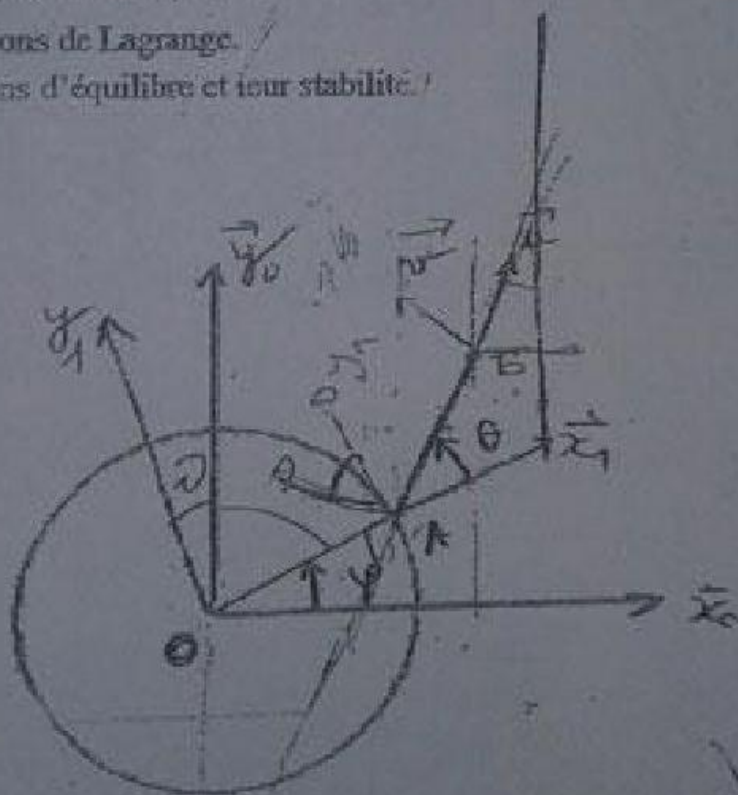


### Examen de Mécanique Analytique

On considère un tige AB de longueur  $2l$  de centre d'inertie G et de masse  $m$  qui décrit un mouvement dans le plan  $Ox_0y_0$  du repère fixe  $\mathcal{R}_0 = (Ox_0 y_0 z_0)$ . On suppose que l'extrémité A de la tige décrit un mouvement circulaire de rayon  $r$  et d'angle  $\phi$  par rapport  $\mathcal{R}_0$  tel que  $\vec{OA} = r \vec{x}_1$ . On suppose que la liaison en A est parfaite et on note le repère  $\mathcal{R}_1 = (Ox_1 y_1 z_0)$  comme étant le repère qui définit la rotation de A. Le repère lié à la tige noté  $\mathcal{R} = (Ax_1 y_1 z_0)$  est en mouvement de rotation d'angle  $\theta$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$ . Le mouvement de la tige par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est donc repéré par les angles  $\phi = (\vec{Ox}_0, \vec{Ox}_1)$  et  $\theta = (\vec{Ax}_1, \vec{AB})$  comme indiqué sur la figure. On pose  $\psi = \phi + \theta$ .

- 1) Déterminer l'énergie cinétique  $T$  de la tige AM par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ .
- 2) Déterminer la fonction de force  $\mathcal{U}$ .
- 3) Dédurre les équations de Lagrange.
- 4) Etudier les positions d'équilibre et leur stabilité.



AB = 2l

EXAM 2013/2014

12

$$\vec{A} = r \vec{x}_1 \quad R_0 \mid \xrightarrow{\dot{\varphi} \vec{z}_0} R_1 (\vec{x}_1, \vec{y}_1) \xrightarrow{\dot{\theta} \vec{z}_0} (\vec{u}, \vec{v})$$

$$r = ct$$

$$T(AB/R_0) = \frac{1}{2} \left[ \vec{x}(AB/R_0) \cdot \vec{x}(AB/R_0) + m v^2 (t/R_0) \right]$$

$$\vec{v}(B/R_0) = \frac{d}{dt} [r \vec{x}_1 + l \vec{x}]_{R_0} = r \dot{\varphi} \vec{y}_1 + l (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{z}_0 \wedge \vec{u}$$

$$= r \dot{\varphi} \vec{y}_1 + l (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{z}_0 \quad \vec{v} = \cos(\theta) \vec{y}_1 - \sin(\theta) \vec{x}_1$$

$$= -l \sin(\theta) (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{x}_1 + (r \dot{\varphi} + l \cos(\theta) (\dot{\theta} + \dot{\varphi})) \vec{y}_1$$

$$v^2 = l^2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + 2rl \dot{\varphi} \cos(\theta) (\dot{\theta} + \dot{\varphi})$$

$$\Pi_G(AB/R_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix} \quad B = \frac{Am}{2l} \int_{-l}^l x^2 dx$$

$$= \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

$$T(AB/R_0) = m \frac{l^2}{6} (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + m r l \dot{\varphi} \cos(\theta) (\dot{\theta} + \dot{\varphi})$$

$$2) P(\vec{P} \rightarrow AB/R_0) = -m g \vec{y}_0 \cdot \vec{v}(B/R_0) =$$

$$-m g \left[ -l \sin(\theta) \sin(\varphi) (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) + \cos(\varphi) r \dot{\varphi} + l \cos(\theta) \cos(\varphi) (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \right]$$

$$= -m g \left[ r \dot{\varphi} \cos(\varphi) + l (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \cos(\theta + \varphi) \right]$$

$$U = -m g \left[ r \sin(\varphi) + l \sin(\theta + \varphi) \right] + cte$$

Ministère de l'Éducation et de la Formation  
 Direction régionale de l'éducation  
 Direction régionale de la formation professionnelle  
 Direction régionale de la formation des adultes  
 Direction régionale de la formation des jeunes  
 Direction régionale de la formation des adultes  
 Direction régionale de la formation des jeunes





$$3) L_0: \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mgl \cos(\theta + \phi) \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -mrl\dot{\phi} \sin(\theta) (\dot{\theta} + \dot{\phi})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} m l^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + mrl\dot{\phi} \cos(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} m l^2 [\ddot{\theta} + \ddot{\phi}] + mrl\ddot{\phi} \cos(\theta) - mrl\dot{\phi} \dot{\theta} \sin(\theta)$$

$$L_\phi: \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = -mgl \cos(\theta + \phi) \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{4}{3} m l^2 (\dot{\theta} + \dot{\phi}) + mrl\dot{\theta} \cos(\theta) + 2mrl\dot{\phi} \cos(\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{4}{3} m l^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) + mrl\ddot{\theta} \cos(\theta) - mrl\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + 2mrl\ddot{\phi} \cos(\theta) - 2mrl\dot{\phi} \dot{\theta} \sin(\theta)$$

$$4) \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \text{ et } \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$$

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2} / \underbrace{-\frac{\pi}{2}} \text{ et } \phi = \frac{\pi}{2} / \underbrace{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\cos(\theta + \phi) = 0$$

$$r \cos(\phi) + l \cos(\theta + \phi) = 0$$

$$\begin{pmatrix} \theta & \phi \\ 0 & \frac{\pi}{2} \\ \pi & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \theta & -\frac{\pi}{2} \\ -\pi & \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{stabilité } \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgl \sin(\theta + \phi) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = mgl \sin(\phi) + mgl \sin(\theta + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \phi} = mgl \sin(\theta + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} < 0 \text{ et } \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \phi} \right)^2 < \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$$

le seul point stable est  $(0, -\frac{\pi}{2})$