

I - Espace fonction d'onde : Notation de Dirac

① produit scalaire

Plus important :  $(\psi, \psi) = 0$  alors  $\psi(\vec{r})$  et  $\psi(\vec{r})$  orthogonale

② Notation de Dirac

Ket  $| \rangle$ , Bra  $\langle |$

③ opérateurs

opérateur position :  $X \psi(x, y, z) = x \psi(x, y, z)$

opérateur impulsion :  $P_x \psi(x, y, z) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (\psi(x, y, z))$

\* représentation

Matriciel, Analytique / dérivée

$$A_{ij} = \langle U_i | A | U_j \rangle$$

opérateur linéaire

\* commutateur (Produit 2 opérateurs)

$$(AB) | \psi \rangle = A (B | \psi \rangle) \text{ en générale } \Rightarrow AB \neq BA$$

$$[A, B] = AB - BA \text{ commutateur}$$

Si  $[A, B] = 0 \Rightarrow A$  et  $B$  commutent sinon  $\neq 0$  non commutent

④ Base orthonormée discrètes

L'ensemble  $\{ | U_i(\vec{r}) \rangle \}$  est orthonormé si :

$$\langle U_i | U_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Quelqu'un de développement : } \langle U_i | \psi \rangle = \sum_j C_j \delta_{ij}$$

⑤ opérateur adjoint

$$A^+ = (A^T)^* ; A \rightarrow A^T \text{ ligne } \Rightarrow \text{colonne}, * \text{ conjuguée } \Rightarrow i = -i$$

$$(AB)^+ = B^+ A^+ , A \text{ de Ket} = \text{Bra}$$

\* conjugué hermitique remplacer : (variable)

$$\lambda \rightarrow \lambda^* , | \psi \rangle \rightarrow \langle \psi | , \langle \psi | \rightarrow | \psi \rangle , A \rightarrow A^+ , B \rightarrow B^+$$

⑥ L'opérateur hermitique

$$[A, A^+] = 0 \text{ et } A = A^+ \text{ avec } A^+ = (A^T)^*$$

⑦ projection

$$\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{P}_\psi^2 \text{ et on a: } \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

II - ~~Equation~~ Equation aux valeurs propres

$|\psi_n\rangle$  Valeur propre si:  $A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$  ou Valeur propre

Exemple  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$  comme opérateur position

autre Méthode:  $\det(A - \lambda I) = 0$   
Valeur propre

① dégénérescence

2 vecteur propres qui donne le même résultat  $a_n, g_n = 2$

② observable

A observable si: A hermitique. 1<sup>er</sup> condition

2<sup>ème</sup> condition: la Valeur propre forme une base

\* Valeur propre + Vecteur propre

Relation de fermeture:  $\sum |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = I_d$

ECOC:

3<sup>théorème</sup>: 1 - observable ECOC: Valeur propre n'est pas dégénérée

2 - ECOC  $\{A, B\}$  si:  $[A, B] = 0$ ,  $\{a_n, b_n\}$  correspon un seul vecteur propre notée  $|\psi_n, \phi_n\rangle$

3 - Un ensemble d'observable est un ECOC:  $[A, B] = [B, C] = [A, C] = 0$

\* La trace de A  $\Rightarrow \text{Tr}(A) = \sum \langle u_i | A | u_i \rangle$

## Chapitre 2

Equation de Valeur propre  $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$

1<sup>er</sup> postulat

L'état d'un système physique à l'instant  $t_0$

$$|\psi(\vec{r}, t_0)\rangle = \sum C_i |u_i\rangle, \text{ Probabilité } P_i = |C_i|^2$$

