Tartalomjegyzék

téséhez és feldolgozásmódjához is sok hasznos észrevételt kaptam. Az ábrák gondos kivitelezéséért *Frigyesi Miklós* főiskolai tanárnak tartozom köszönettel. A Tankönyvkiadó Vállalat és a Nyomda dolgozóinak munkáját is ezúton szeretném megköszönni.

Budapest, 1971. október

Dr. Molnár Emil

I. RÉSZ

1. A magyar középiskolai matematikai tanulóversenyek rövid története

Hazánkban a matematikai tehetségek felkutatásának, a tehetségek kibontakoztatásának már több évtizedes hagyománya van. A Matematikai és Physikai Társulat 1891. november 5-én alakult meg Eötvös Loránd elnökletével, s már 1894-ben olyan intézményt hívott életre, melynek célja az volt, hogy minden év őszén az abban az évben érettségizett tanulók matematikai versenyen megmutathassák tehetségüket. A versenyek két legjobb dolgozatának készítője egy-egy (100, illetve 50 koronás) Eötvös-díjat nyert, és e két dolgozatot a társulat lapjában közzétették.

A később híressé vált matematikusok hosszú sora ezeken a versenyeken aratta első tudományos sikerét. A már elhunytak közül megemlítjük *Zemplén Győző* (1896), *Fejér Lipót* (1897), *Kőnig Dénes* (1902), *Haár Alfréd* (1903), *Kalmár László* (1922), *Szele Tibor* (1936) nevét.

Ezek a versenyek akkoriban az egész világon egyedülállóak voltak. Sikerükben fontos szerepet játszott a verseny feladatainak kitűzésében érvényesülő felfogás: viszonylag csekély matematikai ismeretre épített, inkább a matematikai ötletességet és kifogástalanul szigorú okoskodást, világos és szabatos megfogalmazást követelő feladatok alkalmasak a matematikai tehetség megvizsgálására.

1929-ben *Kürschák József Matematikai Versenytételek* címen kiadta az első 32 verseny anyagát. A szerző, aki nemcsak neves matematikus, hanem lelkes és kiváló tanár is volt, a versenyek iránt érdeklődő tehetséges diákoknak, a velük foglalkozó tanároknak s a matematika iránt érdeklődő olvasóknak ajánlotta könyvét. Közli a feladatokat, a mintaszerű megoldásokat, s mindezekhez tanulságos és érdekes jegyzeteket fűz. A jegyzetek a megoldások kiegészítését, a problémák mélyebb matematikai hátterét tárják az olvasó elé.

Ezután a második világháborúig még 14 Eötvös-verseny zajlott le.

A versenyzők nevelésében fontos — és talán a versenyeknél is fontosabb — eszköz volt a *Középiskolai Matematikai Lapok*, melyet *Arany Dániel*, a győri reáliskola egykori tanára 1894-ben alapított. Talán Franciaországot kivéve — abban az időben — ennek a magyar kezdeményezésnek sem volt külföldi mása. Később egy kitűnő budapesti tanár, *Rátz László* szerkesztette a lapot (1897—1914). A világháború után, 1924 őszén *Faragó Andor* budapesti tanár keltette új életre. 1925-től Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok címen, fizikával bővítve jelent meg 1939-ig, amikor is a fasiszta kormányzat „fajvédő" intézkedései megszüntették. *Dombi Béla* sokszorosított feladatívei, a *Veress Pál* által — *Alexits György*, *Hajós György* és *Kárteszi Ferenc* közreműködésével —

szerkesztett Matematikai és Természettudományi Didaktikai Lapok próbálták pótolni a hiányt.

E folyóiratok elsősorban kitűzött feladataikkal, a feladatra beküldött sikerültebb megoldások és a megoldók nevének közlésével hatásosan segítették az érdeklődő diákok matematikai fejlődését. A viszonylag csekély előismeretet feltételező cikkek növelték és elmélyítették tudásukat.

A felszabadulás után megújult a matematikai élet is. 1947. június 21-én megalakult a Bolyai János Matematikai Társulat, mely átvette elődjének haladó hagyományait. Már ebben az évben felújította a matematikai tanulóversenyt. Ezt 1949-től — az egykori versenyeket annyira szívügyének tartó Kürschák József emlékére — *Kürschák József matematikai tanulóversenynek* nevezik. A régi tanulóversennyel összehasonlítva, újat jelent, hogy alsó korhatár — elvileg — nincs. A versenyeken résztvevők száma is többszörösére emelkedett. A versenybizottság megőrizte a verseny magas színvonalát. A feladatok tervezését, a dolgozatok elbírálását, a Kürschák-díjak odaítélését, a díjnyertes dolgozatok méltatását egyaránt elvégzi.

Hajós György, *Neukomm Gyula* és *Surányi János Matematikai Versenytételek* című munkájuknak I. részében Kürschák József 1929-ben megjelent könyvét dolgozták át, a II. rész 1965. évi kiadása az 1929—63. évi Eötvös Loránd, illetőleg Kürschák József matematikai versenyek anyagát tartalmazza. Ez a munka *Kürschák* koncepcióját fejleszti tovább, és külföldön is élénk érdeklődést ébresztett.

A versenyekre készülésnek most is a *Középiskolai Matematikai Lapok* a legjobb eszköze. A háború után, 1945-ben Szegeden *Soós Paula* jelentetett meg feladatíveket.

1947 novemberében *Soós Paula* és *Surányi János* szerkesztésében megjelent a *Középiskolai Matematikai Lapok új sorozat I. évfolyama.* A szerkesztő bizottság elnöke azóta is *Surányi János.* 1952-ben a közoktatásügyi kormányzat *Neukomm Gyulát* majd — *Neukomm* elhunyta után — *Bakos Tibort* bízta meg a *Középiskolai Matematikai Lapok* szerkesztésével. A lapot azóta a Társulat és a Minisztérium közösen adja ki. Az újjászületett folyóirat ma már diáktömegeket mozgat meg egész éves pontversenyeivel, neves matematikusok cikkeivel.

A matematikai tehetségkutatást segítik a *Szele Tibor* kezdeményezésére (1950) elindított *„középiskolai matematikai diákdélutánok”*, a *Molnár József* által megalakított *Ifjúsági Matematikai Kör* (1954). Ez utóbbi vezetését később *Reiman István* vette át.

Új intézmények, új kezdeményezések egész sora jött létre. Többek között bővült a versenyek köre is. Az Arany Dániel matematikai tanulóversenyek, az országos középiskolai tanulmányi versenyek a diákság szélesebb tömegeit mozgósítják, a nemzetközi matematikai diákolimpiákon a legjobb magyar diákok a szocialista országok és más európai országok legjobbjaival versenyeznek szép sikerrel. Az általános iskolások matematikai versenye, a Televízió

„Ki miben tudós?" versenye, a megyei matematikai vetélkedők mind-mind a matematika népszerűsítésének fontos eszközei.

Az országos középiskolai tanulmányi versenyek és a nemzetközi matematikai diákolimpiák története szorosan kapcsolódik könyvünk témájához, ezekről szólunk a továbbiakban.

2. Országos középiskolai tanulmányi versenyek

A húszas évek elején az akkori tanügyi kormányzat felfigyelt az *Eötvös*-versenyek nagy mozgató erejére, és ezek mintájára 1923-tól a matematikából és más tárgyakból is országos tanulmányi versenyeket rendezett. A felszabadulás után ezek a szélesebb körnek szóló, nagyobb tömegeket mozgató versenyek is megújultak.

1947-ben a Bolyai János Matematikai Társulat szervezésében zajlott le az Első Országos Középiskolás Matematikaverseny, 1948-ban, 1950-ben, majd 1951-ben egyre nagyobb népszerűséggel újabb versenyek voltak. Az utolsó versenyt *Arany Dánielről* nevezték el. Ezek mindegyikén külön versenyeztek a kezdők (V—VI., majd 1950 óta I—II. osztályosok) és a haladók (VII—VIII., majd 1950 óta III—IV. osztályosok).

1952-től a Társulat szervezésében az Arany Dániel matematikai tanulóversenyeken az I. és II. osztályosok külön versengenek. A III—IV. osztályosok versenyének szervezését a Művelődésügyi Minisztérium vette át. 1952—56 között a Rákosi Mátyás matematikai versenyeken, majd 1957 óta napjainkig az országos középiskolai tanulmányi versenyeken egyre növekvő számban mérik össze erejüket a legjobb matematikus diákok. A résztvevők száma az utóbbi években 4000 és 5000 között van.

1951 óta a verseny kétfordulós. A versenyzőknek egy-egy fordulóban általában 5 óra munkaidő áll rendelkezésére. Az első fordulókat — a versenybizottság által kiküldött feladatokkal — az iskolák rendezik. A tanulók dolgozatát először a szaktanárok javítják ki. Az egységes javítást a versenybizottság „hivatalos megoldása" biztosítja. A továbbküldött dolgozatok alapján — egy újabb javítás után — a versenybizottság állítja össze a döntőbe jutott versenyzők névsorát.

Az első fordulóból mintegy 200 diák jut a döntőbe. A döntőket összevontan Budapesten, illetőleg a megyeszékhelyeken rendezik meg. A kiküldött tételeket mindenütt egy időben ismertetik. Tanári felügyelet biztosítja a versenyek tisztaságát, azt, hogy a tanulók ne érintkezzenek egymással. Az utóbbi évek versenyein minden segédeszköz (könyv, feljegyzés stb.) használható. A döntőben általában három díj kerül kiosztásra. 1967 óta a verseny első tíz helyezettjének

a felsőoktatási intézményekben matematikából és fizikából nem kell felvételi vizsgát tennie.

1967-től a speciális tantervű matematikai osztályok számára külön versenyt szerveztek. A matematika—fizika tagozatos osztályok az általános tantervűekkel együtt versenyeztek, esetleg egy feladat volt eltérő.

A hatalmas tömegeket mozgató versenyeket a Művelődésügyi Minisztérium és a Társulat által megbízott versenybizottság irányítja. A versenyek feladatanyaga úgy felduzzadt, hogy 1967-től minden évben új könyvben jelennek meg az azévi versenyek eredményei és a feladatok megoldásai. A II. részben a feladatok szövege után M jelzés utal a speciális tantervű matematikai osztályok tanulói számára kitűzött feladatokra. Az Á jelzésű feladatokat az általános tantervű, az M—F jelzésű feladatokat a matematika—fizika tagozatos osztályok tanulóinak tűzték ki.

Az alábbiakban közöljük az 1947—1970. évi országos középiskolai tanulmányi versenyek (illetve a velük egyszintű versenyek) feladatait — a feladat könyvünkben szereplő sorszámával — és a díjazottak neveit.

1947

Haladók (VII—VIII. osztályosok): **220., 29., 45.**

I. díj: Magyar Ádám Szilveszter (Budapest, Ciszterci Szt. Imre Gimnázium VIII. o.)
Ungár Péter (Budapest, Evangélikus Gimnázium, VII. o.)
II. díj: Izsák Imre (Zalaegerszeg, Gimnázium, VIII. o.)
Kajtár Márton (Pannonhalma, Gimnázium, VIII. o.)
Károlyházy Frigyes (Budapest, Piarista Gimnázium, VII. o.)
III. díj: Gaál Egon (Budapest, Ciszterci Szt. Imre Gimnázium, VIII. o.)
Róna Péter (Budapest, Evangélikus Gimnázium, VI. o.)
Székely-Doby Sándor (Budapest, Szt. László Gimnázium, VIII. o.)

1948

Haladók (VII—VIII. osztályosok): **219., 199., 74.**

I. díj: Fried Ervin (Budapest, Kemény Zsigmond Gimnázium, VII. o.)
Gehér László (Zalaegerszeg, Gimnázium, VII. o.)
Kővári Tamás (Budapest, Evangélikus Gimnázium, VIII. o.)
II. díj: Károlyházy Frigyes (Budapest, Piarista Gimnázium, VIII. o.)
III. díj: Gacsályi Sándor (Debrecen, Tanárképző Intézeti Gyakorló Gimnázium, VII. o.)

1950

Haladók versenye: 84., 56., 128.

I. díj: FODOR LÁSZLÓ (Berettyóújfalu, Arany János Gimnázium, IV. o.)
II. díj: KORÁNYI ÁDÁM (Szeged, Klauzál Gábor Gimnázium, IV. o.)
VILLÁNYI OTTÓ (Szentendre, Gimnázium, II. o.)
III. díj: SZÁNTÓ ISTVÁN (Szeged, Móra Ferenc Gimnázium, IV. o.)
ZERGÉNYI ERZSÉBET (Sopron, Áll. Ált. Leánygimnázium, IV. o.)

1951

Haladók versenye: I. forduló: **5., 106., 97.**, II. forduló: **14., 59., 155.**

I. díj: VILLÁNYI OTTÓ (Szentendre, Gimnázium, III. o.)
II. díj: LÁSZLÓ ZOLTÁN (Debrecen, Fazekas Mihály Gimnázium, IV. o.)
III. díj: KOVÁCH ÁDÁM (Nyíregyháza, Kossuth Lajos Gimnázium, IV. o.)
MÁRENTH ANDRÁS (Budapest, I., Dolgozók Gimnáziuma, IV. o.)

1952

I. forduló: **188., 7., 147.**, II. forduló: **210., 9., 21.**

I. díj: KÁNTOR SÁNDOR (Debrecen, Református Kollégium Gimnáziuma, III. o.)
II. díj: DÖMÖLKI BÁLINT (Budapest, XI., Apáczai Csere János Gimnázium, III. o.)
KERESZTÉLY SÁNDOR (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, III. o.)

1953

I. forduló: **16., 211., 33.**, II. forduló: **6., 130., 69.**

I. díj: KÁNTOR SÁNDOR (Debrecen, Református Kollégium Gimnáziuma, IV. o.)
II. díj: SURÁNYI PÉTER (Budapest VI., Kölcsey Ferenc Gimnázium, IV. o.)
SZILÁRD MIKLÓS (Balassagyarmat, Balassi Bálint Gimnázium, IV. o.)
TOMOR BENEDEK (Győr, Révai Miklós Gimnázium, III. o.)

1954

I. forduló: **52., 208., 190.**, II. forduló: **123., 104., 133.**

I. díj: VIGASSY JÓZSEF (Budapest, I., Petőfi Sándor Gimnázium, IV. o.)
II. díj: BÁRTFAI PÁL (Budapest, I., Petőfi Sándor Gimnázium, III. o.)
TOMOR BENEDEK (Győr, Révai Miklós Gimnázium IV. o.)

1955

I. forduló: **99., 110., 8.**, II. forduló: **71., 17., 182.**

I. díj: BÁRTFAI PÁL (Budapest, I., Petőfi Sándor Gimnázium, IV. o.)
II. díj: SZABADOS JÓZSEF (Budapest, III., Árpád Gimnázium, III. o.)
III. díj: CSISZÁR IMRE (Budapest, I., Petőfi Sándor Gimnázium, III. o.)

1956

I. forduló: **95., 206., 121.**, II. forduló: **112., 22., 61.**

I. díj: STAHL JÁNOS (Budapest, VI., Kölcsey Ferenc Gimnázium, III. o.)
II. díj: MAKKAI MIHÁLY (Budapest, V., Eötvös József Gimnázium, III. o.)
SZATMÁRY ZOLTÁN (Budapest, VIII., Piarista Gimnázium, III. o.)
ZSOMBOK ZOLTÁN (Budapest, IV., Könyves Kálmán Gimnázium, IV. o.)

1957

I. forduló: **51., 108., 213.**, II. forduló: **46., 88., 148.**

I. díj: FRIVALDSZKY SÁNDOR (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.)
ROCKENBAUER ANTAL (Budapest, X., I. László Gimnázium, IV. o.)
II. díj: BÖRÖCZKY KÁROLY (Budapest, XVIII., Steinmetz Miklós Gimnázium, IV. o.)

1958

I. forduló: **96., 85., 131.**, II. forduló: **35., 79., 156.**

I. díj: KATONA GYULA (Budapest, VIII., Kandó Kálmán Híradás- és Műszeripari Technikum, III. o.)
MAGOS ANDRÁS (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, III. o.)
NÉMETH JÓZSEF (Esztergom, Ferences Gimnázium, IV. o.)

1959

I. forduló: **217., 152., 111.**, II. forduló: **73., 184., 142.**

I. díj: MEZEI FERENC (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, III. o.)
II. díj: CSANAK GYÖRGY (Debrecen, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
TARNAY ENDRE (Budapest, Piarista Gimnázium, IV. o.)

1960

I. forduló: **218., 47., 229.**, II. forduló: **64., 166., 109.**

I. díj: MUSZÉLY GYÖRGY (Budapest, Vörösmarty Mihály Gimnázium, IV. o.)
FRITZ JÓZSEF (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium, III. o.)
II. díj: BOLLOBÁS BÉLA (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, III. o.)

1961

I. forduló: **144., 127., 27.**, II. forduló: **80., 186., 136.**

I. díj: BOLLOBÁS BÉLA (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
II. díj: FRITZ JÓZSEF (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium, IV. o.
KÓTA JÓZSEF (Tatabánya, Árpád Gimnázium, III. o.)
SIMONOVITS MIKLÓS (Budapest, Radnóti Miklós Gimnázium, III. o.)
III. díj: KÉRY GERZSON (Sopron, Széchenyi István Gimnázium, III. o.)

1962

I. forduló: **15.**, **90.**, **117.**, II. forduló: **143.**, **89.**, **187.**

I. díj: KÉRY GERZSON (Sopron, Széchenyi István Gimnázium, IV. o.)
II. díj: GÁLFI LÁSZLÓ (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.)
III. díj: GYÁRFÁS ANDRÁS (Budapest, Toldy Ferenc Gimnázium, III. o.)

1963

I. forduló: **107.**, **87.**, **151.**, II. forduló: **34.**, **202.**, **221.**

I—II. díj: MÁTÉ ATTILA (Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium, IV. o.)
SZIDAROVSZKY FERENC (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
III. díj: CORRADI GÁBOR (Győr, Szt. Benedek-rendi Czuczor Gergely Gimnázium, III. o.)

1964

I. forduló: **132.**, **66.**, **165.**, II. forduló: **170.**, **98.**, **158.**

I. díj: GERENCSÉR LÁSZLÓ (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.)
II. díj: MAKAI ENDRE (Budapest, Eötvös József Gimnázium, III. o.)
III. díj: FREUD RÓBERT (Budapest, Bolyai János Gimnázium, III. o.)

1965

I. forduló: **20.**, **10.**, **138.**, II. forduló: **146.**, **167.**, **222.**

I. díj: PELIKÁN JÓZSEF (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
II. díj: LOVÁSZ LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
III. díj: MAKAI ENDRE (Budapest, Eötvös József Gimnázium, IV. o.)

