشرية.

14/1/2019

مدرس المقرر

جامعة دمشق - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - شعبة الأسئلة

سلم تصحيح مقرر الرياضيات /3/ الفصل الأول 2018 - 2019 - السنة الثانية طاقة

السؤال الأول: (20 درجة)

1- [redacted] نوجد معادلات المستوي المار بـ A والعمودي على المستقيم $\mathcal{L}$، أي ان ناظم المستوي هو منحى المستقيم المعطى $\vec{d}=\vec{n}$

$$\vec{d}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=[0,-2,-2]=\vec{n}$$

معادلة المستوي: $\vec{x}\cdot\vec{n}=\vec{A}\cdot\vec{n}\ \Rightarrow \mathcal{P}:-2y-2z=-2\ \Rightarrow \mathcal{P}: y+z=1$ 3

نقاطع هذا المستوي مع المستقيم المعطى فتكون نقطة التقاطع A' هي مسقط A على المستقيم $\mathcal{L}$، لذا نحل المعادلات $\{\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{P}\}$ حلاً مشتركاً فنجد للجملة حل وحيد هو: $A'=(2,0,1)$ 4

2- [redacted] نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم $\mathcal{L}$: $\{x=2\ ,y=t-1\ ,z=t\}$ نعوض في معادلة الكرة

$$2t^2-8t+3+\alpha=0\ \Rightarrow\ \Delta=64-8(\alpha+3)=8(5-\alpha)$$ 3

حالة التماس: كي يكون المستقيم مماسا للكرة (التقاطع بنقطة مضاعفة)، أي يجب ان يكون $\Delta=0$ إذا $\alpha=5$.

نعوض قيمة $\alpha=5$ في المعادلة $2t^2-8t+8=0$. نعوض في المعادلات الوسيطية للمستقيم فنجد نقطة التماس $M_0=(2,1,2)$. 2

حالة التقاطع: $\Delta>0 \Leftarrow \alpha>5$ التقاطع بنقطتين . **حالة اللاتقاطع** $\Delta<0 \Leftarrow \alpha<5$. 2

3- [redacted] معادلات المستقيم المار من مركز الكرة $P_0=(1,1,2)$ والمعامد للمستوي $\mathcal{P}_1$ أي الموازي للشعاع $\overrightarrow{n_1}=[1,1,-1]$:

$$x-1=t \text{ و } y-1=t \text{ و } z-2=-t$$ 3

نقاطع المستقيم مع الكرة لنجد نقطتي التماس: $t^2+t^2+t^2=3\Rightarrow\ t^2=1\ \Rightarrow\ t=\pm1$ ومنه $P_1=(2,2,1)\ ,\ P_2=(0,0,3)$. 3

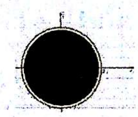
السؤال الثاني: (17 درجة) [redacted]

4- [redacted] المنطقة D محددة و محاطة بمنحن أملس جزئياً والتابع المكامل مستمرة عليها فالتكامل موجود. D بسيطة باتجاه x 2

$$I=\iint_D\sqrt{\frac{y}{x}}e^{\sqrt{xy}}dxdy=\int_1^2\sqrt{y}dy\int_{1/y}^{y}\frac{e^{\sqrt{xy}}}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^2(e^y-e)dy=2e(e-2)$$ 6

ممكن حله بتغيير المتحولات $xy=u^2\ ,\ \frac{y}{x}=v^2$.

5- [redacted] السطح Σ بسيط باتجاه y : $y=\sqrt{4-x^2-z^2}=g(x,z)$.

8 

$$ds=\sqrt{{g'_x}^2+{g'_z}^2+1}\,dxdz=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-z^2}}dxdz$$

حيث: $\Sigma_y: x^2+z^2\le4$. وعليه،

$$I=\iint_{\Sigma_y}[x^2+4-x^2-z^2+z^2]\frac{2}{\sqrt{4-x^2-z^2}}dxdz=\iint_{\Sigma_y}\frac{8}{\sqrt{4-x^2-z^2}}dxdz$$ 6

التكامل شاذ على محيط الدائرة $x^2 + z^2 = 4$. لذلك نكامل على قرص دائري مركزه O ونصف قطره $2 - \varepsilon$. وهي منطقة بسيطة باتجاه ρ منحني الدخول : $\rho = 0$ ومنحني الخروج: $\rho = 2 - \varepsilon$ و $0 \le \varphi \le 2\pi$:

$$I = 8\iint\limits_{\Sigma_y} \frac{dxdz}{\sqrt{4 - x^2 - z^2}} = 8\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2-\varepsilon} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} = 16\pi\sqrt{4-\rho^2}\Big|_0^{2-\varepsilon} = -32\pi < \infty$$

<u>السؤال الثالث: (20 درجة)</u>

-1 [redacted] نوجّه المنحني Γ عكس دوران عقارب الساعة. وهو منحني أملس و $\vec{F} \in cl^1(D)$ حيث D منطقة فضائية تحوي Γ. يعطى الجولان بالعلاقة:

2

$$I = \oint\limits_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

المعادلات الوسيطية للدائرة Γ: $\{x = \cos t \;,\; y = \sin t \;;\; 0 \le t \le 2\pi\}$ ومنه