2<sup>ème</sup> postulat

Liaison entre mécanique classique et mécanique quantique

$$X \rightarrow \hat{X} = \hat{X}^\dagger \text{ (observable)}$$

3<sup>ème</sup> postulat

appareil de Mesure

$$A \rightarrow |\psi\rangle \rightarrow a_n$$



4<sup>ème</sup> postulat : non dégénérée

$$P(a_n) = \langle \Psi | P_n | \Psi \rangle, P_n = |u_n\rangle \langle u_n|$$

$$P(a_n) = |\langle u_n | \Psi \rangle|^2 = |c_n|^2 \quad \text{Probabilité}$$

5<sup>ème</sup> postulat

$$|\Psi'\rangle = \frac{P_n |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | P_n | \Psi \rangle}} = \frac{P_n |\Psi\rangle}{\sqrt{P(a_n)}}$$

avant mesure (non dégénérée)

$$P_n = |u_n\rangle \langle u_n| \Rightarrow |\Psi'\rangle = \frac{|u_n\rangle \langle u_n | \Psi \rangle}{\sqrt{\langle \Psi | P_n | \Psi \rangle}} = \frac{c_n |u_n\rangle}{\sqrt{|c_n|^2}}$$

6<sup>ème</sup> postulat

$$\text{eq Schrödinger : } i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow |\Psi(t)\rangle = |\Psi(t_0)\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(t) dt} \rightarrow \text{à l'état l'instant } t$$

$$\text{La valeur propre moyenne : } \langle A \rangle_\Psi = \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$

$$\text{La position (moyenne) d'une particule : } \langle X \rangle = \langle \Psi | X | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* x \Psi dx$$

$$\text{Ecart quadratique moyen : } \Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

Produit tensoriel

$$E = E_1 \otimes E_2 \quad ; \quad E_1 \text{ l'espace d'état 1, } E_2 \text{ l'espace d'état 2}$$

$$\dim E_1 \times \dim E_2 = \dim E$$

$$\text{Vecteur d'état : } |\Psi_1(1)\rangle \otimes |\Psi_2(2)\rangle \in E$$

Produit tensoriel d'opérateurs :

$$A \otimes B = A \otimes B \in E$$

$$\text{Préimage : } \tilde{A}(1) = A(1) \otimes I_2(2), \quad \tilde{B}(2) = I_1(1) \otimes B(2)$$

Chapitre 3 (oscillateur harmonique)

$$\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$$

③ Les Valeurs propres H

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} X \rightarrow X = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \hat{X}$$

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} P \rightarrow P = \sqrt{m\hbar\omega} \hat{P}$$

H en fonction  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$

$$H = \frac{\hbar \omega}{2} (\hat{x}^2 + \hat{p}^2) \Rightarrow H = \hbar \omega \hat{H}$$

avec:  $\hat{H} = \frac{\hat{x}^2 + \hat{p}^2}{2}$

② relation de commutation

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \Rightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = i$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{p}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{p})$$

$a \neq a^\dagger$ . Pas hermitique

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a^\dagger, a] = -1$$

$$[a^\dagger, a^\dagger] = 0$$

Produit:  $a^\dagger a = \hat{H} - \frac{1}{2}$

Nombre de quanta  $N = a^\dagger a$  N'est hermitique

Equation de Valeur propre de N

$$N |\psi_n\rangle = n |\psi_n\rangle$$

$$\hat{H} = N + \frac{1}{2} \Rightarrow H |\psi_n\rangle = \underbrace{(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega}_{E_n} |\psi_n\rangle$$

Energie possible de Systeme

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

Interpretation des operateurs  $a^\dagger$  et  $a$

$$[N, a] = -a \Rightarrow H(a |\psi_n\rangle) = (E_n - \hbar \omega)(a |\psi_n\rangle)$$

- Baisser l'energie

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger \Rightarrow H(a^\dagger |\psi_n\rangle) = (E_n + \hbar \omega)(a^\dagger |\psi_n\rangle)$$

- Augmenter l'energie

Lemme 8

$$\|a |\psi_n\rangle\|^2 \geq 0 \Rightarrow n \geq 0$$

Si  $n=0$  cas particulier

$$\|a |\psi_n\rangle\|^2 \geq 0 \Rightarrow a |\psi_0\rangle = 0$$

$$a |\psi_n\rangle = \sqrt{n} |\psi_{n-1}\rangle$$

$$a^\dagger |\psi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\psi_{n+1}\rangle$$