1966

I. forduló: **81.**, **214.**, **164.**, II. forduló: **216.**, **140.**, **91.**

I. díj: LOVÁSZ LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

II. díj: PELIKÁN JÓZSEF (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

III. díj: LABORCZI ZOLTÁN (Budapest, Fővárosi Iskolaszanatórium, III. o.)

1967

Általános és matematika—fizika tagozat

I. forduló: **44.**, **119.**, **122—145.**, II. forduló: **19.**, **209.**, **191.**, **159.**

I. díj: HUNYADVÁRI LÁSZLÓ (Budapest, Könyves Kálmán Gimnázium, IV. o.)

II. díj: KÜLVÁRI ISTVÁN (Budapest, Széchenyi István Gimnázium, IV. o.)

III. díj: SZEREDI PÉTER (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.)

Matematika tagozat

I. forduló: **25.**, **141.**, **192.**, II. forduló: **60.**, **135.**, **198.**

I. díj: BABAI LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium III. o.)

II. díj: SURÁNYI LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

III. díj: ELEKES GYÖRGY (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
HOFFMANN GYÖRGY (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. o.)

1968

Általános és matematika—fizika tagozat

I. forduló: **23., 38—39., 163.**, II. forduló: **175., 100., 129—154.**

I. díj: FIALA TIBOR (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, III. o.)

II. díj: MICHALETZKY GYÖRGY (Budapest, Piarista Gimnázium, III. o.)

III. díj: TAKÁCS LÁSZLÓ (Sopron, Széchenyi István Gimnázium, IV. o.)
RAJCZY PÉTER (Budapest, Eötvös József Gimnázium, IV. o.)

Matematika tagozat

I. forduló: **54., 149., 231.**, II. forduló: **24., 154., 78.**

I. díj: CSIRMAZ LÁSZLÓ (Budapest, I. István Gimnázium, III. o.)

II. díj: BABAI LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

III. díj: VÉTIER ANDRÁS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
BÉKÉSSY PÉTER (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, III. o.)

1969

I. forduló: **2., 114., 53., 70., 189., 150., 101., 169.**

Általános és matematika—fizika tagozat

II. forduló: **212., 65., 83.**

I. díj: FIALA TIBOR (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.)

II. díj: GEGESY FERENC (Budapest, Móricz Zsigmond Gimnázium, IV. o.)

III. díj: LEMPERT LÁSZLÓ (Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium, III. o.)

Matematika tagozat

II. forduló: **207., 65., 67.**

I. díj: CSIRMAZ LÁSZLÓ (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.)

II. díj: PINTZ JÁNOS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

III. díj: PATAKI ISTVÁN (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

1970

I. forduló: **1., 63., 197., 134., 40., 118., 28., 58.**

Általános és matematika—fizika tagozat

II. forduló: **57., 176., 153.**

I. díj: SZENDREI ÁGNES (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, III. o.)

II. díj: FRANKL PÉTER (Kaposvár, Táncsics Mihály Gimnázium, III. o.)
LEMPERT LÁSZLÓ (Budapest, Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

III. díj: LÁZ JÓZSEF (Budapest, Eötvös József Gimnázium, IV. o.)

Matematika tagozat

II. forduló: **230., 232., 82.**

I. díj: BORZSÁK PÉTER (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.)
RUZSA IMRE (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)

II. díj: BAJMÓCZY ERVIN (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
GÖNCZI ISTVÁN (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, IV. o.)

III. díj: KÓCZY LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

3. Nemzetközi matematikai diákolimpiák

A Román Népköztársaság Matematikai és Fizikai Társulata az ország felszabadulásának 15. és a társulat alapításának 10. évfordulója alkalmából 1959 nyarán rendezte meg az első diákolimpiát. Azóta minden év nyarán másmás szocialista ország vállalja a rendezést. A részt vevő országok száma egyre növekedett. A legutóbbi években a szocialista országok e szép versenyébe más európai országok kiküldött diákjai is bekapcsolódtak.

Hazánk szép sikerrel szerepelt az eddigi olimpiákon. A középiskolai matematikai versenyek több évtizedes hagyományai kezdetben bizonyos előnyt is jelentettek számunkra. Azóta a többi országban is átfogó versenyrendszer alakult ki, az olimpiákra történő rendszeres felkészülés nyomán a feladatok színvonala és a versenyzők teljesítményének színvonala is egyre emelkedett.

Az olimpiák szervezésének hagyományai fokozatosan alakultak ki. Eddig minden olimpián két versenynap volt. Egy-egy alkalommal a versenyzők általában napi 4 óra munkaidőt kaptak 3 feladatra. A kitűzésre kerülő feladatokat a részt vevő küldöttségek vezetőiből alakult nemzetközi zsüri válogatta ki az előzetesen írásban beterjesztett és a rendezők által felülvizsgált feladatjavaslatok közül. A küldöttségek vezetői fordították le a feladatokat a tanulók anyanyelvére.

A verseny után a feladatokat általában úgy értékelik, hogy a versenyzők anyanyelven írt dolgozatait először saját vezetőik javítják ki. A vendégküldöttségek dolgozatainak egyöntetű elbírálásáról a vendéglátó ország zsüritől független *koordinátorai* gondoskodnak. A vendéglátó ország tanulóinak dolgozataiban az egyes feladatokat annak a küldöttségnek a vezetője vizsgálja át, amelyik az illető feladatot javasolta. A nemzetközi zsüri feladata a díjak odaítélése. Ők döntik el a feladatokra adható maximális pontszámot, s azt, hogy hány pont elérése szükséges az I., II. és III. díjhoz. Az országok delegációit általában egy vezető, egy pedagógiai vezető és nyolc, az előző tanévben még középiskolába járt diák alkotja.

A versenyen csupán a tanulók egyéni teljesítményeit értékelik és díjazzák. Nem hivatalosan természetesen számon tartják az egyes országok által elért összpontszámot, a kapott díjak számát is. Ez még inkább ösztönzi a versenyző kollektívákat. A feladatok javításának és értékelésének ideje alatt a vendéglátó ország gondoskodik arról, hogy a diákok kellemesen töltsék el az időt. Az országjáró kirándulásokon új ismeretségekkel, új élményekkel gazdagodnak.

Az ünnepélyes eredményhirdetésen általában a rendező ország magas tisztséget betöltő vezető személyisége adja át az I., II., III. díjakat (dicséreteket). Az 1965. évi VII. NMD-n először különdíjat kaptak azok a versenyzők, akik

valamelyik feladatra különösen szép megoldást adtak, vagy a feladathoz különösen értékes megjegyzést, általánosítást fűztek.

Az alábbiakban röviden ismertetjük az eddig megtartott nemzetközi matematikai diákolimpiák feladatait — a feladat könyvünkben szereplő sorszámával —, a magyar küldöttség tagjainak nevét, a díjat nyert magyar versenyzők eredményeit. Zárójelben tüntetjük fel, hogy a zsüri összesen hány tanulót részesített I., II., III. díjban, illetve dicséretben. A részt vevő országok nem hivatalos összesített eredményét betűrendben soroljuk fel, az összpontszám után zárójelben a nyert I., II., III. díjak (illetve dicséretek) száma szerepel. Az adatokat Hódi Endre docens bocsátotta rendelkezésemre, amiért itt is köszönetet mondok.

I. NMD 1959. Brassó; Románia

Feladatok: **68.**, **3.**, **32.**; **201.**, **183.**, **205.** (3—3 óra)

Vezető: Hódi Endre

1. Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, II. o.)
2. Csanak György (Debrecen, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
3. Halász Gábor (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.)
4. Katona Gyula (Budapest, Kandó Kálmán Híradás- és Műszeripari Technikum, IV. o.)
5. Mezei Ferenc (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, III. o.)
6. Muszély György (Budapest, Vörösmarty Mihály Gimnázium, III. o.)
7. Szász Domokos (Budapest, Eötvös József Gimnázium, IV. o.)
8. Tihanyi Ambrus (Budapest, Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, III. o.)

I. díj: (37—40 pont)	Csanak György	(37)	(3 tanuló)
II. díj: (36 pont)	Halász Gábor	(36)	(3 tanuló)
III. díj: (34—35 pont)	Bollobás Béla	(35)	
	Muszély György	(34)	(5 tanuló)

Dicséret (25—33 pont) Szász Domokos (31) (10 tanuló)

Bulgária 132 (0, 0, 0,— 1); Csehszlovákia 192 (1, 0, 0,— 4); Lengyelország 122 (0, 0, 0,— 1); Magyarország 233 (1, 1, 2,— 1); NDK 40 (0, 0, 0,—0); Románia 249 (1, 2, 2,— 1); Szovjetunió 111 (0, 0, 1,— 2) (4 versenyző).

II. NMD 1960. Sinaia; Románia

Feladatok: **92.**, **48.**, **124.** (3 óra); **200.**, **193.**, **178.**, **120.** (4 óra)

Vezető: HÓDI ENDRE, KÉSEDI FERENC

1. BOLLOBÁS BÉLA (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, III. o.)
2. FRITZ JÓZSEF (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium, III. o.)
3. GAGYI PÁLFFY ANDRÁS (Budapest, Széchenyi István Gimnázium, III. o.)
4. GRÜNER GYÖRGY (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium, III. o.)
5. HAHN JÁNOS (Szeged, Gépipari Technikum, IV. o.)
6. KOMLÓS JÁNOS (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
7. MEZEI FERENC (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.)
8. MUSZÉLY GYÖRGY (Budapest, Vörösmarty Mihály Gimnázium, IV. o.)

I. díj. (40—) MEZEI FERENC (43) BOLLOBÁS BÉLA (41) (4 tanuló)
II. díj: (37—40) FRITZ JÓZSEF (38) MUSZÉLY GYÖRGY (37) (4 tanuló)
III. díj: (33—36) (4 tanuló)

Dicséret: (29—32) KOMLÓS JÁNOS (29) (7 tanuló)
Bulgária 175 (0, 0, 1,— 2); Csehszlovákia 257 (1, 1, 2,— 2); Magyarország 248 (2, 2, 0,— 1); NDK 38 (0, 0, 0,— 1) (7 versenyző); Románia 248 (1, 1, 1,— 1).

III. NMD 1961. Veszprém; Magyarország

Feladatok: **26.**, **172.**, **37.**; **168.**, **203.**, **194.** (4—4 óra)

Vezető: HÓDI ENDRE, KÉSEDI FERENC

1. BOLLOBÁS BÉLA (Budapest, Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
2. FRITZ JÓZSEF (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium, IV. o.)
3. GÁLFI LÁSZLÓ (Budapest, I. István Gimnázium, III. o.)
4. GÓTH LÁSZLÓ (Budapest, Könyves Kálmán Gimnázium, III. o.)
5. JUHÁSZ ISTVÁN (Budapest, Madách Imre Gimnázium IV. o.)
6. KÉRY GERZSON (Sopron, Széchenyi István Gimnázium, III. o.)
7. KÓTA JÓZSEF (Tatabánya, Árpád Gimnázium, III. o.)
8. SIMONOVITS MIKLÓS (Budapest, Radnóti Miklós Gimnázium, III. o.)

I. díj: (37—40)	BOLLOBÁS BÉLA	(40)	
	KÓTA JÓZSEF	(37)	(3 tanuló)
II. díj: (34—36)	JUHÁSZ ISTVÁN	(36)	
	KÉRY GERZSON	(34)	
	SIMONOVITS MIKLÓS	(34)	(4 tanuló)
III. díj: (30—33)	GÁLFI LÁSZLÓ	(33)	(3 tanuló)

Dicséret: (20—29) FRITZ JÓZSEF (29)
GÓTH LÁSZLÓ (27) (20 tanuló)

Bulgária 108 (0, 0, 0,— 1); Csehszlovákia 159 (0, 0, 0,— 4); Lengyelország 230 (1, 0, 0,— 6); Magyarország 270 (2, 3, 1,— 2); NDK 146 (0, 0, 1,— 3); Románia 197 (0, 1, 1,— 4).

IV. NMD 1962. Hluboka; Csehszlovákia

Feladatok: **86.**, **49.**, **195.** (4 óra); **36.**, **215.**, **139.**, **160.** (5 óra)

Vezető: HÓDI ENDRE, KÉSEDI FERENC

1. BENCZUR ANDRÁS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
2. GÁLFI LÁSZLÓ (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.)
3. GYÁRFÁS ANDRÁS (Budapest, Toldy Ferenc Gimnázium, III. o.)
4. KÉRY GERZSON (Sopron, Széchenyi István Gimnázium, IV. o.)
5. KÓTA JÓZSEF (Tatabánya, Árpád Gimnázium, IV. o.)
6. SEBESTYÉN ZOLTÁN (Celldömölk, Berzsenyi Dániel Gimnázium, IV. o.)
7. SIMONOVITS MIKLÓS (Budapest, Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
8. SZIDAROVSZKY FERENC (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)

I. díj: (41—46)	KÉRY GERZSON	(45)	
	SEBESTYÉN ZOLTÁN	(41)	(4 tanuló)
II. díj: (34—40)	KÓTA JÓZSEF	(39)	
	GÁLFI LÁSZLÓ	(39)	
	SZIDAROVSZKY FERENC	(38)	(12 tanuló)
III. díj: (29—33)	BENCZUR ANDRÁS	(32)	
	SIMONOVITS MIKLÓS	(32)	(15 tanuló)

Bulgária 196 (0, 1, 2); Csehszlovákia 212 (0, 1, 3); Lengyelország 212 (0, 1, 3); Magyarország 289 (2, 3, 2); NDK 153 (0, 1, 0); Románia 257 (0, 3, 3); Szovjetunió 263 (2, 2, 2).

V. NMD 1963. Wrocław; Lengyelország

Feladatok: **4., 196., 137.; 11., 41., 224.** (4—4 óra)

Vezető: Hódi Endre, Bakos Tibor

1. Corradi Gábor (Győr, Szt. Benedek-rendi Czuczor Gergely Gimnázium, III. o.)
2. Fazekas Patrik (Mosonmagyaróvár, Kossuth Lajos Gimnázium, IV. o.)
3. Gerencsér László (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.)
4. Lovász László (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, I. o.)
5. Makai Endre (Budapest, Eötvös József Gimnázium, II. o.)
6. Máté Attila (Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium, IV. o.)
7. Pelikán József (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, I. o.)
8. Szidarovszky Ferenc (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

I. díj: (35—40)			(7 tanuló)
II. díj: (28—34)	Lovász László	(34)	
	Szidarovszky Ferenc	(33)	
	Pelikán József	(32)	
	Gerencsér László	(32)	
	Fazekas Patrik	(29)	(11 tanuló)
III. díj: (21—27)	Corradi Gábor	(26)	
	Makai Endre	(25)	
	Máté Attila	(23)	(17 tanuló)

Bulgária 145 (0, 0, 3); Csehszlovákia 151 (1, 0, 1); Jugoszlávia 165 (1, 2, 1); Lengyelország 134 (0, 0, 2); Magyarország 234 (0, 5, 3); NDK 140 (0, 0, 3); Románia 191 (1, 1, 3); Szovjetunió 271 (4, 3, 1).

VI. NMD 1964. Moszkva; Szovjetunió

Feladatok: **72., 171., 113.; 223., 226., 162.** (4—4 óra)

Vezető: Hódi Endre, Reiman István

1. Berkes István (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.)
2. Corrádi Gábor (Győr, Szt. Benedek-rendi Czuczor Gergely Gimnázium, IV. o.)
3. Freud Róbert (Budapest, Bolyai János Gimnázium, III. o.)

4. GERENCSÉR LÁSZLÓ (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.)
5. KOMOR TAMÁS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
6. LOVÁSZ LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.)
7. MAKAI ENDRE (Budapest, Eötvös József Gimnázium, III. o.)
8. PELIKÁN JÓZSEF (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.)

I. díj: (37—42)	GERENCSÉR LÁSZLÓ	(41)	
	LOVÁSZ LÁSZLÓ	(39)	
	PELIKÁN JÓZSEF	(39)	(7 tanuló)
II. díj: (31—36)	BERKES ISTVÁN	(35)	(9 tanuló)
III. díj: (27—30)	MAKAI ENDRE	(28)	(19 tanuló)

Bulgária 198 (0, 0, 3); Csehszlovákia 194 (0, 2, 2); Jugoszlávia 155 (0, 1, 1); Lengyelország 209 (1, 1, 3); Magyarország 253 (3, 1, 1); Mongólia 169 (0, 0, 1); NDK 196 (0, 1, 2); Románia 213 (0, 2, 3); Szovjetunió 269 (3, 1, 3).

VII. NMD 1965. Berlin—Bogensee; NDK

Feladatok: **50., 12., 161.; 18., 185., 225.** (4—4 óra)

Vezető: HÓDI ENDRE, REIMAN ISTVÁN

1. BERKES ISTVÁN (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
2. ELEKES GYÖRGY (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.)
3. LACZKOVICH MIKLÓS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
4. LOVÁSZ LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
5. MAKAI ENDRE (Budapest, Eötvös József Gimnázium, IV. o.)
6. PELIKÁN JÓZSEF (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
7. PÓSA LAJOS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
8. SZALAY SÁNDOR (Debrecen, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. c.)

I. díj: (38—40)	LOVÁSZ LÁSZLÓ	(40)	
	MAKAI ENDRE	(38)	
	PELIKÁN JÓZSEF	(38)	(8 tanuló)
II. díj: (30—37)	PÓSA LAJOS	(34)	
	BERKES ISTVÁN	(31)	(12 tanuló)
III. díj: (20—29)	LACZKOVICH MIKLÓS	(28)	
	ELEKES GYÖRGY	(27)	(17 tanuló)

Különdíj: LOVÁSZ LÁSZLÓ, PELIKÁN JÓZSEF (6 tanuló)

Bulgária 93 (0, 0, 1); Csehszlovákia 159 (0, 1, 3); Finnország 62 (0, 0, 0); Jugoszlávia 137 (0, 0, 2); Lengyelország 178 (0, 1, 3); Magyarország 244 (3, 2, 2);

Mongólia 63 (0, 0, 0); NDK 175 (0, 2, 3); Románia 222 (0, 4, 3); Szovjetunió 281 (5, 2, 0).

VIII. NMD 1966. Szófia; Bulgária

Feladatok: **93., 126., 179.; 42., 13., 173.** (4—4 óra)

Vezető: HÓDI ENDRE, REIMAN ISTVÁN

1. BABAI LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.)
2. BERKES ISTVÁN (Budapest, Fazekas Mihály gyakorló Gimnázium, IV. o.)
3. ELEKES GYÖRGY (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
4. LACZKOVICH MIKLÓS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
5. LOVÁSZ LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
6. PELIKÁN JÓZSEF (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
7. PÓSA LAJOS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
8. SURÁNYI LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)

I. díj: (39—40)	LOVÁSZ LÁSZLÓ	(40)	
	PELIKÁN JÓZSEF	(40)	
	PÓSA LAJOS	(40)	(13 tanuló)
II. díj: (34—38)	LACZKOVICH MIKLÓS	(36)	
	BABAI LÁSZLÓ	(34)	(15 tanuló)
III. díj: (30—33)	SURÁNYI LÁSZLÓ	(32)	(11 tanuló)

Különdíj: BABAI LÁSZLÓ, LOVÁSZ LÁSZLÓ, PELIKÁN JÓZSEF (3 tanuló)

Bulgária 238 (0, 1, 3); Csehszlovákia 215 (0, 1, 2); Jugoszlávia 224 (0, 2, 1); Lengyelország 269 (1, 4, 1); Magyarország 281 (3, 2, 1); Mongólia 88 (0, 0, 0); NDK 280 (3, 3, 0); Románia 257 (1, 1, 2); Szovjetunió 293 (5, 1, 1).