6

$$I = \left[\int_0^{2\pi} -(\cos^2 t + 2)\sin^2 t - (\sin t\cos t)^2\right] dt = -\left[5\frac{t}{4} - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin 4t}{16}\right]_0^{2\pi} = -\frac{5}{2}\pi$$

-7 [redacted] التفرق

2

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\vec{\nabla}(r-1)^2\right)\cdot\vec{r} + (r-1)^2\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}\right) = [2(r-1)\hat{r}]\cdot\vec{r} + 3\,(r-1)^2 = 5r^2 - 8r + 3$$

الدوران:

2

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{\nabla}\times[(r-1)^2\vec{r}] = [\vec{\nabla}(r-1)^2]\times\vec{r} + (\vec{\nabla}\times\vec{r})(r-1)^2 = \hat{r}\big(2(r-1)\big)\times\vec{r} + \vec{0} = \vec{0}$$

التابع كموني. يوجد له كمون عددي w بحيث يكون $\vec{F} = \vec{\nabla}w$:

2

$$\vec{F} = (r-1)^2 r\hat{r} = \vec{\nabla}w = \hat{r}\frac{dw}{dr} \;\Rightarrow\; r^3 - 2r^2 + r = \frac{dw}{dr} \Rightarrow w = \int (r^3 - 2r^2 + r)dr = \frac{r^4}{4} - \frac{2}{3}r^3 + \frac{r^2}{2} + c$$

التحقق من صحة العلاقة: من مبرهنة غرين نفرض $u = \frac{1}{r}$:

1

$$\oiint\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial(1/r)}{\partial n}\right] ds = \iiint\limits_{R} [u\nabla^2 w - w\nabla^2 u] dv$$

حيث: $\nabla^2 w = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}w) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 5r^2 - 8r + 3$ ، أي أن:

$$\oiint\limits_{\Sigma}(u\vec{\nabla}w - w\vec{\nabla}u)\cdot d\vec{s} = \iiint\limits_{R}\left[\frac{1}{r}(5r^2 - 8r + 3) - w(0)\right] dv = \iiint\limits_{R}\left(5r - 8 + \frac{3}{r}\right) dv$$

التدفق عبر السطح المغلق والموجه $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

5

$$I = \oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\overrightarrow{ds} = \iiint_R \vec{\nabla}\cdot\vec{F} dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^1 (5r^2 - 8r + 3)r^2 dr = 0$$

<u>السؤال الرابع: (23 درجة)</u>

8- [redacted] حدودية لاغرانج: $P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$، حيث

$$L_0(x) = \frac{x-0.6}{-0.6}\cdot\frac{x-0.9}{-0.9} = \frac{x^2-1.5x+0.54}{0.54},\quad L_1(x) = \frac{x}{0.6}\cdot\frac{x-0.9}{-0.3} = \frac{x^2-0.9x}{-0.18}$$

$$L_2(x) = \frac{x}{0.9}\cdot\frac{x-0.6}{0.3} = \frac{x^2-0.6x}{0.27}$$

5 $$f(x) \approx P_2(x) = \frac{x^2-1.5x+0.54}{0.54} + 1.265\frac{x^2-0.9x}{-0.18} + 1.378\frac{x^2-0.6x}{0.27} = -0.072x^2 + 0.485x + 1$$

1 $$f(0.45) \approx P_2(0.45) = 1.191$$

2 $$f'(0.45) \approx [P_2(0.45)]' = 2(-0.072)(0.45) + 0.485 = 0.420$$

1

9- [redacted] $f(x) = x^2 - 2 + \cos x$. واضح ان $f(2) > 0$ ، $f(1) < 1$ فالجذر الفعلي يقع في المجال $[1,2]$. نفرض

3 $$x = g(x) = \sqrt{2-\cos x},\qquad g'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{2-\cos x}},\quad |g'(x)| < 1\,;\ \forall x \in [1,2]$$

العلاقة التكرارية: $x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt{2-\cos x_n}$. نفرض $x_0 = 1.5$:

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt{2-\cos 1.5} = 1.9293,\quad x_2 = g(x_1) = 1.5333,\ x_3 = g(x_2) = 1.4010,\quad x_4 = g(x_3) = 1.3532$$

4 $$x_5 = g(x_4) = 1.3357,\quad x_6 = g(x_5) = 1.3293,\ x_7 = 1.3270$$

$$|x_6 - x_5| = 0.0064,\quad f(1.3293) = 0.006486$$

2

10- [redacted] باستخدام الصيغة التكرارية $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ، حيث: $f(x,y) = \frac{1+x}{1+y}$ و $x_0 = 1$ ، $y_0 = 2$ ،

و $x_1 = 1.05,\ x_2 = 1.1,\ x_3 = 1.15$ نجد ان

5 $$y_1 = y_0 + h\frac{1+x_0}{1+y_0} = 2 + (0.05)\cdot\left(\frac{1+1}{1+2}\right) = 2.0333 \approx y(x_1 = 1.05)$$

$$y_2 = y_1 + h\frac{1+x_1}{1+y_1} = 2.0671 \approx y(x_2 = 1.1),\quad y_3 = 2.1013 \approx y(x_3 = 1.15),\quad y_4 = 2.1360 \approx y(x_4 = 1.2)$$

مدرس المقرر: أ.د. معاذ عبد المجيد