IX. NMD 1967. Cetinje; Jugoszlávia

Feladatok: **174., 181., 77.; 204., 103., 105.** (4—4 óra)

Vezető: HÓDI ENDRE, REIMAN ISTVÁN

1. BABAI LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
2. CSIRMAZ LÁSZLÓ (Budapest, I. István Gimnázium, II. o.)

3. ELEKES GYÖRGY (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
4. HOFFMANN GYÖRGY (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
5. LABORCZI ZOLTÁN (Győr, Révai Miklós Gimnázium, IV. o.)
6. PINTZ JÁNOS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.)
7. SURÁNYI LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
8. SZŰCS ANDRÁS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)

I. díj: (38—42)	ELEKES GYÖRGY	(38)	
	SURÁNYI LÁSZLÓ	(38)	(11 tanuló)
II. díj: (30—37)	BABAI LÁSZLÓ	(34)	
	HOFFMANN GYÖRGY	(33)	
	CSIRMAZ LÁSZLÓ	(31)	(14 tanuló)
III. díj: (22—29)	SZŰCS ANDRÁS	(28)	
	PINTZ JÁNOS	(26)	
	LABORCZI ZOLTÁN	(23)	(26 tanuló)

Különdíj: (3 tanuló)

Anglia 231 (1, 2, 4); Bulgária 159 (1, 0, 1); Csehszlovákia 159 (0, 1, 3); Franciaország 41 (0, 0, 0) (5 versenyző, 1 versenynap); Jugoszlávia 136 (0, 0, 3); Lengyelország 101 (0, 0, 1); Magyarország 251 (2, 3, 3); Mongólia 87 (0, 0, 1); NDK 257 (3, 3, 1); Olaszország 110 (0, 1, 1) (6 versenyző); Románia 214 (1, 1, 4); Svédország 135 (0, 0, 2); Szovjetunió 275 (3, 3, 2).

X. NMD 1968. Moszkva; Szovjetunió

Feladatok: **125., 94., 31.; 177., 30., 233.** (4—4 óra)

Vezető: HÓDI ENDRE, REIMAN ISTVÁN

1. BABAI LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
2. CSIRMAZ LÁSZLÓ (Budapest, I. István Gimnázium, III. o.)
3. KÓCZY LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.)
4. LEMPERT LÁSZLÓ (Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium, II. o.)
5. MÉRŐ LÁSZLÓ (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium, IV. o.)
6. MICHALETZKY GYÖRGY (Budapest, Piarista Gimnázium, III. o.)
7. PINTZ JÁNOS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
8. SZŰCS ANDRÁS (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

I. díj: (39—40)	Babai László	(40)	
	Csirmaz László	(40)	
	Pintz János	(40)	(22 tanuló)
II. díj: (33—38)	Lempert László	(38)	
	Szűcs András	(38)	
	Kóczy László	(36)	(22 tanuló)
III. díj: (26—32)	Mérő László	(31)	
	Michaletzky György	(28)	(20 tanuló)

Különdíj: Babai László, Csirmaz László (4 tanuló)

Anglia 263 (3, 2, 2); Bulgária 204 (0, 3, 1); Csehszlovákia 248 (2, 4, 0); Jugoszlávia 173 (0, 0, 3); Lengyelország 262 (2, 3, 2); Magyarország 291 (3, 3, 2); Mongólia 74 (0, 0, 0); NDK 304 (5, 3, 0); Olaszország 132 (0, 0, 1); Románia 208 (1, 1, 2); Svédország 256 (1, 2, 5); Szovjetunió 298 (5, 1, 2).

XI. NMD 1969. Bukarest; Románia

Feladatok: **75.**, **43.**, **157.**; **116.**, **227.**, **62.** (4—4 óra)

Vezető: Hódi Endre, Reiman István

1. Bajmóczy Ervin (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.)
2. Csirmaz László (Budapest, I. István Gimnázium IV. o.)
3. Fiala Tibor (Budapest, II. Rákóczi Ferenc Gimnázium, IV. o.)
4. Lempert László (Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium, III. o.)
5. Michaletzky György (Budapest, Piarista Gimnázium, IV. o.)
6. Pintz János (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
7. Ruzsa Imre (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, II. o.)
8. Soós Miklós (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)

I. díj: (38—40)	Fiala Tibor	(40)	(3 tanuló)
II. díj: (30—37)	Ruzsa Imre	(37)	
	Michaletzky György	(35)	
	Csirmaz László	(34)	
	Bajmóczy Ervin	(31)	(20 tanuló)
III. díj: (24—29)	Pintz János	(25)	
	Lempert László	(24)	(21 tanuló)

Különdíj: BAJMÓCZY ERVIN (12 tanuló)

Anglia 193 (1, 1, 1); Belgium 57 (0, 0, 0); Bulgária 189 (0, 0, 3); Csehszlovákia 170 (0, 0, 3); Franciaország 119 (0, 1, 0); Hollandia 51 (0, 0, 0); Jugoszlávia 181 (0, 2, 2); Lengyelország 119 (0, 1, 0); Magyarország 247 (1, 4, 2); Mongólia 120 (0, 0, 1); NDK 240 (0, 4, 4); Románia 219 (0, 4, 2); Svédország 104 (0, 0 0); Szovjetunió 231 (1, 3, 3).

XII. NMD 1970. Keszthely; Magyarország

Feladatok: **115.**, **55.**, **102.**; **76.**, **180.**, **228.** (4—4 óra)

Vezető: HÓDI ENDRE, REIMAN ISTVÁN

1. BAJMÓCZY ERVIN (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
2. BORZSÁK PÉTER (Budapest, I. István Gimnázium, IV. o.)
3. FÜREDI ZOLTÁN (Budapest, Móricz Zsigmond Gimnázium, II. o.)
4. GÖNCZI ISTVÁN (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, IV. o.)
5. KÓCZY LÁSZLÓ (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
6. LEMPERT LÁSZLÓ (Budapest, ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Gimnázium, IV. o.)
7. RUZSA IMRE (Budapest, Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium, III. o.)
8. SZENDREI ÁGNES (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium, III. o.)

I. díj: (37—40)	RUZSA IMRE	(40)	
	BAJMÓCZY ERVIN	(39)	
	GÖNCZI ISTVÁN	(37)	(7 tanuló)
II. díj: (30—36)	FÜREDI ZOLTÁN	(32)	(11 tanuló)
III. díj: (19—29)	LEMPERT LÁSZLÓ	(25)	
	KÓCZY LÁSZLÓ	(24)	
	BORZSÁK PÉTER	(20)	(40 tanuló)

Különdíj: BAJMÓCZY ERVIN, RUZSA IMRE (2 díj) (6 tanuló)

Anglia 180 (1, 0, 6); Ausztria 104 (0, 0, 1), Bulgária 145 (0, 0, 3); Csehszlovákia 145 (0, 0, 4); Franciaország 141 (0, 1, 4); Hollandia 87 (0, 0, 1); Jugoszlávia 209 (0, 3, 3); Lengyelország 105 (0, 0, 1); Magyarország 233 (3, 1, 3); Mongólia 78 (0, 0, 1); NDK 221 (1, 2, 4); Románia 208 (0, 3, 4); Svédország 110 (0, 0, 2); Szovjetunió 221 (2, 1, 3).

4. A matematikai versenyek pedagógiai és módszertani kérdéseinek szerepe és jelentősége a tanárképzésben

A tudomány és a technika gyorsuló fejlődése egybefonódik a matematikát építő és a matematikát alkalmazó tevékenység fokozódó iramú fejlődésével. A matematika az emberi tevékenység egyre szélesebb területén jut szerephez, s ily módon az általános műveltségnek is egyre jelentékenyebb részévé válik. A számítógépek és az automatizálás rohamos térhódítása egyre több ember bizonyos szintű matematikai képzettségét követeli meg. A matematikai kutatómunka is egyre több alkotó tevékenységre képes szakember együttműködését feltételezi. Nemcsak azért, mert a tudomány fejlődése az alapkutatások területét fokozatosan kiszélesíti és elmélyíti, hanem azért, mert a tudomány és a termelőerők fejlődésének a kapcsolata egyre bensőségesebbé, egymásra hatóbbá válik. A tudományos eredmények felfedezése és alkalmazása közti idő rövidül, a termelés problémái új tudományos problémákká finomulnak, új tudományágak születnek.

Mindezeket elodázhatatlanul tekintetbe kell vegyük a középfokú oktatás, és a tanárképzés továbbfejlesztésében. A tananyag és a tanítási módszerek korszerűsítése és fejlesztése nem maradhat el a tudomány és a termelés gyorsuló fejlődése mögött. Szocialista közoktatásunk ebből a szempontból az első szükséges lépést az 1966-ban bevezetett új középiskolai tantervvel tette meg. A tantervnek megfelelő új tankönyvek s a tankönyvekhez csatlakozó tanári segédkönyvek megkísérelték, hogy kidolgozzák a matematikatanítás hatékonyabb módszereit is. E módszerek kialakításával a szerzők a leghaladóbb hazai hagyományok tudatosítására és általánosítására törekedtek.

Vajon beszélhetünk-e ilyen, sajátosan magyar matematikatanítási hagyományokról? A matematikai érdeklődés felébresztése, az érdeklődő és tehetséges diákok mozgósítása tekintetében igen, hiszen hazai versenyrendszerünk és a Középiskolai Matematikai Lapok mint nyolcadik évtizede létező dokumentumok nemzetközi elismerést vívtak ki. Kevésbé ismert az átlagos képességű tanulókkal való foglalkozásnak az a módszere, amelyet az jellemez, hogy a tanulás-tanítás folyamatában a vezérszerepet a problémalátás, a problémamegoldás játssza. A legjobb és leghaladóbb szellemű magyar matematikatanárok ennek a módszernek voltak a mesterei, művészei. Ilyenek voltak már a századforduló idején Arany Dániel, Rátz László és a későbbi idők folyamán egyre többen.

A problémák fonalán haladó tanítási mód lényege a következő. Minden új tananyagrészt az előzetesen elsajátított ismeretek alapján megfogalmazható, az érdeklődés felébresztésére alkalmas — tehát nem „mondvacsinált", hanem természetes — kérdés, tanulságos kibogozást ígérő probléma tárgyalásával

vezetünk be. A tanulók tudásához és képességéhez mért probléma — különösen akkor, ha kapcsolata a valósággal, az alkalmazásokkal is észrevehető — felébreszti az értelmes tanulásra nevelt tanulók érdeklődését, mozgósítja értelmi erejét. A problémát megoldó tevékenység intenzitása, az eredményes erőfeszítést kísérő sikerélmény maradandó nyomot hagy a tanuló tudatában. A céltudatos, okos beállítódás, a helyes értelmi magatartás fokozatos kibontakozását elősegíti.

Érdekes tény, hogy a problémamegoldásnak a módszertanát, a tanításban és a tanárképzésben betöltött szerepét egy kiváló matematikus pedagógiai témájú közleményei, könyvei tárják fel a legteljesebb és legvonzóbb feldolgozásban. PÓLYA GYÖRGY 1919 óta napjainkig nagy gonddal és szeretettel írt a problémamegoldás módszertanáról. Pedagógiai művei a tanárképzésben is jól hasznosítható problémaanyagot, módszertani elemzéseket és útmutatásokat tárnak elénk. Megkíséreljük, hogy vázoljuk legfontosabb gondolatait [11], [12].

A szó legáltalánosabb értelmében a problémamegoldás a legsajátosabb emberi tevékenység; mondhatnánk, hogy az ember problémamegoldó lény. Egy kitűzött *cél* meghatározott *feltételek* mellett történő *elérésére irányuló tevékenységet* nevezünk problémamegoldásnak.

Hogyha matematikai problémamegoldásról van szó, a cél valamiféle „ismeretlennek" a meghatározása, vagy valamely állítás igaz vagy hamis voltának az eldöntése. A feltételek pedig az ismeretlen meghatározásához szükséges *adatok* és az adatok közt fennálló *kapcsolatok,* illetve az állítás igaz vagy hamis voltának eldöntéséhez szükséges ismeretek, *definíciók, tételek.* „Ahhoz, hogy problémánkat megoldjuk, ki kell találnunk a logikai, matematikai, . . . *műveletek jól megtervezett összefüggő eljárásrendszerét,* amely a hipotézistől halad a konklúzióig, az adatokból az ismeretlenig, attól, ami már birtokunkban van, addig, amit birtokunkba akarunk venni".

Ebből is kitűnik, hogy a problémamegoldás szerves része az általános műveltségnek, a matematikából annak is erre van leginkább szüksége, aki későbbi pályáján csak kevéssé vagy egyáltalán nem használja fel a matematikát. Legalább ennyire fontos, hogy a módszer alkalmas a matematika iránti érdeklődés felkeltésére, s az alkotás örömét nyújtja azoknak, akik vonzódnak a matematikához. A kutató matematikus magasabb szinten hasonló tevékenységet folytat, márpedig a problémamegoldást csak a problémamegoldás gyakorlásával lehet elsajátítani. Tehát a módszer szükséges is a matematikai tehetségek minél szélesebb tömegének felkutatásához és a magas színvonalú szakemberek kiművéléséhez.

A *problémamegoldás egyes fázisait* filozófiai szinten is általánosítható törvényszerűségek jellemzik. Először a szemlélődés, próbálgatás, esetleges kísérleti tevékenység oldaláról közelítjük meg a megoldandó feladatot, próbáljuk megsejteni az eredményt, találgatunk. Ezt követi az áttérés fogalmi szintre.

Definíciók, segédtételek születnek meg, a problémát részekre bontjuk, átfogalmazzuk, megragadjuk a legdöntőbb összefüggéseket. A nyers megoldást egyre finomítjuk, kiküszöböljük az esetleges hiányokat. Újra és újra visszatérünk a „tapasztalati" ellenőrzéshez, végül a megoldást kifogástalan logikai rendbe szedve megfogalmazzuk. Ezt a fogalmi fázist már át- meg átszövi az *asszimilálás* fázisa. Feltárjuk a „belső okokat", az éppen megoldott problémát beépítjük ismereteink rendszerébe, a megoldásnál alkalmazott módszereket gondolkodásunk egészébe illesztjük, hogy ezeket újabb feladatok megoldásánál már felhasználhassuk. A feladatmegoldásnál felmerül az alkalmazások lehetősége, esetleg új problémákat, további általánosításokat fogalmazhatunk meg.

A tanár egyik legfontosabb feladata, s egyben a tanári alkotómunka lényege a tanulók érdeklődésének, ismeretszintjének s az új ismeretek tanításának megfelelő problémák felkutatása és azok didaktikai feldolgozása. A matematika iránt érdeklődő tehetséges diákok felkutatása, ösztönzése ma különösen nagy társadalmi jelentőségű. Feltétlenül szükséges, hogy tanáraink ilyen irányú munkáját még inkább megbecsüljük és segítsük. A jobb diákokkal való foglalkozás a tanítási órán is megvalósítható. A gimnáziumi tankönyvek feladatanyagában bőven találunk összetettebb, nehezebb feladatokat, melyeket a jobb diákoknak külön feladatként adhatunk. A rendszeresebb foglalkozásra lehetőséget nyújt a matematika szakkör. Ennek az oktatási formának hazánkban több évtizedes hagyománya van, egy-egy kiváló tanár munkáját a tanulmányi versenyeken jól szereplő, a felsőoktatási intézményekben továbbtanuló diákok fémjelzik.

A szakköri foglalkozások többféle típusa közül a legelterjedtebb és talán a leghasznosabb a feladatmegoldó szakkör. Helyes, ha a szakkört érdekes, nem túlságosan nehéz, de a tanult anyag elmélyítésére alkalmas feladatokkal kezdjük. Az aktivitás jó módszere a szakköri feladatmegoldó pontverseny, amelyekkel diákjainkat kitartó önképzésre nevelhetjük. Sokat jelent számukra, ha nevük az egész iskola nyilvánossága előtt megjelenik a szakköri faliújságon. Mindjárt a legelején ismertessük meg diákjainkkal a Középiskolai Matematikai Lapokat, mely minden korosztály számára bőven tartalmaz feladatokat, érdekes cikkeket. Serkentsük az országos feladatmegoldó pontversenybe való bekapcsolódást, mert a nagyobb nyilvánosság, az országos versengés, a nyomtatásban viszontlátott apró alkotások felejthetetlen sikerélménye nagy ösztönző erő a további kemény munkához.

A szakköri munkához állandó keretet jelent a felkészülés az országos versenyekre. Könyvünk feladatanyagát a III—IV. osztályosok erre a célra is felhasználhatják. A szakkörön a versenyproblémák megoldásának az előbbiekben is említett tartalmi-formai szempontjait is tudatosíthatjuk.

A versengés persze nem öncél, hanem a kitartó érdeklődés felkeltésének eszköze. Aki a versenyen helytáll, az bizonyára jól felkészült matematikus diák, attól viszont még kiváló matematikus lehet valaki, hogy a versenyeken nem ért

el számottevő eredményt, hiszen a verseny korlátozó feltételei (megszabott idő, zárt környezet, a sikertelenségtől való félelem) a versenyzőkre gátlólag is hathatnak. A pedagógusnak mindig olyan pszichológiai felkészítéssel kell versenyre indítania a tanulóit, hogy az ottani esetleges kudarc ne vegye el kedvüket a további munkától. A sikerrel szereplő tanulókban is tudatosítania kell, hogy tehetségük kibontakoztatását csak folyamatos, céltudatos tanulással érhetik el.

A tananyag mélyebb megismerése során önkéntelenül vetődnek fel azon túlmutató kérdések. Az ilyen irányú érdeklődés kielégítésére a szakkör különösen alkalmas. A könyvünkben található megjegyzések és jegyzetek ehhez is segítséget nyújthatnak. A szélesebb áttekintés különösen sokat jelent azok számára, akik tovább folytatják tanulmányaikat, ezeknek a tanulóknak a kinevelése a szakkör távlati célja.

Az olvasóban önként felvetődhet a kérdés: vajon van-e olyan tanár, aki ezeknek a követelményeknek a napi munka mellett is eleget tud tenni. Továbbá — s számunkra ez a fontosabb kérdés —: a tanárképzés milyen módon járul hozzá ahhoz, hogy minél több, az előbbi igényeket is kielégítő tanár lépjen ki a felsőoktatási intézményekből. Elérhetjük-e, hogy a kiváló tanárok az ország területén viszonylag egyenletesen elosztva működjenek és fejthessék ki áldásos tevékenységüket.

Az világos, hogy a problémamegoldás készségét csak az tudja kialakítani, aki maga is old meg problémákat. Természetesen nem lehet minden tanártól elvárni, hogy magas szinten végezzen kutatómunkát, de egy nem sablonos elemi matematikai feladat megoldása is alkotó szellemi munka. A tanulmányi versenyek feladatainak megoldása a tanár számára sem mindig könnyű, mégis sok örömet okozhat különösen akkor, ha a diákok segítésére a megoldás fázisait is végiggondolja, a rávezetés módszereit is kidolgozza, és ezt például a szakköri megbeszélésen ki is próbálja. A tanári munkában nagyobb teret kell biztosítani az ilyen irányú tevékenységnek. Segíti a tanár ilyen irányú törekvését A Matematika Tanítása c. folyóirat, melyben módszertani közlemények mellett feladatrovat is van. A könyvünkben felsorolt könyvek korántsem teljes jegyzéke is ehhez ad segítséget.

A tanárjelöltek képzésében az „*Elemi matematika*" című tárgy két éven át heti 2 óra keretében, problémamegoldó gyakorlati foglalkozás formájában, kiscsoportos szervezetben szerepel. (Egy-egy csoportban 10—15 fő dolgozik.) E sajátosan tanárképző tárgy célja a problémamegoldás metodikájának elsajátítása, a problématervezéshez és -megoldáshoz szükséges tanári készség kifejlesztése.

A feldolgozásra kerülő problémaanyag érinti a középiskolai tananyag egészét, szép versenyfeladatokat és a középiskolai ismeretek birtokában még megragadható témaköröket is felölel. A hallgatók önálló megoldásainak egybevető elemzése, értékelése kapcsán a módszertani kérdések termékeny megvitatására

is alkalom kínálkozik. Ilyenek: a problématípusok, a „hogyan fogjunk hozzá” kérdései, a lényeges észrevételek megragadása, a döntő megállapítások kiaknázása, az intuitív nyers megoldás fokozatos kifinomítása, a megoldás menetének matematikai formalizálása és szabatos megfogalmazása, az írásbeli kidolgozás követelményei. A többféle megoldás összehasonlító elemzése során a megoldások lényegének kiemelése, didaktikai értékviszonyának megállapítása, a tanítás során való alkalmazás lehetősége ugyancsak megvitatásra kerül.

A problémamegoldó készség fejlesztését a problémalátó és a problémaalkotó készség fejlesztését szolgáló tevékenységek gyakorlása egészíti ki. Pl. matematikai kísérletek, játékok, modellek mélyén rejlő matematikai fogalmak és összefüggések észrevétele és kihámozása; tévedések gyökerének kielemzése, a hiba eliminálása, a téves gondolatmenet felgombolyítása.

Vannak problémák, amelyek új problémákat szülnek. Ilyen új problémák adódnak az általánosításra vagy specializálásra való törekvés útján, az analógiák fonalán, az átfogalmazások kapcsán, az adatok és feltételek variálása folytán. Az egyetemi tananyagból ismert mélyebb tételek és átfogó módszerek speciális esetei, konkretizált változatai is vezethetnek olyan elemi problémákra, amelyek középiskolai ismeretek és korlátolt eszközök birtokában is megközelíthetők, és egymásra épülő problémák sorozatának megoldásával teljesen elintézhetők.

PÓLYA GYÖRGY e sajátosan tanárképző célzatú foglalkozás tartalmi, módszertani és szervezési kialakításában is úttörő munkát végzett. Hatása a hazai tanárképzésben észrevehetően mutatkozik. Ez a könyv a tanárképzés szóban forgó törekvéseit is támogatni szándékszik.

Az országos középiskolai tanulmányi versenyek és a nemzetközi matematikai diákolimpiák feladatanyagának és történeti vonatkozásainak közreadása már önmagában is időszerű volt. A feladatanyag témák szerinti összeállítása és feladatsorozatokra bontása, a tanári munkához kíván segítséget adni, továbbá az önálló megoldási próbálkozásokat ösztönzi. A feladatanyag összeállításánál (II. rész) az egyes fejezeteken belül is *** jellel tagoljuk a szorosabban összetartozó feladatokat, * és ** jelöli a különösen nehéz problémákat. A szakköri feldolgozásban a nagyobb „ugrások” áthidalására itt-ott újabb feladatok beiktatása is szükséges. Az egyes problémák eredetére röviden utalunk, az ott szereplő pontszám az illető versenyen a feladat nehézségének értékelésére szolgált.

A III. részben a megoldások bevezető mondatai, az esetleges ábrák és a dőlt betűs kiemelések motiváló szerepűek (remélhetőleg segítik az olvasót abban a törekvésében, hogy megkísérelje a feladat önálló megoldását), és egyben a megoldás fontosabb lépéseit ragadják meg, a megoldás menetét logikailag is tagolják. Ha az önálló próbálkozások nem vezetnek sikerre, akkor először ezekből merítsünk. Természetesen a terjedelem nem teszi lehetővé a részletes

didaktikai elemzést. Egyes megoldások alapgondolatára is csak utalunk. A megjegyzések a belső összefüggések megvilágítását, esetleges új problémák felvetését tartalmazzák. E problémák egy része közvetlenül a tárgyalt feladathoz kapcsolódik, és az olvasóra bízzuk önálló megoldásukat. Más részük magasabb szintű, esetleg máig megoldatlan.

A könyv utolsó részében szereplő jegyzetek nagy része elsősorban a tanároknak, tanárjelölteknek szól. A feladatok hátterét magasabb szinten világítják meg, sokszor bizonyítások nélkül, de azok részben az egyetemi anyagban szerepelnek, részben nagyon hosszadalmasak. Itt utalunk azokra a témákra, amelyekből specializálással a könyv nem egy feladata létrejött, s melyek alkalmazásával tanárkollégáink is sok középiskolai versenyfeladatot „gyárthatnak".

A jegyzetekben főleg az algebra, a számelmélet és a geometria dominál, de hagyományos okokból ez a versenyfeladatoknál is így van.

A közölt irodalomjegyzékben egyrészt rokon témájú és feldolgozású könyveket, másrészt a matematikát népszerűsítő, a tanári áttekintést segítő műveket sorolunk fel, főleg azokat, amelyekből merítettünk és melyekre könyvünkben hivatkozunk is. (A [ ] zárójelben levő szám az irodalomjegyzék azonos számú munkájára utal.)

Többnyire az utóbbi években megjelent, viszonylag könnyen hozzáférhető magyar nyelvű könyvek közül említünk néhányat a teljesség igénye nélkül.

5. Irodalomjegyzék

[1] *Bakos T.—Lőrincz P.—Tusnádi G.:* Középiskolai matematikai versenyek 1967—1968. (Tankönyvkiadó, 1969—1970.)

[2] *Courant, R.—Robbins, H.:* Mi a matematika? (Gondolat, 1966)

[3] *Dörrie, H.:* A diadalmas matematika (Gondolat, 1965)

[4] *Erdős P.—Surányi J.:* Válogatott fejezetek a számelméletből (Tankönyvkiadó, 1960)

[5] *Fried E.—Láncziné E.—Surányi J.:* Ki miben tudós? (Tankönyvkiadó, 1968)

[6] *Hajós Gy.:* Bevezetés a geometriába (Egyetemi tankönyv, Tankönyvkiadó)

[7] *Hajós Gy.—Neukomm Gy.—Surányi J.:* Matematikai versenytételek I—II. (Tankönyvkiadó, 1965)

[8] *Kárteszi F.:* Szemléletes geometria (Gondolat, 1966)

[9] *Péter R.:* Játék a végtelennel (Tankönyvkiadó, 1969)

[10] *Pogáts F.:* Vektorgeometria (Műszaki Könyvkiadó, 1970)

[11] *Pólya Gy.:* A gondolkodás iskolája (Gondolat, 1971)

[12] *Pólya Gy.:* A problémamegoldás iskolája I—II. (Tankönyvkiadó, 1967—68)
[13] *Reiman I.:* Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon (Tankönyvkiadó, 1967)
[14] *Reiman I.:* Vektorok a geometriában (Tankönyvkiadó, 1971)
[15] *Schopp J.:* Kúpszeletek (Tankönyvkiadó, 1967)
[16] *Sierpiński, W.:* 200 feladat az elemi számelméletből (Tankönyvkiadó, 1968)
[17] *Skljarszkij, D. O.—Csencov, N. N.—Jaglom, I. M.:* Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 1—3. (Tankönyvkiadó 1967—1972—1968)
[18] *Szele T.:* Bevezetés az algebrába (Egyetemi tankönyv, Tankönyvkiadó)
[19] *Takács L.—L. Ziermann M.:* Valószínűségszámítás (Tankönyvkiadó, 1967)
[20] *Tolnai J.:* Érdekes matematikai gyakorló feladatok I—II. (Tankönyvkiadó, 1969)
[21] Elemi matematika I—V. (Egyetemi jegyzetek ELTE, TTK, Tankönyvkiadó)
[22] Matematikai kisenciklopédia (Gondolat, 1968)
[23] Középiskolai Matematikai Lapok **1—42.** (1947—1971), **43—58.** (1972—1979)

Az első kiadás óta megjelent magyar nyelvű könyvek közül az alábbiakra hívjuk fel a figyelmet: Középiskolai matematikai versenyek 1969, 70, 71—72, 73—74, 75—76. (Tankönyvkiadó)

Középiskolai szakköri füzetek:

Lukács O.—Scharnitzky V.: Érdekes matematikai gyakorló feladatok III—IV. (Tankönyvkiadó); *Berkes J.—Pintér L.:* Az *e* szám (Tankönyvkiadó 1971); *Vigassy L.:* Projektív geometria (Tankönyvkiadó); *Gyapjas F.:* Csoportelmélet (Tankönyvkiadó 1974); *Szász G.:* Hálóelmélet (Tankönyvkiadó 1975); *Szederkényi A.:* Topológia (Tankönyvkiadó 1977).

Példatárak:

Fodor J.—Horváth A.—Rábai I.—Székely J.: Matematikai feladatok az egyetemi és főiskolai felvételi vizsgára készülők számára I—II. (Tankönyvkiadó); *Scharnitzky V.:* Egyetemi felvételi feladatok matematikából 1966—69,

70—71, 72—73, 74—76. (Tankönyvkiadó); *Skljarszkij, D. O.—Csencov, N. N.—Jaglom, I. M.:* Válogatott feladatok ... II. 2. Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték-feladatok (Tankönyvkiadó 1973); *Sárközy A.:* Komplex számok. Példatár (Műszaki Könyvkiadó 1973); *Sárközy A.:* Számelmélet. Példatár (Műszaki Könyvkiadó 1976).

Egyetemi tankönyvek:

Pelle B.: Geometria (Tankönyvkiadó 1974); *Szendrei J.:* Algebra és számelmélet (Tankönyvkiadó 1975); *Fried E.:* Klasszikus és lineáris algebra (Tankönyvkiadó 1977).

Tanártovábbképző és ismeretterjesztő művek:

Fried E.: Absztrakt algebra elemi úton (Műszaki Könyvkiadó 1972); *Szász G.:* Az axiomatikus módszer (Tankönyvkiadó 1972); *Andrásfai B.:* Ismerkedés a gráfelmélettel (Tankönyvkiadó); *Ore, O.:* A gráfok és alkalmazásaik (Gondolat 1972); *Vilenkin, N. J.:* Kombinatorika (Műszaki Könyvkiadó 1971); *Papy:* Ismerkedés a topológiával (Műszaki Könyvkiadó 1973); *Hámori M.:* Ismerkedés a komputerrel. Számítástechnika I. (Tankönyvkiadó 1973); *Obádovics Gy.—Szelezsán J.:* Bevezetés a programozásba. Számítástechnika II. (Tankönyvkiadó 1974); *Kovács Gy.:* Számítógépek technikája. Számítástechnika III. (Tankönyvkiadó 1974); *Coxeter, H. S. M.:* A geometriák alapjai (Műszaki Könyvkiadó 1973); *Coxeter, H. S. M.—Greitzer, S. L.:* Az újra felfedezett geometria (Gondolat 1977); Bolyai János: Appendix. A tér tudománya. Szerkesztette *Kárteszi Ferenc.* (Akadémiai Kiadó 1973); *Kárteszi F.:* Lineáris transzformációk (Tankönyvkiadó 1974); *Boltyanszkij, V. G.—Gohberg, I. C.:* Tételek és feladatok a kombinatorikus geometriából (Tankönyvkiadó 1970); *Boltyanszkij, V. G.—Gohberg, I. C.:* Alakzatok felbontása kisebb részekre (Tankönyvkiadó 1976); *Grossman, I.—Magnus, W.:* Csoportok és gráfjaik (Műszaki Könyvkiadó 1972); *Lovász L.—Gács P.:* Algoritmusok (Műszaki Könyvkiadó 1978); *Trachtenbrot, B. A.:* Algoritmusok és absztrakt automaták (Műszaki Könyvkiadó—Mir Könyvkiadó 1978); *Kemény—Snell—Thompson:* A modern matematika alapjai (Műszaki Könyvkiadó 1971); *Sain M.:* Matematikatörténeti ABC (Tankönyvkiadó 1974); Matematikai kislexikon. Főszerkesztő *Farkas Miklós.* (Műszaki Könyvkiadó 1972).

II. RÉSZ

FELADATOK

1. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlet gyöke egész szám:

$$\frac{x-29}{1970}+\frac{x-27}{1972}+\frac{x-25}{1974}+\frac{x-23}{1976}+\frac{x-21}{1978}+\frac{x-19}{1980}=$$

$$=\frac{x-1970}{29}+\frac{x-1972}{27}+\frac{x-1974}{25}+\frac{x-1976}{23}+\frac{x-1978}{21}+\frac{x-1980}{19}.$$

(OTV 1970. I. 1. (6 pont))

2. Fejezzük ki a-val az

$$y=\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}$$

kifejezést, ha

$$x=\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}, \text{ és } 0<a\leqq 2.$$

(OTV 1969. I. 1. (6 pont))

3. Az x változó mely (valós) értékei mellett érvényesek a következő egyenlőségek:

$$\text{a) } \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$$

$$\text{c) } \sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2\ ?$$

(Előjel nélkül a négyzetgyök mindig a nem negatív négyzetgyököt jelenti!)
(I. NMD 1959. Brassó, 2. (8 pont))

4.* Határozzuk meg a

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

egyenlet valamennyi valós gyökét. p valós paramétert jelent.
(V. NMD 1963. Wrocław, 1. (6 pont))

5. Oldjuk meg a

$$\frac{2^{(x+1)^2}}{2^{(x-1)^2}}=4^{x^2}$$

egyenletet.

(OTV 1951. I. 1.)

6. Néhány adat a szovjet ipar termelésének emelkedéséről (az 1940. évihez viszonyítva):

	1940	1950	1951	1952
Termelési eszközök:	100	205	239	267
Fogyasztási cikkek:	100		143	
Együtt:	100	173	202	224

A fogyasztási cikkek 1952. évi termelése hány százaléka volt az 1950. évinek?

(OTV 1953. II. 1.)

7. Egy üzem az első ötéves terv első évében 6%-kal emeli évi termelését, a második évben pedig további 8%-kal. A további három év alatt évente ugyanannyi százalékkal akarják emelni a termelést, úgyhogy a termelésnek a terv egész folyamán elért emelkedése átlagos évi 10%-nak feleljen meg. Hány százalékkal kell emelni évente a termelést?

(OTV 1952. I. 2.)

8. Két munkás, A és B valamely rájuk bízott munkát a következőképpen végezte el: Először csak A dolgozott $\frac{2}{3}$ annyi ideig, mint amennyi idő alatt B egyedül elvégezné az egész munkát. Azután B felváltotta A-t és befejezte a munkát. Ilyen módon a munka 2 órával több időt vett igénybe, mintha együtt fogtak volna hozzá és együttesen végezték volna el. Ha együtt dolgoztak volna az utóbbi módon, akkor A feleannyi munkát végzett volna, mint amennyit ténylegesen B-re hagyott. Hány óra alatt végezné el a munkát A, illetőleg B egyedül?

(OTV 1955. I. 3.)

9. Egy vasútvonalon A helységből személyvonat indul C helységbe. Amikor a vonat B-n átfut, onnan egy tehervonat indul A felé. Amidőn pedig a tehervonat A-ba érkezik, egy gyorsvonat indul A-ból C felé, s ez éppen a C állomáson éri utol a korábban említett személyvonatot. A és B közt félúton egy diák megfigyeli, hogy a személyvonat áthaladása után 15 perc múlva futott át a tehervonat, és újabb 11 perc elteltével a gyorsvonat. A-tól B 10 km-re van. Kérdés,

hány km-re van B-től a C helység? (Feltesszük, hogy a vonatok egyenletes sebességgel haladnak.)
(OTV 1952. II. 2.)

10.* Egy teherautó éjfélkor indult A városból B városba, egy személyautó pedig t_1 órakor B-ből A-ba (ugyanazon az útvonalon). t_2 órakor találkoztak. A személyautó r órával később ért célba, mint a teherautó. Dolguk végeztével visszaindultak, t_3 órakor ismét találkoztak, végül egyszerre érkeztek haza. Hány órakor érkeztek meg? Numerikus adatok: $t_1=2^h\,40^m$, $t_2=4^h$, $r=0^h\,40^m$, $t_3=14^h$.
(OTV 1965. I. 2.)

* * *

11. Határozzuk meg az x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5 ismeretlenek összes olyan értékrendszerét, melyek kielégítik az

$$\begin{array}{ll} (1)\ x_5+x_2=yx_1 & (4)\ x_3+x_5=yx_4 \\ (2)\ x_1+x_3=yx_2 & (5)\ x_4+x_1=yx_5 \\ (3)\ x_2+x_4=yx_3 & \end{array}$$

egyenletrendszert, ahol y paramétert jelöl.
(V. NMD 1963. Wrocław, 4. (6 pont))

12. Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=0\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer együtthatóiról a következőket tudjuk:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} mindegyike pozitív,
b) a többi együttható mind negatív,
c) minden egyes egyenletben az együtthatók összege pozitív. Bizonyítsuk be, hogy az adott egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1=x_2=x_3=0.$$

(VII. NMD 1965. Berlin, 2. (6 pont))

13.* Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rrrrl} & |a_1-a_2|\,x_2 & +|a_1-a_3|\,x_3 & +|a_1-a_4|\,x_4 & =1\\ |a_2-a_1|\,x_1 & & +|a_2-a_3|\,x_3 & +|a_2-a_4|\,x_4 & =1\\ |a_3-a_1|\,x_1 & +|a_3-a_2|\,x_2 & & +|a_3-a_4|\,x_4 & =1\\ |a_4-a_1|\,x_1 & +|a_4-a_2|\,x_2 & +|a_4-a_3|\,x_3 & & =1, \end{array}$$

ahol a_1, a_2, a_3 és a_4 négy különböző adott valós számot jelent.
(VIII. NMD 1966. Szófia, 5. (7 pont))

14. Legyenek m és n adott pozitív számok. Oldjuk meg az

$$x^y = y^x, \quad x^m = y^n$$

egyenletrendszert.

(OTV 1951. II. 1.)

* * *

15. Állapítsuk meg két szám negyedik hatványainak összegét, ha e számok összege 10 és szorzata 4.

(OTV 1962. I. 1.)

16. Megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$x + xy + y + 5 = 0; \qquad x^2y + xy^2 + 6 = 0.$$

(OTV 1953. I. 1.)

17. Határozzuk meg az
$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= 6x^2y^2 - 215\\ xy(x^2+y^2) &= -78\end{aligned}$$
egyenletrendszer valós gyökeit.

(OTV 1955. II. 2.)

18. Állítsuk elő az összes olyan x_1, x_2, x_3, x_4 valós számnégyest, melynek bármely eleméhez hozzáadva a többi három szorzatát, összegül mindig 2-t kapunk.

(VII. NMD 1965. Berlin, 4. (6 pont))

19. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x + y = a; \qquad x^5 + y^5 = 2a^5.$$

(OTV 1967. II. Á--MF 1.)

20. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x^3 + y^3 = a; \qquad xy(x+y) = b.$$

(OTV 1965. I. 1.)

* * *

21. Bizonyítandó, hogy ha $a + b + c = 0$, akkor

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9.$$

(OTV 1952. II. 3.)

22. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$a=bz+cy, \quad b=cx+az, \quad c=ay+bx,$$

akkor

$$\frac{a^2}{1-x^2}=\frac{b^2}{1-y^2}=\frac{c^2}{1-z^2}.$$

(OTV 1956. II. 2.)

* * *

23. Bizonyítsuk be, hogy ha α és β az $x^2+px+1=0$ egyenlet gyökei, továbbá γ és δ az $x^2+qx+1=0$ egyenlet gyökei, akkor

$$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

(OTV 1968. I. 1.)

24. Határozzuk meg a b együtthatót a

$$4x^4-11x^2+9x+b=0$$

egyenletben úgy, hogy legyen az egyenletnek két különböző gyöke, amelyek összege -1.

(OTV 1968. II. M 1.)

25.** Jelentsenek a, b, c komplex számokat. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben

$$a+b+c=ab+bc+ca,$$

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2,$$

akkor

$$a^n+b^n+c^n=a^nb^n+b^nc^n+c^na^n,$$

minden a 3-mal nem osztható n természetes szám esetében.

(OTV 1967. I. M 1.)

* * *

26. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x+y+z=a$$
$$x^2+y^2+z^2=b^2$$
$$xy=z^2,$$

ahol a és b adott számok. Milyen feltételt kell az a és b számnak teljesítenie,

hogy az egyenletrendszer megoldását adó x, y, z számok mind pozitívak és egymástól különbözők legyenek?
(III. NMD 1961. Veszprém, 1. (6 pont))

27.* Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x+y=a(\sqrt{x}-\sqrt{y})$$
$$x^2+y^2=a(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2,$$

ahol a valós szám. a mely értékeire lesznek valósak a gyökök?
(OTV 1961. I. 3.)

28.* Az ax^2 és az ax^2-ax polinomoknak — ahol a egész szám — megvan az a tulajdonságuk, hogy minden egész x-re az x^2 helyen felvett értékük egész többszöröse az x helyen felvett értéküknek. Keressünk további ilyen tulajdonságú, egész együtthatós, másodfokú polinomokat.
(OTV 1970. I. 7. (10 pont))

29.* Van-e az x változónak olyan negyedfokú, 5 tagból álló kifejezése, melynek négyzete is 5 tagú? Határozzuk meg ezeket!
(OTV 1947. 2.)

* * *

30.* Jelentsen f olyan valós függvényt, amely minden valós x-re értelmezett, továbbá a következő tulajdonságú:

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2},$$

ahol a adott pozitív szám.

I. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény periodikus, azaz létezik olyan pozitív b szám, amelyre x minden értéke esetén fennáll:

$$f(x+b)=f(x).$$

II. Adjunk konkrét példát (az azonosan állandótól különböző) ilyen f függvényre, ahol $a=1$.
(X. NMD 1968. Moszkva, 5. (7 pont))

31.* Bizonyítsuk be, hogy az

$$\begin{aligned} &ax_1^2+bx_1+c=x_2, \\ &ax_2^2+bx_2+c=x_3, \\ &\dots\dots\dots \\ &ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n, \\ &ax_n^2\;\;\;+bx_n\;\;\;+c=x_1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek, ahol a, b, c adott valós számok, és $a\neq 0$,

I. $(b-1)^2-4ac<0$ esetén nincs valós megoldása;
II. $(b-1)^2-4ac=0$ esetén egyetlen valós megoldása van;
III. $(b-1)^2-4ac>0$ esetén egynél több valós megoldása van.

(X. NMD 1968. Moszkva, 3. (7 pont))

* * *

32. Valamely x szögre teljesül az

$$a\cos^2 x+b\cos x+c=0$$

egyenlet. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelyet $\cos 2x$ elégít ki. Alkalmazzuk eredményünket az $a=4$, $b=2$, $c=-1$ esetben. (Az eredeti szövegben „Írjuk fel azt a ..." szerepelt.)
(I. NMD 1959. Brassó, 3. (7 pont))

33. Megoldandó a következő egyenlet:

$$\sin x+\cos x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}.$$

(OTV 1953. I. 3.)

34. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1.$$

(OTV 1963. II. 1.)

35. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

(OTV 1958. II. 1.)

36. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1.$$

(IV. NMD 1962. Hluboka, 4. (5 pont))

37.* Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\cos^n x-\sin^n x=1,$$

ahol n tetszőlegesen adott természetes szám.
(III. NMD 1961. Veszprém, 3. (7 pont))

38. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$2 \operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2y=0$$
$$2 \operatorname{tg} y+\operatorname{tg} 2x=0.$$

(OTV 1968. I. Á 2.)

39.** Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\operatorname{tg} x=a \operatorname{tg} 2y$$
$$\operatorname{tg} y=b \operatorname{tg} 2x,$$

ahol a, b valós paraméterek. — Van-e bármely a, b értékpár esetén a triviális $x=y=0$-tól különböző megoldás?
(OTV 1968. I. MF 2.)

* * *

40. Legyen $\cos x+\cos y=a$ és $\sin x+\sin y=b$, ahol $a^2+b^2>0$. Fejezzük ki $\sin(x+y)$-t a-val és b-vel.
(OTV 1970. I. 5. (8 pont))

41. Bizonyítsuk be, hogy

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

(V. NMD 1963. Wrocław, 5. (6 pont))

42. Bizonyítsuk be, hogy bármely n természetes számra és bármely $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k=0, 1, 2, \ldots, n$; λ tetszés szerinti egész szám) valós számra érvényes a következő azonosság:

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x.$$

(VIII. NMD 1966. Szófia, 4. (5 pont))

43.* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jelentsenek valós állandókat, továbbá x jelentsen valós változót, végül legyen

$$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\frac{\cos(a_3+x)}{2^2}+\ldots+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x_1)=f(x_2)=0$, akkor $x_2-x_1=m\pi$, ahol m egész szám.

(XI. NMD 1969. Bukarest, 2. (7 pont))

2. Egyenlőtlenségek és szélsőérték-számítások

44. Az a, b, c valós számokra fennáll az

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$$

egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a=b=c$.

(OTV 1967. I. Á—MF 1.)

45. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív a és b számok számtani és mértani középének különbsége $\frac{(a-b)^2}{8a}$ és $\frac{(a-b)^2}{8b}$ közé esik.

(OTV 1947. 3.)

46. Bizonyítsuk be, hogy tetszés szerinti 1-nél nagyobb a számra

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_a 16}\geqq 1.$$

(OTV 1957. II. 1.)

* * *

47. a, b, c olyan számok, melyekre $4ac-b^2$ nem negatív és a pozitív. Bizonyítandó, hogy

$$a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\leqq\frac{4ac-b^2}{2a}.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

(OTV 1960. I. 2.)

48. Az x változó mely értékeire teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}<2x+9.$$

(II. NMD 1960. Sinaia, 2. (6 pont))

49. Határozzuk meg az összes olyan x valós számot, mely kielégíti a $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>\frac{1}{2}$ egyenlőtlenséget.

(IV. NMD 1962. Hluboka, 2. (6 pont))

50. Keressük meg a $0 \leqq x \leqq 2\pi$ szakaszba eső valamennyi olyan x számot, mely kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

$$2\cos x \leqq \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqq \sqrt{2}.$$

(VII. NMD 1965. Berlin, 1. (4 pont))

* * *

51. Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b$ pozitív szám, akkor

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2} \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

(OTV 1957. I. 1.)

52. Bizonyítandó, hogy ha a és b pozitív számok, akkor

$$(a+b)(a^4+b^4) \geqq (a^2+b^2)(a^3+b^3).$$

(OTV 1954. I. 1.)

53. Bizonyítsuk be, hogy ha az a és b számok egyike sem negatív, akkor $a^3-3ab^2+2b^3$ sem negatív.
(OTV 1969. I. 3. (6 pont))

54. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b 0-tól különböző valós számok, akkor

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4 \geqq 0.$$

(OTV 1968. I. M. 1.)

55.* Jelentsenek a, b és n 1-nél nagyobb természetes számokat; közülük a és b két számrendszer alapszáma. Az $\overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0}$ alakú szám értéke az a alapú számrendszerben A_n, a b alapúban B_n, ahol $x_n \neq 0$ és $x_{n-1} \neq 0$. Az első, x_n számjegy elhagyásával keletkező számok A_{n-1}, illetve B_{n-1}. Bizonyítsuk be, hogy az $a > b$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

(XII. NMD 1970. Keszthely, 2. (7 pont))

* * *

56. Az $ax^2 + bx - c = 0$ egyenletben a, b, c pozitív számok és $a^2 = bc$. Mi az eggyel növelt gyökök szorzatának lehetséges legnagyobb értéke, és ezt az a, b, c milyen értékei mellett veszi fel?

(OTV 1950. 2.)

57. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b pozitív, 1-nél kisebb szám, akkor az

$$x^3 - (1 + a + b)x - 2ab = 0$$

egyenletnek pozitív gyöke csak 1 és 2 között lehet.

(OTV 1970. II. Á—MF 1.)

58.** Három pozitív szám szorzata nagyobb 1-nél, az összegük kisebb a reciprokaik összegénél. Bizonyítsuk be, hogy

a) egyik szám sem lehet 1;

b) a számok közül kettő nagyobb, egy pedig kisebb 1-nél.

(OTV 1970. I. 8. (10 pont))

* * *

59. Szorozzuk meg a téglatest egyes oldallapjainak területét a kerületükkel. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett hat mennyiség összege legalább akkora, mint a test térfogatának 24-szerese.

(OTV 1951. II. 2.)

60.* Bizonyítandó, hogy ha a és b természetes számok, akkor

$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} \geqq \left(\frac{a}{b}\right)^{b}.$$

(OTV 1967. II. M 1.)

61.* Legyenek α, β, γ egy háromszög szögei. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha+\operatorname{ctg}^2 \beta+\operatorname{ctg}^2 \gamma \geqq 1.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

(OTV 1956. II. 3.)

62.** Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1y_1-z_1^2>0$ és $x_2y_2-z_2^2>0$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$(1) \qquad \frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leqq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Állapítsuk meg annak szükséges és elegendő feltételét is, hogy mikor érvényes (1)-ben az egyenlőség jele!

(XI. NMD 1969. Bukarest 6. (8 pont))

* * *

63. Mekkora a^6+b^6 legkisebb és legnagyobb értéke, ha a és b olyan valós számok, amelyekre $a^2+b^2=1$?

(OTV 1970. I. 2. (6 pont))

64. Állapítsuk meg az

$$y=\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$$

függvény minimumát és maximumát!

(OTV 1960. II. 1.)

65.* Legyen n adott természetes szám. Válasszuk meg a k és l nem negatív egészeket úgy, hogy összegük n-től különböző természetes szám legyen, továbbá

$$\frac{k}{k+l}+\frac{n-k}{n-(k+l)}$$

a lehető legnagyobb legyen!

(OTV 1969. II. Á—MF—M 2.)

* * *

66. Mennyi a $K=5x-6y+7z$ kifejezés legkisebb és mennyi a legnagyobb értéke, ha x, y és z olyan nem negatív számok, melyekre fennáll

$$4x+y+2z=4 \quad \text{és} \quad 3x+6y-2z=6?$$

(OTV 1964. I. 2.)

67.** Válasszuk meg az a, b, c valós együtthatókat úgy, hogy az

$$ax^2+bx+c$$

polinom minden -1 és 1 közti x-re -1 és 1 közé eső értéket vegyen fel, és

$$\frac{8}{3}a^2+2b^2$$

(ami egyébként a polinom deriváltja négyzetének a $[-1, 1]$ intervallumon vett határozott integrálja) a lehető legnagyobb legyen.

(OTV 1969. II. M 3.)

3. Aritmetikai és számelméleti feladatok

68. Mutassuk meg, hogy — bármely természetes számot jelentsen is n — a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört sohasem egyszerűsíthető.

(I. NMD 1959. Brassó, 1. (5 pont))

69.* Mi az utolsó 0-tól különböző jegye az első száz természetes szám szorzatának?

(OTV 1953. II. 3.)

70. Bizonyítsuk be, hogy $2^{2n}+15n-1$ osztható 9-cel, bármilyen természetes szám is n.

(OTV 1969. I. 4. (8 pont))

71. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$5^n+2\cdot 3^{n-1}+1 \text{ osztható 8-cal.}$$

(OTV 1955. II. 1.)

72. *a)* Melyek az n összes olyan pozitív egész értékei, melyekre 2^n-1 osztható 7-tel?

b) Bizonyítsuk be, hogy 2^n+1 sohasem osztható 7-tel, bármilyen pozitív egész számot jelentsen is n.

(VI. NMD 1964. Moszkva, 1. (7 pont))

73. k-nak mely pozitív egész értékei mellett lesz az

$$N=3^{6n-1}-k\cdot 2^{3n-2}+1$$

kifejezés n minden pozitív egész értékére osztható 7-tel?
(OTV 1959. II. 1.)

74. Bizonyítsuk be, hogy ha 3^n+1 osztható 2^n-nel, akkor n csak 1 lehet.
(OTV 1948. 3.)

* * *

75. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a természetes szám van, amely a következő tulajdonságú: bármilyen természetes számot jelöljön is n, a

$$z=n^4+a$$

szám sohasem törzsszám.
(XI. NMD 1969. Bukarest, 1. (5 pont))

76.* Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amely a következő tulajdonságú:

Az $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ halmaz úgy bontható fel két, közös elemet nem tartalmazó és nem üres részhalmazra, hogy az egyik részhalmaz elemeinek szorzata egyenlő a másik részhalmaz elemeinek szorzatával.
(XII. NMD 1970. Keszthely, 4. (6 pont))

77.* Legyen k, m és n három pozitív egész szám, $m+k+1$ az $(n+1)$-nél nagyobb törzsszám, továbbá $c_s=s(s+1)$, ahol $s=1, 2, \ldots$. Bizonyítsuk be, hogy a következő szorzat:

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\ldots(c_{m+n}-c_k)$$

osztható az alábbi szorzattal:

$$c_1c_2\ldots c_n.$$

(IX. NMD 1967. Cetinje, 3. (8 pont))

78.* Bizonyítsuk be, hogy bármely 7 egész szám közül kiválasztható 4, amelynek az összege osztható 4-gyel.
(OTV 1968. II. M 3.)

* * *

79. Legyen a és b egész szám. Bizonyítandó, hogy x^2+ax+b csak akkor állíthat elő végtelen sok x értékre négyzetszámot, ha a kifejezés egy első fokú polinom négyzete.
(OTV 1958. II. 2.)

80. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$ax^2+bx+c=0$$

egyenlet valamennyi együtthatója páratlan szám, akkor az egyenlet gyökei nem racionálisak.
(OTV 1961. II. 1.)

81. Egy egész együtthatós másodfokú egyenletben az ismeretlent tartalmazó két tag együtthatóinak összege páros, az ismeretlent nem tartalmazó tag pedig páratlan szám. Bizonyítandó, hogy az egyenletnek racionális gyöke csak olyan tört lehet, melynek legegyszerűbb alakjában a nevező páros szám.
(OTV 1966. I. 1.)

82.* Legyen n olyan természetes szám, amelyik nem köbe racionális számnak. Bizonyítsuk be, hogy

a) egyetlen olyan $x^3+ax^2+bx+c=0$ alakú racionális együtthatós egyenlet van, amelyiknek $x_0=\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}$ gyöke;

b) ennek az egyenletnek nincs más valós gyöke.
(OTV 1970. II. M 3.)

83.* Mutassuk meg, hogy a

$$\sin x+\sin(x\sqrt{2})$$

függvény nem periodikus. — (Periodikusnak mondjuk az f függvényt p periódussal, ha minden x-re $f(x+p)=f(x)$.)
(OTV 1969. II. Á—MF 3.)

* * *

84. Három szomszédos egész szám köbének összege mikor osztható 18-cal?
(OTV 1950. 1.)

98.* Öt egész szám számtani sorozatot alkot. Akár az első négy tag köbeinek összegét vesszük, akár az utolsó négy tag köbeinek összegét, mindkétszer a figyelembe vett tagok összege négyzetének 16-szorosát kapjuk. Határozzuk meg a számokat.

(OTV 1964. II. 2.)

99. Adva van valamely mértani sorozat első tagja, utolsó tagja és tagjainak száma. Mekkora tagjainak szorzata?

(OTV 1955. I. 1.)

100.* Két számtani sorozat első tagja megegyezik. Az első sorozat egyik tagjának a négyzete a másik ugyanannyiadik tagjának a négyzeténél 7-tel nagyobb, a megelőző tagok négyzeteinek a különbsége 343/64, a következő tagok négyzeteinek a különbsége pedig 567/64. Megállapítható-e ezekből az adatokból, hogy a sorozatok hányadik tagjairól van szó? Megállapítható-e a sorozatok valamilyen további adata?

(OTV 1968. II. Á—MF 2.)

* * *

101.* Legyen x_1 pozitív, 1-nél kisebb szám. Ebből kiindulva képezzük az

$$x_{k+1} = x_k - x_k^2 \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

előírással meghatározott sorozatot. Mutassuk meg, hogy n bármekkora,

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1.$$

(OTV 1969. I. 7. (10 pont))

102.* Az $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ valós számokból álló sorozat eleget tesz az

$$(1) \qquad 1 = a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \dots \leqq a_n \leqq \dots$$

egyenlőtlenségláncnak. Ezután a $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

(I.) a $0 \leqq b_n < 2$ egyenlőtlenségpár n minden értékére fennáll;

(II.) bármely adott és a $0 \leqq c < 2$ egyenlőtlenségpárt kielégítő c valós szám esetén létezik olyan, az (1) egyenlőtlenségláncnak eleget tevő $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sorozat, hogy a belőle képezett b_n számok közül végtelen sok nagyobb c-nél.

(XII. NMD 1970. Keszthely, 3. (8 pont))

103.* Tekintsük a következő $\{c_n\}$ sorozatot:

$$c_1=a_1+a_2+\ldots+a_8$$
$$c_2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_8^2$$
$$\vdots$$
$$c_n=a_1^n+a_2^n+\ldots+a_8^n$$
$$\vdots \quad ,$$

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_8$ olyan valós számokat jelentenek, amelyek nem mind egyenlők nullával.

Tudjuk, hogy a $\{c_n\}$ sorozat végtelen sok tagja nullával egyenlő. Állapítsuk meg az összes olyan n számot, melyre $c_n=0$.

(IX. NMD 1967. Cetinje, 5. (7 pont))

* * *

104.* Egy osztály tanulói között diót osztottak szét. Az első tanuló kapott a számú diót és még a megmaradó diók 30-ad részét; a második tanuló $2a$ diót és a még megmaradó diók 30-ad részét; a harmadik tanuló $3a$ diót és a még megmaradó diók 30-ad részét és így tovább. Bizonyítsuk be, hogy ha az első két tanuló egyenlő számú diót kapott, akkor valamennyien ugyanannyi diót kaptak. Mekkora ez esetben az osztály létszáma?

(OTV 1954. II. 2.)

105.** Egy n $(n>1)$ napig tartó sportversenyen összesen m darab érmet osztottak ki. Első nap 1 érem és a megmaradó érmék $\frac{1}{7}$ része került kiosztásra, a másodikon 2 érem és a még fennmaradók $\frac{1}{7}$ része és így tovább. Végül az n-edik, azaz utolsó napon kiosztották a még visszamaradt, pontosan n darab érmet. Hány napig tartott a sportverseny, és hány érmet osztottak ki összesen?

(IX. NMD 1967. Cetinje, 6. (8 pont))

5. Síkgeometriai számítások, bizonyítások

106. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak a hossza 15,3 és 25,2 cm. A hosszabbik párhuzamos oldal végpontjaiból a rövidebbik olyan szög alatt látszik, amelynek tangense 0,75. Számítsuk ki a trapéz területét.

(OTV 1951. I. 2.)

107. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b, egyik szára felezőpontjának a másik szárra való vetülete ennek a szárnak egyik végpontjába esik. Számítsuk ki a trapéz területét!

(OTV 1963. I. 1.)

108. Egy téglalap mindegyik oldalára mint alapra rajzoljunk kifelé olyan téglalapot, amelynek magassága az alap n-ed része. Egyenlő kerületű téglalapokból kiindulva megválasztható-e n értéke úgy, hogy az 5 téglalapból álló idom területe mindig ugyanakkora legyen?

(OTV 1957. I. 2.)

109. Legyen az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD oldalának felezőpontja E és F, az AF és DE metszéspontja G, a BF és CE metszéspontja H. Bizonyítandó hogy az AGD és BHC háromszögek területének összege egyenlő az $EHFG$ négyszög területével.

(OTV 1960. II. 3.)

110. Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket húzunk. Ezek az egyenesek a háromszög területét hat részre osztják. Mekkora az adott háromszög területe, ha adva van a keletkezett 3 háromszög területe: t_1, t_2, t_3?

(OTV 1955. I. 2.)

111. Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög területe egyenlő a köréje írható kör sugarának és a magasságvonalak talppontjai által meghatározott háromszög fél kerületének szorzatával.

(OTV 1959. I. 3.)

* * *

112. A háromszög oldalait belülről érintő körhöz az a, b, c oldalakkal párhuzamosan húzott érintőknek a háromszög belsejében levő szakaszai legyenek rendre a_1, b_1, c_1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=1.$$

(OTV 1956. II. 1.)

113. Jelentse a, b, c az ABC háromszög oldalainak hosszát. Húzzuk meg az ABC háromszögbe írt körnek az oldalakkal párhuzamos érintőit. Ezek az érintők az ABC háromszögből három újabb háromszöget vágnak le; az utób-

biak mindegyikében ismét megrajzoljuk a beírt kört. Számítsuk ki a négy beírt kör területének összegét.

(VI. NMD 1964. Moszkva, 3. (6 pont))

114. Egy háromszög oldalai a, b és c, területe t, továbbá fennáll a következő összefüggés:

$$(a+b+c)\ (a+b-c)=4t.$$

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű.

(OTV 1969.I· 2. (6 pont))

115.* Legyen M az ABC háromszög AB oldalának valamely belső pontja. Jelölje r_1, r_2 és r rendre az AMC, BMC, illetve ABC háromszögbe írható kör sugarát, továbbá ϱ_1 az AMC háromszög AM oldalához, ϱ_2 a BMC háromszög BM oldalához, végül ϱ az ABC háromszög AB oldalához tartozó hozzáírt kör sugarát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll az

$$\frac{r_1}{\varrho_1}\cdot\frac{r_2}{\varrho_2}=\frac{r}{\varrho} \quad \text{egyenlőség.}$$

(XII. NMD 1970. Keszthely, 1. (5 pont))

116.* Az AB szakasz mint átmérő fölé rajzoltuk a k félkört. Legyen C a k-nak A-tól és B-től különböző, tetszőleges pontja, D pedig a C-ből AB-re bocsátott merőleges talppontja. Tekintsük a következő három kört (k_1-et, k_2-t és k_3-at), amelyeknek AB közös érintője, k_1 az ABC háromszögbe írt kör, míg k_2 és k_3 mindegyike érinti a CD szakaszt is, a k félkört is. Bizonyítsuk be, hogy k_1-nek, k_2-nek és k_3-nak van még egy közös érintője!

(XI. NMD 1969. Bukarest, 4. (6 pont))

* * *

117. Jelölje f az a és b félegyenesek alkotta szög felezőjét. Egy az a és f félegyeneseket érintő k_1 kör a-t az A pontban, egy a b és f félegyeneseket érintő k_2 kör b-t a B pontban érinti. Igazoljuk, hogy az AB egyenes a k_1 és k_2 körökből egyenlő húrokat metsz ki.

(OTV 1962. I. 3.)

118. Egy P pontból két körhöz egy-egy érintőt húztunk. Bizonyítsuk be, hogy ha az érintési pontokat összekötő egyenesből a két kör egyenlő hosszú húrokat metsz ki, akkor a P pontból a körök egyenlő szögekben látszanak.

(OTV 1970. I. 6. (8 pont))

119. Az $ABCD$ szimmetrikus trapézban $AB \parallel CD$, az átlók metszéspontja M és $AB > CD = AD$. Tekintsük a CDM és CDA háromszög beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy ennek a két körnek a középpontja egyenlő távolságra van a trapéz köré írható kör középpontjától. Fejezzük ki ezt a távolságot a körülírt kör sugarával és a BAD szöggel.
(OTV 1967. I. Á—MF 2.)

120. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b, magassága m.
a) Szerkesszük meg a trapéz szimmetriatengelyének azt a P pontját, amelyből a szárak derékszög alatt láthatók.
b) Számítsuk ki P távolságát az egyik párhuzamos oldaltól.
c) Mi a P pont létezésének feltétele?
(II. NMD 1960. Sinaia, 7. (5 pont))

* * *

121. Egy 2 méter átmérőjű, kör alakú biliárdasztal O középpontjától $\frac{1}{2}$ méterre fekvő P pontban van egy biliárdgolyó. A golyót úgy kell ellökni, hogy kétszeri visszaverődés után ismét P-n haladjon át. Mekkora szöget zár be ez esetben az ellökés iránya a PO iránnyal?
(OTV 1956. I. 3.)

122. A PTS háromszög P-nél levő szöge 60°. Fejezzük ki annak a körnek a sugarát PT-vel és PS-sel, amely a T pontban érinti a PT egyenest és átmegy az S ponton.
(OTV 1967. I. Á 3.)

123. Egy háromszög egyik szöge $\alpha = 43°$. Határozzuk meg a háromszög szögeit, ha a háromszög t területére fennáll a

$$2t = ab\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta} \quad \text{összefüggés.}$$

(OTV 1954. II. 1.)

124.* Az ABC derékszögű háromszög $BC = a$ átfogóját n számú egyenlő szakaszra osztjuk, ahol n tetszés szerinti páratlan természetes szám. Jelöljük h-val az átfogóhoz tartozó magasságot, továbbá α-val azt a szöget, amely alatt az átfogó felezőpontját tartalmazó szakasz látszik az A csúcsból. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

(II. NMD 1960. Sinaia, 3. (6 pont))

125.* Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan háromszög van, amelyben az oldalak mérőszámai egymást követő természetes számok, azonkívül az egyik szög kétszer akkora, mint ennek a háromszögnek egy másik szöge.
(X. NMD 1968. Moszkva, 1. (6 pont))

126.* Jelölje valamely ABC háromszögben α, β, illetve γ rendre a CAB, ABC, illetve BCA szög mérőszámát, továbbá a, illetve b a BC, illetve CA oldal hosszúságát. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$a+b = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta),$$

akkor az ABC háromszög egyenlő szárú.
(VIII. NMD 1966. Szófia, 2. (7 pont))

* * *

127. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög két szemben fekvő oldalának felezőpontjait összekötő szakasz egyenlő a másik két oldal számtani közepével, akkor a négyszög trapéz.
(OTV 1961. I. 2.)

128. Bizonyítandó, hogy bármely konvex négyszögnek van olyan csúcsa, melyből induló oldalakat paralelogrammává egészítve ki, e paralelogrammát a négyszög tartalmazza.
(OTV 1950. 3.)

129. Az ABC egyenlő oldalú háromszög A csúcsának a BC oldalra vonatkozó tükörképe körül a B csúcson átmenő kört rajzolunk. Igazoljuk, hogy a kör tetszés szerinti P pontját A-val, B-vel és C-vel összekötve, e három szakaszból derékszögű háromszög szerkeszthető.
(OTV 1968. II. Á 3.)

130. Egy 60°-os szög egyik szárán elhelyezkedő A, illetve A_1 pontnak a szög csúcsától való távolsága p, illetve $2q$; a másik száron elhelyezkedő B, illetve B_1 pontnak a csúcstól való távolsága pedig q, illetve $2p$. Az A_1B_1 távolság felezőpontja C. Bizonyítandó, hogy az ABC háromszög szabályos.
(OTV 1953. II. 2.)

131. Rajzoljunk egy háromszög oldalai fölé kifelé négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy a négyzeteknek a háromszögcsúcsoktól különböző csúcsai olyan hatszöget határoznak meg, amelyeknek minden második oldala a háromszög egy-egy súlyvonalának kétszerese.

(OTV 1958. I. 3.)

132. Az ABC háromszög AB és AC oldalai fölé (kifelé) az AC_1C_2B és AB_1B_2C négyzeteket rajzoljuk. Bizonyítandó, hogy a B_2C_2 szakasz felezőpontja a BC átmérőjű körön fekszik.

(OTV 1964. I. 1.)

133. Legyenek valamely hegyesszögű háromszög M magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei rendre M_1, M_2, M_3. Bizonyítsuk be, hogy az $M_1M_2M_3$ háromszög és az adott háromszög oldalainak metszéspontjaiból alkotott konvex hatszög szemközti csúcsait összekötő átlók az M ponton mennek át.

(OTV 1954. II. 3.)

134. Az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD, DA oldalának a kezdőponthoz közelebbi harmadolópontja legyen rendre P, Q, R, S. Bizonyítsuk be, hogy az AC és BD átlók felezőpontját összekötő szakasz háromszor akkora, mint a PR és QS átlók felezőpontját összekötő szakasz.

(OTV 1970. I. 4. (7 pont))

135. Az MAB egyenlő szárú háromszög M csúcsán két egyenes megy át, u és v. Az A pontból u-ra, B-ből v-re bocsátott merőlegesek metszéspontja W. Az A-ból MA-ra bocsátott merőleges messe u-t U-ban, a B-ből MB-re állított merőleges messe v-t V-ben.

Bizonyítandó, hogy UV merőleges MW-re.

(OTV 1967. II. M 2.)

136. Adott a síkban két egységsugarú, egymást érintő kör: k és k_1. Egyik közös külső érintőjük az e egyenes. Ezután rendre megrajzoljuk a $k_2, k_3, \ldots, k_n$ köröket úgy, hogy mindegyik érintse k-t, e-t és az 1-gyel kisebb sorszámú kört. Mekkora a k_n kör sugara?

(OTV 1961. II. 3.)

137.* Tekintsünk egy konvex n-szöget, melynek minden szöge egyenlő, és az egymás után elhelyezkedő $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oldalaira fennáll, hogy

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor szükségképpen $a_1=a_2=\ldots=a_n$.
(V. NMD 1963. Wrocław, 3. (7 pont)).

* * *

138. Egy hegyesszögű háromszög egyik oldala mint átmérő fölé kört rajzolunk, és ehhez a másik két oldallal való metszéspontban érintőt húzunk. Bizonyítandó, hogy a két érintő metszéspontja az első oldalhoz tartozó magasságon van.
(OTV 1965. I. 3.)

139.* Jelentse r egy tetszőleges egyenlő szárú háromszög köré írható kör sugarát, ϱ pedig a bele írható kör sugarát. Bizonyítsuk be, hogy a két kör középpontja

$$d=\sqrt{r(r-2\varrho)}$$

távolságra esik egymástól.
(IV. NMD 1962. Hluboka, 6. (6 pont))

140.** Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrnégyszög átlóinak M metszéspontján átmenő egyenesnek a négyszög belsejébe eső szakaszát M felezi, akkor M felezi a körülírt körnek az említett egyenesre eső húrját is.
(OTV 1966. II. 2.)

141.** Az A és A' pontok a kör egy érintőjén az E érintési pontra tükrös helyzetűek. Az AE szakasz egy B pontjának az E-re vonatkozó tükörképét, B'-t egyetlen egyenes vonalzó felhasználásával a következő módon szerkesztettük meg: B-ből a körhöz egy tetszés szerinti szelőt húztunk, ez a kört P és Q pontokban metszette (közülük P pont volt B-hez közelebb), az AP szelő még egy R pontban metszette a kört. A Q-t A'-vel összekötő egyenesnek a körrel való második metszéspontja az R-től különböző S volt. Végül az RS egyenes metszette ki az érintőből a B' pontot. Igazoljuk a szerkesztés helyességét.
(OTV 1967. I. M 2.)

142.** Egy $ABCA'B'C'$ konvex hatszög csúcsai egy kör AA', BB', CC' átmérőinek végpontjai és P a körnek a hatszög csúcsaitól különböző pontja. Legyenek P-ből az AB, BC, CA', $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ oldalra bocsátott merőlegesek talppontjai rendre Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6. Bizonyítandó, hogy a $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ hatszögnek bármelyik két egymás utáni oldala derékszöget alkot, továbbá hogy a Q_1Q_4, Q_2Q_5, Q_3Q_6 szakaszok felezőpontjai és P egy körön fekszenek.
(OTV 1959. II. 3.)

6. Térgeometriai számítások, bizonyítások

143. A tér S pontjából három nem egy síkba eső félegyenes indul ki: a, b és c. A c és b-vel meghatározott sík merőleges a c és a-val meghatározott síkra. A b és c közti α és az a és c közti β hegyes szöget ismertnek tekintve, számítsuk ki az a és b alkotta γ szöget.

(OTV 1962. II. 1.)

144. Egy léggömb középpontját két földi megfigyelő 45°, illetőleg 22,5° emelkedési szögben látja. Az első megfigyelő délre, a második északnyugatra van a léggömb talppontjától, egymástól való távolságuk 1600 m. Milyen magasan lebeg a léggömb a vízszintes talaj fölött?

(OTV 1961. I. 1.)

145. Egy hegycsúcs magassága az előtte elhaladó egyenes vízszintes útszakasz három egymás után kijelölt pontjából rendre 19,5°, 28,9°, illetőleg 33,7° szög alatt látszik. A második pont 100 m-re, a harmadik 250 m-re van az elsőtől. Milyen magas a hegy (az út szintje fölött), és mekkora a talppontjának az úttól való távolsága?

(OTV 1967. I. MF 3.)

146. A Gellérthegyen egy megfigyelő áll. Szeme abban a síkban van, amelyet az Erzsébet-híd két kapuzatának déli szélei határoznak meg. Az egyik kapuzat déli szélének függőleges élét (az úttesttől a legmagasabb pontig) α szög alatt látja, a másik kapuzatét pedig β szög alatt. Milyen magasan áll a megfigyelő a kapuzatok talppontján átmenő vízszintes sík fölött, ha a két kapuzat távolsága d méter és a figyelembe vett magasság m méter?

($d=290$ m, $m=40$ m, $\alpha=11{,}4°$, $\beta=4{,}7°$)

(OTV 1965. II. 1.)

* * *

147. Egy egyenlő oldalélű négyzetes gúla alapéle 26 cm, a szomszédos oldallapok 120°-os szöget zárnak be egymással. Milyen magas a gúla?

(OTV 1952. I. 3.)

148. Egy sík egy szabályos négyoldalú gúla oldaléleit metszi. Bizonyítsuk be hogy ha a gúla csúcsa S és a metszésidom az $ABCD$ négyszög, akkor

$$\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}=\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}.$$

(OTV 1957. II. 3.)

149. Két szabályos háromoldalú gúla alaplapja közös. Két oldalél közti szög az egyik gúlán 2α, a másikon 2β, és

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\frac{3}{4}.$$

Bizonyítandó, hogy a közös alapháromszög köré írt kör sugara a két gúla magasságának mértani közepe.

(OTV 1968. I. M 2.)

150.* Egy síklapú, hétcsúcsú konvex test egyik lapja a 12 cm oldalú *ABCD* négyzet, egy másik lapja a négyzettel párhuzamos síkban fekvő *EFG* szabályos háromszög. E háromszög *E* csúcsának a merőleges vetülete a négyzet síkján egybeesik *A*-val, az *F* és a *G* vetülete pedig a *BC*, illetve *CD* oldalon van, *C*-től egyenlő távolságra. A testnek van még egy szabályos háromszög lapja. Mekkora az *ABCD* és *EFG* lapok távolsága?

(OTV 1969. I. 6. (11 pont))

151.* Egy téglatest egy csúcsba összefutó három élének hossza a, b, c. Állítsunk merőleges síkot mindegyik csúcson át az oda befutó testátlóra, és tekintsük azt a konvex testet, amelyet az így kapott síkok bezárnak. Mennyi a test felszíne és térfogata?

(OTV 1963. I. 3.)

152.* Forgáshenger alakú edényünk magassága egyenlő alapkörének átmérőjével. Az álló edénybe előbb egy vele egyenlő alapsugarú és magasságú forgáskúpot helyezünk — csúcsával fölfelé —, majd 6 egyenlő sugarú gömböt. A gömbök mindegyike érinti az edény falát, a kúp palástját és 2 másik gömböt. Kiemelkednek-e a gömbök az edényből?

(OTV 1959. I. 2.)

153.** Egy gúla alaplapja az *ABCDE* szabályos ötszög, az ezzel szemközti csúcsa *M*, az oldallapjai szabályos háromszögek. Határozzuk meg az *AM* oldalélnek a *BCM* oldallap síkjával bezárt szögét!

(OTV 1970. II. Á—MF 3.)

* * *

154. Az $ABCD$ négyzet alakú papírlapon három hajtásvonalat hozunk létre. Az elsőt az AC, a másodikat a BD átló mentén, ekkor hátoldalára fordítjuk a lapot, és harmadszor az AB-vel párhuzamos és egyirányú EF középvonal mentén hajtjuk be. A hajtásvonalak mentén természetesen behajló térbeli alakzatot — amelyen új csúcsként jelentkezik az eredeti négyzet O középpontja — úgy tartjuk, hogy az AB és CD élek téglalapot határozzanak meg. Ennek AB-vel párhuzamos és egyirányú középvonala E_1F_1. A téglalap síkja az EO, OF hajtásvonalat rendre az E_2, F_2 pontban metszi. Bizonyítandó, hogy

$$E_1E_2 = E_2O = OF_2 = F_2F_1.$$

(OTV 1968. II. MF 3. M 2.)

155. Melyek azok az n egész számok, amelyekhez található olyan konvex, síklapokkal határolt test, melynek n éle van.

OTV 1951. II 3.)

156.*Alkossunk 6-csúcsú, 5-lapú poliédert a következő feltételekkel:

a) a poliéder egyik lapja a oldalú négyzet;

b) a poliéder összes többi éle egyenlő egymással;

c) a négyzet két szomszédos oldalához csatlakozó két lapnak a négyzetlappal bezárt szöge egymást 90°-ra egészíti ki.

Bizonyítsuk be, hogy a poliéder két lapjának az átlói a hosszúságúak.

(OTV 1958. II. 3.)

157.** Jelentse k az 1, 2, 3, 4, 5 számok bármelyikét. Állapítsuk meg k minden egyes értékére külön-külön annak szükséges és elegendő feltételét, hogy létezzék olyan tetraéder, amelynek k számú éle egyenként a egységnyi, a többi $(6-k)$ számú mindegyike pedig egy egységnyi hosszú, ahol $a>0$.

(XI. NMD 1969. Bukarest, 3. (7 pont))

158.** Melyek azok a konvex poliéderek, amelyeknek bármely négy nem egy síkban levő csúcsa ugyanakkora térfogatú háromoldalú gúlát határoz meg?

(OTV 1964. II. 3.)

* * *

159. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, akkor súlypontja és a köréje írt gömb középpontja egybeesik.

(OTV 1967. II. MF 3.)

154. Az $ABCD$ négyzet alakú papírlapon három hajtásvonalat hozunk létre. Az elsőt az AC, a másodikat a BD átló mentén, ekkor hátoldalára fordítjuk a lapot, és harmadszor az AB-vel párhuzamos és egyirányú EF középvonal mentén hajtjuk be. A hajtásvonalak mentén természetesen behajló térbeli alakzatot — amelyen új csúcsként jelentkezik az eredeti négyzet O középpontja — úgy tartjuk, hogy az AB és CD élek téglalapot határozzanak meg. Ennek AB-vel párhuzamos és egyirányú középvonala E_1F_1. A téglalap síkja az EO, OF hajtásvonalat rendre az E_2, F_2 pontban metszi. Bizonyítandó, hogy

$$E_1E_2 = E_2O = OF_2 = F_2F_1.$$

(OTV 1968. II. MF 3. M 2.)

155. Melyek azok az n egész számok, amelyekhez található olyan konvex, síklapokkal határolt test, melynek n éle van.

OTV 1951. II 3.)

156.*Alkossunk 6-csúcsú, 5-lapú poliédert a következő feltételekkel:

a) a poliéder egyik lapja a oldalú négyzet;

b) a poliéder összes többi éle egyenlő egymással;

c) a négyzet két szomszédos oldalához csatlakozó két lapnak a négyzetlappal bezárt szöge egymást 90°-ra egészíti ki.

Bizonyítsuk be, hogy a poliéder két lapjának az átlói a hosszúságúak.

(OTV 1958. II. 3.)

157.** Jelentse k az 1, 2, 3, 4, 5 számok bármelyikét. Állapítsuk meg k minden egyes értékére külön-külön annak szükséges és elegendő feltételét, hogy létezzék olyan tetraéder, amelynek k számú éle egyenként a egységnyi, a többi $(6-k)$ számú mindegyike pedig egy egységnyi hosszú, ahol $a>0$.

(XI. NMD 1969. Bukarest, 3. (7 pont))

158.** Melyek azok a konvex poliéderek, amelyeknek bármely négy nem egy síkban levő csúcsa ugyanakkora térfogatú háromoldalú gúlát határoz meg?

(OTV 1964. II. 3.)

* * *

159. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, akkor súlypontja és a köréje írt gömb középpontja egybeesik.

(OTV 1967. II. MF 3.)

160.** Az $SABC$ tetraéderről annyit tudunk, hogy öt olyan gömb van, amelyek mindegyike érinti a tetraéder valamennyi élét, illetőleg azok meghosszabbítását.

Bizonyítsuk be, hogy

a) az $SABC$ tetraéder szabályos;

b) megfordítva: bármely szabályos tetraéder esetén létezik öt olyan gömb, amely az említett tulajdonsággal rendelkezik.

(IV. NMD 1962. Hluboka, 7. (8 pont))

161.** Az adott $ABCD$ tetraéder AB élének hosszúsága a, CD élének hosszúsága b. Az AB és CD kitérő élek egyeneseinek távolsága d, egymással bezárt (egyik) szögük ω. A tetraédert egy az AB és CD élekkel párhuzamos ε sík két részre osztja. Mekkora e két rész térfogatának aránya, ha ismeretes, hogy az AB egyenes és az ε sík távolsága k-szorosa a CD egyenes és az ε közti távolságnak?

(VII. NMD 1965. Berlin, 3. (8 pont))

162.** Adott az $ABCD$ tetraéder. A D csúcsot kössük össze az ABC lap D_1 súlypontjával. A DD_1 egyenessel az A, B, illetve C csúcson át húzott párhuzamosok a csúcsokkal szemben levő oldallapok síkját rendre az A_1, B_1, illetve C_1 pontban metszik.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéder térfogata harmadrésze az $A_1B_1C_1D_1$ tetraéder térfogatának.

b) Érvényes-e a kapott eredmény akkor is, ha a D_1 pontot tetszőlegesen vesszük fel az ABC háromszög belsejében?

(VI. NMD 1964. Moszkva, 6. (9 pont))

7. Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték-számítások

163. Bizonyítsuk be, hogy ha egy paralelogramma benne van egy egységnyi területű háromszögben, akkor területe legfeljebb 1/2 területegység.

(OTV 1968. I. Á—MF 3.)

164. Négy adott szakasz kezdőpontja közös. A szakaszok milyen (egy síkban való) elhelyezése esetén lesz a végpontjaikkal mint csúcsokkal meghatározott négyszög területe a legnagyobb?

(OTV 1966. I. 3.)

165. Az ABC hegyesszögű háromszög B és C csúcsában az AB, illetőleg AC oldalra emelt merőlegesek metszéspontja P. P-nek a BC szakaszon levő (merőleges) vetülete Q. Bizonyítandó, hogy a Q ponton átmenő, BC-től különböző egyeneseknek a BAC szög szárai közé eső szakasza nagyobb BC-nél.

(OTV 1964. I. 3.)

166. Adott egy kör és a kör belsejében fekvő P pont. Tekintsük a kör egy félkörnél kisebb AB ívét, és jelöljük ennek felezőpontját F-fel. Bizonyítandó, hogy ha $PA<PB$, akkor $APF\sphericalangle > FPB\sphericalangle$.

(OTV 1960. II. 2.)

167.* Hegyesszögű háromszögbe négyzetet írunk, amelynek két csúcsa az egyik oldalon, egy-egy csúcsa a további oldalakon van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet tartalmazza a háromszög beírt körének középpontját.

(OTV 1965. II. 2.)

168.* Legyen adva a $P_1P_2P_3$ háromszög és a belsejében egy tetszőleges P pont. A P_1P, P_2P, P_3P egyenesek metszéspontja a szemközti oldallal legyen Q_1, Q_2 illetve Q_3. Bizonyítandó, hogy a

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

arányok közt van olyan, amelyik nem nagyobb, és olyan is, amelyik nem kisebb, mint 2.

(III. NMD 1961. Veszprém, 4. (6 pont))

* * *

169. Az ABC háromszögben az A és a B csúcsból induló súlyvonalak merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy e háromszög C csúcsánál fekvő γ szögre

$$\cos\gamma \geqq \frac{4}{5}.$$

(OTV 1969. I. 8. (10 pont))

170. Bizonyítandó, hogy ha α, β és γ egy háromszög szögei, akkor

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < 2.$$

(OTV 1964. II. 1.)

171. Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqq 3abc.$$

(VI. NMD 1964. Moszkva, 2. (7 pont))

172.* Jelentse a, b és c valamely háromszög oldalait, S pedig ugyanennek a háromszögnek a területét. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2+b^2+c^2\geqq 4S\sqrt{3}.$$

Milyen esetben áll fenn az egyenlőség?

(III. NMD 1961. Veszprém, 2. (7 pont))

173.* Az ABC háromszög AB, BC, illetve CA oldalán vegyük fel rendre a tetszés szerinti, de a csúcspontoktól különböző M, K, L pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az MAL, KBM és LCK háromszögek közül legalább az egyiknek a területe nem nagyobb az ABC háromszög területének negyedrészénél.

(VIII. NMD 1966. Szófia, 6. (8 pont))

174.* Legyen az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának hossza a, AD oldaláé egységnyi, DAB szögének mérőszáma α, végül az ABD háromszög hegyesszögű. Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi sugarú K_A, K_B, K_C és K_D körlemezek, amelyeknek középpontja rendre az A, B, C, illetve D csúcs, akkor és csak akkor fedik be együtt a paralelogrammát, ha

$$a\leqq \cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

(IX. NMD 1967. Cetinje, 1. (6 pont))

* * *

175. Ugyanabba az egységsugarú körbe tetszőlegesen beírtunk egy n-oldalú és egy $n+1$ oldalú szabályos sokszöget. Bizonyítandó, hogy a kör így keletkezett ívei között van olyan, amelynek a mérőszáma nem nagyobb, mint $\pi/n(n+1)$.

(OTV 1968. II. Á—MF 1.)

176.* Jelöljön n egy 2-nél nagyobb egész számot. Egy szabályos n-szög kerületét $n+1$ ponttal egyenlő részekre osztjuk. Hogyan kell az osztópontokat megválasztani, hogy az általuk meghatározott konvex $(n+1)$-szög területe a lehető legnagyobb legyen, és hogyan ahhoz, hogy ez a terület a lehető legkisebb legyen?

(OTV 1970. II. Á—MF 2.)

* * *

177. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraédernek van olyan csúcspontja, amelybe futó élekkel mint oldalakkal háromszöget lehet szerkeszteni.

(X. NMD 1968. Moszkva, 4. (5 pont))

178.* Adott egy kúp. Írjunk bele gömböt, majd e gömb köré hengert úgy, hogy annak alaplapja egybeessék a kúpéval. Jelölje V_1 a kúp, V_2 pedig a henger térfogatát.

a) Bizonyítsuk be, hogy V_1 nem lehet egyenlő V_2-vel.

b) Állapítsuk meg annak a k számnak a legkisebb értékét, amelyre még fennállhat a $V_1 = kV_2$ egyenlőség, és ha k ezt a minimális értéket veszi fel, szerkesszük meg azt a szöget, melyet a kúp alkotói a tengellyel bezárnak.

(II. NMD 1960. Sinaia, 6. (8 pont))

179.* Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos tetraéder köré írt gömb középpontja és a csúcsok közti távolságok összege kisebb, mint a tér bármely más pontjából a tetraéder csúcspontjaiba vezető távolságok összege.

(VIII. NMD 1966. Szófia, 3. (7 pont))

180.* Az $ABCD$ tetraéderben a BDC szög derékszög. A D csúcsból az ABC síkra bocsátott merőleges talppontja egybeesik az ABC háromszög magasságpontjával. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(AB+BC+CA)^2 \leqq 6(AD^2+BD^2+CD^2).$$

Mely tetraéderek esetén érvényes itt az egyenlőségjel?

(XII. NMD 1970. Keszthely, 5. (6 pont))

181.* Valamely tetraéderen csak az egyik él mérőszáma nagyobb 1-nél. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a tetraéder térfogatának mérőszáma legfeljebb $\frac{1}{8}$.

(IX. NMD 1967. Cetinje, 2. (7 pont))

8. Mértani helyek a síkban és a térben

182. Írjunk adott hegyesszögű háromszögbe téglalapokat, amelyeknek egyik oldala meghatározott háromszögoldalon (és további két csúcsa is a háromszög kerületén) van.

a) Határozzuk meg e téglalapok középpontjainak mértani helyét.

b) Írjunk az adott háromszögbe három olyan téglalapot, amelyeknek közös a körülírt körük.

(OTV 1955. II. 3.)

183.* Az AB szakaszon mozog az M pont. Az AM és MB szakasz fölé az AB egyenes ugyanazon oldalán megszerkesztjük az $AMCD$ és $BMEF$ négyzeteket és körülírt körüket. A két kör M- és N-ben metszi egymást. Mutassuk meg, hogy az AE és BC egyenesek átmennek az N ponton. Mutassuk meg, hogy az MN egyenes átmegy egy állandó ponton. Mi a mértani helye a két négyzet középpontját összekötő szakasz felezőpontjának?

(I. NMD 1959. Brassó, 5. (8 pont))

184.* Adva vannak az e, f párhuzamos egyenesek és köztük az O pont; O távolsága e-től a, f-től b. Az O-n át húzott g egyenes e-t E-ben, f-et F-ben metszi. F-ben merőlegest állítunk g-re, és erre az e-vel való metszéspontja irányában felmérjük az OE szakaszt, ennek végpontja P. Mi a P pont mértani helye, ha g az O körül forog?

(OTV 1959. II. 2.)

185.* Az adott OAB háromszög AOB szöge kisebb 90°-nál. Az OAB háromszög kerületének vagy belsejének tetszőleges, de O-tól különböző M pontjából merőlegeseket bocsátunk OA-ra és OB-re. Ezeknek a merőlegeseknek a talppontját jelöljük rendre P-vel, illetve Q-val. Legyen továbbá H az OPQ háromszög magasságpontja. Mi a H pontok mértani helye, ha M befutja

a) az AB oldalt;

b) az OAB háromszög belsejét?

(VII. NMD 1965. Berlin, 5. (7 pont))

186.* Határozzuk meg egy egyenlő szárú háromszög belsejében fekvő ama pontok mértani helyét, melyekre a száraktól mért távolságok mértani közepe megegyezik az alaptól mért távolsággal.

(OTV 1961. II. 2.)

187.** Egy k kör valamely t érintőjének két pontja: A és M. Jelöljük M-nek A-ra vonatkozó tükörképét M'-vel. Tekintsük az M-ből és M'-ből a k-hoz húzott második érintőket. Mi ezek metszéspontjainak mértani helye, ha M végigfut t-n?

(OTV 1962. II. 3.)

* * *

188. Legyen adva két egymásra merőleges egyenes és egy pont. A pont körül rajzoljunk kört tetszés szerinti sugárral, de úgy, hogy mind a két egyenest messe. E metszéspontokban emeljünk merőlegest az egyenesekre, és keressük meg ezek metszéspontjait. Milyen vonalat írnak le a metszéspontok, ha a kör sugarát változtatjuk?
(OTV 1952. I. 1.)

189. Adott a síkon két egymást metsző egyenes. Bizonyítandó, hogy azoknak a pontoknak mértani helye (a síkon), amelyekre nézve a két egyenestől mért távolságok négyzetösszege egy adott pozitív számmal egyenlő, ellipszis.
(OTV 1969. I. 5. (8 pont))

190. Állítsunk merőlegest egy parabola érintőjére az érintési pontban, és ezt messük el a fókuszon átmenő, az érintővel párhuzamos egyenessel. Mi a metszéspontok mértani helye, ha az érintési pont végigfut a parabolán?
(OTV 1954. I. 3.)

191.* Egy vonal pontjainak derékszögű koordinátáit a következő kifejezések adják meg:

$$x=\frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2}; \quad y=\frac{2v}{(1-u)^2+v^2},$$

ahol u, v paraméterek, és $\frac{v}{u}=m$ 0-tól különböző állandó. Adjuk meg a vonal egyenletét x és y, valamint m közötti összefüggés alakjában.
(OTV 1967. II. Á 3.)

* * *

192. Adott két egymást metsző, egymással α szöget bezáró egyenes. Mi a mértani helye azon r sugarú gömbök középpontjainak, amelyek mindkét egyenest érintik?
(OTV 1967. I. M 3.)

193. Adott egy $ABCDA'B'C'D'$ kocka. Jelöljük X-szel a kocka AC lapátlójának tetszés szerinti pontját, Y-nal pedig a $B'D'$ lapátló egy tetszés szerinti pontját.

a) Mi a mértani helye valamennyi XY szakasz felezőpontjának?

b) Tekintsük valamennyi XY szakasznak azt a Z pontját, amelyre fennáll a $ZY=2\,XZ$ egyenlőség, és keressük meg ezeknek a Z pontoknak a mértani helyét!
(II. NMD 1960. Sinaia, 5. (7 pont))

194. Adott az ε sík, és a sík egyik oldalán az A, B, C pont, amelyek nincsenek egy egyenesen, és az általuk meghatározott sík nem párhuzamos ε-nal. A', B', C' legyen az ε sík három tetszés szerinti pontja. Az AA', BB', CC' szakaszok felezőpontja legyen L, M, illetve N, és az LMN háromszög súlypontja legyen G. (Figyelmen kívül hagyjuk az olyan A', B', C' ponthármasokat, amelyekre vonatkozóan L, M, N nem alkot háromszöget.) Mi a G pontok mértani helye, ha A', B', C' egymástól függetlenül befutja az ε síkot?

(III. NMD 1961. Veszprém, 6. (7 pont))

195.* Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka: két szemben fekvő lapja $ABCD$ és $A'B'C'D'$, ahol $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Az X pont állandó sebességgel futja be az $ABCD$ négyzet kerületét a felírt körüljárási irányban, míg az Y pont ugyanakkora sebességgel a $B'C'CB$ négyzet kerületét futja be, szintén az itt felírt körüljárási irányban. Az X és az Y pont ugyanabban a pillanatban indul el az A, illetve B' pontból. Mi az XY szakasz Z felezőpontjának mértani helye?

(IV. NMD 1962. Hluboka, 3. (8 pont))

196.* Adott a térben egy A pont és egy BC szakasz. Mi a mértani helye az összes olyan derékszög csúcsának, melyeknek egyik szára az A pontot, másik szára pedig a BC szakasznak legalább egy pontját tartalmazza?

(V. NMD 1963. Wrocław, 2. (7 pont))

* * *

197. Az $y=x^2+cx^{-2}$ függvények görbéi egy görbesereget alkotnak, ha c befutja az összes pozitív számot. Messük el egy az y tengellyel párhuzamos egyenessel a sereg minden görbéjét, és valamennyi metszéspontban húzzuk meg az illető görbe érintőjét. Bizonyítsuk be, hogy az érintők egy ponton mennek át.

(OTV 1970. I. 3. (7 pont))

198.** Az S síkban levő AB és BC egyenlő szakaszok B-ben csuklósan csatlakoznak. Az A pont rögzített, a C pont egy A-ból kiinduló félegyenesen mozog. Milyen idomot súrol a BC szakasz?

(OTV 1967. II. M 3.)

9. Szerkesztések

199. Adva van egy egyenlő szárú trapéz szára, átlóinak metszéspontja és a köré írt kör. Szerkesszük meg a trapézt!
(OTV 1948. 2.)

200. Adva van az ABC háromszögnek az A és B csúcsból kiinduló m_a, m_b magasságvonala és az A csúcsból kiinduló s_a súlyvonala. Szerkesszük meg a háromszöget.
(II. NMD 1960. Sinaia, 4. (5 pont))

201. Szerkesszük meg a derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója, és tudjuk, hogy az átfogóhoz tartozó súlyvonal mértani középarányos a két befogó között.
(I. NMD 1959. Brassó, 4. (5 pont))

202. Az $ABCD$ konvex négyszögben $BC=CD$. Adottak az AB és AD oldalak, továbbá a B és D csúcsnál levő szögek. Szerkesszük meg a négyszöget!
(OTV 1963. II. 2.)

203.* Szerkesztendő az ABC háromszög, ha adva van két oldalának $AC=b$, $AB=c$ hossza és az $AMB=\omega$ szög, ahol M a BC szakasz középpontja; ω hegyesszög. Bizonyítandó, hogy a feladat akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leqq c < b.$$

Milyen esetben áll fenn az egyenlőségi jel?
(III. NMD 1961. Veszprém, 5. (7 pont))

204.* Adottak az $A_0B_0C_0$ és $A'B'C'$ hegyesszögű háromszögek. Szerkesszünk az $A_0B_0C_0$ háromszög köré olyan ABC háromszöget, amely hasonló az $A'B'C'$ háromszöghöz (az A, B, C pontok rendre az A', B', C' pontoknak feleljenek meg) és C_0 az AB oldalnak, A_0 a BC oldalnak, végül B_0 a CA oldalnak belső pontja. Szerkesszük meg ezután az ilyen ABC háromszögek közül azt is, amelyiknek legnagyobb a területe.
(IX. NMD 1967. Cetinje, 4. (6 pont))

205.* A P és Q sík egymást a p egyenesben metszi, és A a P síknak, C a Q síknak olyan pontja, mely nincs rajta p-n. Megszerkesztendő az az $ABCD$

szimmetrikus trapéz ($AB \parallel CD$), melynek B csúcsa a P, D csúcsa a Q síkban van, és amelybe kört írhatunk.

(I. NMD 1959. Brassó, 6. (7 pont))

* * *

206. Adva van egy egyenesszakasz és egy ezzel párhuzamos egyenes. Szerkesszük meg csak vonalzó segítségével a szakasz harmadrészét.

(OTV 1956. I. 2.)

207. Az $ABCD$ síkbeli négyszög A csúcsának B-re, B-nek C-re, C-nek D-re és D-nek A-ra vonatkozó tükörképét jelöljük rendre A_1, B_1, C_1, D_1-gyel. Szerkesszük meg az $ABCD$ négyszöget, ha adott az A_1, B_1, C_1 és D_1 pont.

(OTV 1969. II. M 1.)

208. Adva van egy háromszög és három párhuzamos egyenes. Szerkesszünk olyan háromszöget, amely az adott háromszöghöz hasonló és csúcsai az adott egyeneseken vannak.

(OTV 1954. I. 2.)

209. Adva van a síkban A és B pont. Hol kell elhelyezni a síkban a C pontot, hogy a CA távolság 2,6-szerese legyen a CB távolságnak, és a BAC szög a lehető legnagyobb legyen?

(OTV 1952. II. 1.)

210.* Az $ABCD$ négyzet belsejében levő P pontnak az A, B, C csúcsoktól való távolsága rendre 2, 3, 4. Szerkesszük meg e négyzetet, és számítsuk ki a területét.

(OTV 1953. I. 2.)

211.** Adott egy egyenes négy pontja a következő sorrendben: A, B, C, D. Az egyenes egy szabályos ötszög szelője, és az A pontban metszi az egyik oldal egyenesét, B-ben az előbbi oldallal párhuzamos átló egyenesét; C-ben és D-ben pedig az első oldallal nem szomszédos oldalak egyeneseit. Szerkesztendő a szabályos ötszög.

(OTV 1967. II. Á—MF 2.)

* * *

212. Adott a síkban két kör. Mutassuk meg, hogy ha elhelyezhető egy rombusz úgy, hogy egyik átlójának a végpontjai az egyik körön legyenek, a másikéi

a másik körön, akkor végtelen sok ilyen helyzetű rombusz van, és ezek oldalai mind egyenlők.

Szerkesszünk így elhelyezkedő négyzetet.

(OTV 1969. II. Á—MF 1.)

213. Adva van egy kör, annak kerületén egy A pont és belsejében egy O pont. Szerkesszük meg a kör kerületén a B és C pontokat úgy, hogy az ABC háromszögbe írt kör középpontja az adott O pont legyen.

(OTV 1957. I. 3.)

214. Szerkesszünk adott körbe olyan trapézt, melybe kör írható, és amelynek egyik oldala a körnek átmérője.

(OTV 1966. I. 2.)

215. Adott egy k kör három különböző pontja: A, B és C. Jelöljük ki szerkesztéssel ennek a körnek azt a D pontját, amelyre az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.

(IV. NMD 1962. Hluboka, 5. (7 pont))

10. Kombinatorika

216. Bizonyítsuk be, hogy bármely társaságban található két olyan ember, akinek abban a társaságban ugyanannyi ismerőse van.

(OTV 1966. II. 1.)

217. Hány olyan megoldása van az $|x|+|y|<1000$ egyenlőtlenségnek, amelyben x és y egész számok?

(OTV 1959. I. 1.)

218. Hány olyan legfeljebb hatjegyű természetes szám van, amelyben előfordul az 1-es számjegy?

(OTV 1960. I. 1.)

219. Legyenek a, b adott valós számok. Hány olyan 100 tagú számtani sorozat van, melynek a és b is tagja?

(OTV 1948. 1.)

220. Hányféleképp írhatjuk fel az 1, 2, ..., 6 számokat a dobókocka 6 lapjára?
(OTV 1947. 1.)

* * *

221. Egy 6×6 mezőből álló „sakktáblát" hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedtünk le. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar le. Bizonyítandó, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté.
(OTV 1963. II. 3.)

222. Hét osztálytárs a bizonyítványosztás után megállapította, hogy nincs köztük kettő, aki mind a 12 tárgyból ugyanazt az osztályzatot kapta volna. Bizonyítsuk be, hogy ki lehet választani a 12 tárgy közül 6 olyat, hogy ha csak ebből a 6 tárgyból kapott osztályzatokat hasonlítjuk össze, akkor sincs a hét diák közt két olyan, aki mind a 6 tárgyból ugyanazt a jegyet kapta.
(OTV 1965. II. 3.)

223. 17 tudós mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Összesen háromféle témáról leveleznek, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról az egy témáról. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább három olyan tudós, akik közül bármely kettő azonos témáról levelez egymással.
(VI. NMD 1964. Moszkva, 4. (6 pont))

224.** Egy versenyen öt tanuló vett részt: *A*, *B*, *C*, *D* és *E*. Valaki előzőleg azt tippelte, hogy a versenyzők helyezési sorrendje *ABCDE* lesz, azonban — mint utólag kiderült — így egyetlen versenyző helyezését sem találta el, sőt még azt sem, milyen sorrendben következett két egymás utáni helyezett. Másvalaki a *DAECB* sorrendre tippelt. Ez lényegesen jobbnak bizonyult, mivel ebben pontosan két versenyző helyezése megegyezett a ténylegessel, továbbá ugyancsak két esetben az is, hogy milyen sorrendben követte egymást két versenyző. Milyen eredménnyel végződött valójában a verseny?
(V. NMD 1963. Wrocław, 6. (8 pont))

* * *

225.* Adott a síkban n darab pont ($n \geqq 3$). A belőlük kiválasztható összes pontpár által meghatározott szakaszok hosszának maximuma legyen d. Az említett szakaszok közül azokat, melyeknek a hosszúsága éppen d, az adott pontrendszer átmérőinek nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb n darab ilyen átmérő van.
(VII. NMD 1965. Berlin, 6. (9 pont))

226.* Adott a síkban 5 pont. Azok között az egyenesek között, amelyek ezt az 5 pontot páronként összekötik, nincsenek sem párhuzamosak, sem egymásra merőlegesek, sem egymással egybeesők. Az adott pontok mindegyikéből merőlegeseket bocsátunk az összes olyan egyenesre, melyeket a megmaradó négy-négy pont páronkénti összekötésével nyerünk. Mennyi a merőlegesek metszéspontjai számának maximuma, ha az adott 5 pontot figyelmen kívül hagyjuk?
(VI. NMD 1964. Moszkva, 5. (7 pont))

227.* Adott a síkban n pont ($n>4$), közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\binom{n-3}{2}$ olyan konvex négyszög van, amelyeknek csúcspontjai az adott pontok közül valók!
(XI. NMD 1969. Bukarest, 5. (7 pont))

228.** Adott a síkban 100 pont; közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Tekintsük az összes lehetséges háromszöget, amelyeknek csúcspontjai az adott pontok közül valók. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a háromszögeknek legfeljebb 70%-a hegyesszögű.
(XII. NMD 1970. Keszthely, 6. (8 pont))

* * *

229. Az ABC egyenlő szárú háromszögben a B csúcsnál fekvő szög n-szer akkora, mint az A csúcsnál fekvő szög, ahol n 1-nél nagyobb egész szám. Mutassuk meg, hogy lehet a háromszöget $n-1$ egyenes vágással úgy szétvágni n egyenlő szárú háromszögre, hogy valamennyi háromszög szárai egyenlők legyenek!
(OTV 1960. I. 3.)

230.* Legyen n természetes szám, k pedig 2-nél nagyobb egész szám. A síkban n darab konvex k-szöget rajzolva, maximálisan hány részre oszthatjuk velük a síkot?
(OTV 1970. II. M 1.)

* * *

231.* Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = 1.$$

(OTV 1968. I. M 3.)

232.* Egy egysejtű lény 1 óra hosszat él, utána vagy elpusztul, vagy osztódással két ugyanilyen egysejtű jön létre belőle. Az elpusztulás valószínűsége, p ($0<p<1$) ugyanaz minden ilyen egysejtűnél. Mi annak a valószínűsége, hogy egy éppen létrejött egysejtűt véve, 3 óra eltelte után egyetlen élő utóda sem lesz?

(OTV 1970. II. M 2.)

* * *

233.* Jelentse $[x]$ azt a legnagyobb egész számot, amely legfeljebb akkora, mint az x valós szám. Számítsuk ki az

$$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots$$

összeg értékét minden pozitív egész n számra, és bizonyítsuk be a kapott eredmény helyes voltát.

(X. NMD 1968. Moszkva, 6. (8 pont))

III. RÉSZ

MEGOLDÁSOK

1. Egyenletek

1. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlet gyöke egész szám:

$$(1)\qquad \frac{x-29}{1970}+\frac{x-27}{1972}+\frac{x-25}{1974}+\frac{x-23}{1976}+\frac{x-21}{1978}+\frac{x-19}{1980}=$$

$$=\frac{x-1970}{29}+\frac{x-1972}{27}+\frac{x-1974}{25}+\frac{x-1976}{23}+\frac{x-1978}{21}+\frac{x-1980}{19}$$

Megoldás

Vegyük észre, hogy ha a nevezőhöz hozzáadjuk a számláló kivonandóját, minden törtnél 1999-et kapunk. Így minden törtből 1-et levonva — mindkét oldalon ugyanannyi tag van — minden számláló $x-1999$ lesz. A két oldal különbségét képezve az

$$(2)\qquad (x-1999)\left(\frac{1}{29}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{19}-\frac{1}{1970}-\frac{1}{1972}-\ldots-\frac{1}{1980}\right)=0$$

egyenlethez jutunk. Ez az $x=1999$ értékre teljesül, más értékre nem, mert a második tényező nem 0. Átalakításaink visszafelé is elvégezhetők, tehát az (1) egyenlet egyetlen gyöke 1999, és ez természetes szám.

2. Fejezzük ki a-val az

$$y=\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}$$

kifejezést, ha

$$x=\frac{a^4+20a^2+16}{4a^2}, \quad \text{és} \quad 0<a\leqq 2.$$

Megoldás

Behelyettesítéssel

$$x-3=\frac{a^4+8a^2+16}{4a^2}=\left(\frac{a^2+4}{2a}\right)^2, \quad x-7=\frac{a^4-8a^2+16}{4a^2}=\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2.$$

Így

$$y=\left|\frac{a^2+4}{2a}\right|+\left|\frac{a^2-4}{2a}\right|.$$

A fenti függvény $a=0$ mellett nincs értelmezve.

Tudjuk, hogy

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geqq 0; \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

„Feloldjuk" az abszolútérték-jeleket:

$$\text{Ha} \quad a < -2: \quad y = \left(-\frac{a^2+4}{2a}\right) + \left(-\frac{a^2-4}{2a}\right) = -a;$$

$$\text{ha} \quad -2 \leqq a < 0: \quad y = \left(-\frac{a^2+4}{2a}\right) + \left(\frac{a^2-4}{2a}\right) = -\frac{4}{a};$$

$$\text{ha} \quad 0 < a \leqq 2: \quad y = \left(\frac{a^2+4}{2a}\right) + \left(-\frac{a^2-4}{2a}\right) = \frac{4}{a};$$

$$\text{ha} \quad 2 < a: \quad y = \left(\frac{a^2+4}{2a}\right) + \left(\frac{a^2-4}{2a}\right) = a.$$

Csak arra vigyáztunk, hogy minden zárójelen belül nem negatív szám álljon. Az $y(a)$ függvény fenti megadásával a feladatot is megoldottuk.

3. Az x változó mely (valós) értékei mellett érvényesek a következő egyenlőségek:

a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$

c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$?

(Előjel nélkül a négyzetgyök mindig a nem negatív négyzetgyököt jelenti!)

I. megoldás

A három kérdés megválaszolásához megvizsgáljuk az

$$(1) \qquad y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$$

kifejezést mint x függvényét (a megjegyzésnek megfelelően).

A belső négyzetgyök értéke akkor valós szám, ha

$$2x-1 \geqq 0, \quad \text{azaz} \quad x \geqq \frac{1}{2}.$$

Ilyen x-ekre mindkét (nagy) négyzetgyök értelmezve van, mert x és $\sqrt{2x-1}$ két nem negatív szám, négyzetük különbsége pedig

$$x^2-(\sqrt{2x-1})^2=x^2-2x+1=(x-1)^2 \geqq 0,$$

így $$x \geqq \sqrt{2x-1}.$$

Az egyenlőségi jel $x=1$-re érvényes.

Előzetes megjegyzésünk szerint $x \geqq \frac{1}{2}$-re, a függvényértékek nem negatívak: $y \geqq 0$. A két gyökjel alatti kifejezés egymásnak ún. konjugáltja, ezért kifejezésünk négyzete egyszerűbbnek ígérkezik. Valóban — összevonás után —

$$y^2 = 2x + 2\sqrt{x^2-(2x-1)} = 2x + 2\sqrt{(x-1)^2} = 2x + 2\,|\,x-1\,|\,.$$

Az $x \leqq 1$ esetben $x-1 \leqq 0$, így

$$|\,x-1\,| = 1-x,$$

ezért $y^2 = 2x + 2(1-x) = 2$. Tehát $y \geqq 0$ miatt $y = \sqrt{2}$.

Az $x > 1$ esetben pedig $x-1$ pozitív, így

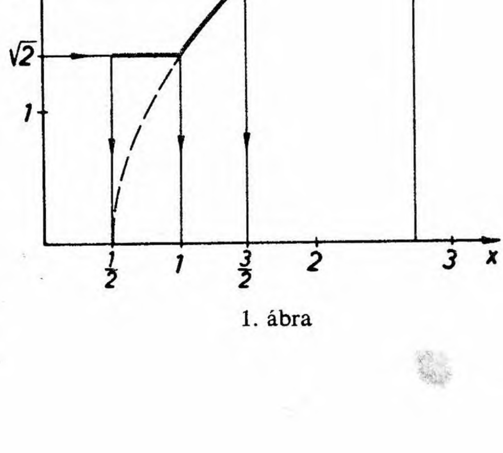
$$|\,x-1\,| = x-1,$$
$$y^2 = 2x + 2(x-1) = 4x-2.$$

Tehát $y = \sqrt{4x-2}$ $(y \geqq 0)$.

Összefoglalva (1. ábra):

$$y = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{ha } \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1; \\ \sqrt{4x-2}, & \text{ha } 1 < x; \\ \text{nincs értelmezve,} & \text{ha } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ezek szerint az *a)* egyenlőség az $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ értékekre, más szóval az [1/2, 1] szakaszon teljesül, máshol nem. A *b)* egyenlőség sehol sem teljesül. Ez olyan egyenlet, melynek nincs gyöke, mert a $\sqrt{4x-2}$ kifejezés értéke az $x=1$ helyen $\sqrt{2}$, és növekszik, ha x is növekszik, $y > \sqrt{2}$, ha $x > 1$. Végül a *c)* egyenlőség $x = \frac{3}{2}$-re, és csak erre teljesül. Ez leolvasható a



1. ábra

grafikonról is, de igazolja a $\sqrt{4x-2}=2$, $4x-2=4$, $x=\frac{3}{2}$ egyenletmegoldás és a behelyettesítés is.

II. megoldás

Már az előző megoldás is érzékelteti a következő észrevételt:

$$x+\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2x-1}\right)^2; \quad x-\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2x-1}\right)^2; \quad \left(x\geqq\frac{1}{2}\right).$$

Tehát — a négyzetgyök értelmezése szerint —

$$y=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\,|1+\sqrt{2x-1}|+|1-\sqrt{2x-1}|\,\}.$$

Feloldjuk az abszolútérték-jeleket:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2x-1})+(1-\sqrt{2x-1})\}=\sqrt{2}, \text{ ha } \frac{1}{2}\leqq x\leqq 1;$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2x-1})+(\sqrt{2x-1}-1)\}=\sqrt{4x-2}, \quad \text{ha } 1<x;$$

a továbbiak azonosak az I. megoldással.

Megjegyzés

A feladat a négyzetgyök értelmezését világítja meg. Szerencsésen mutat rá a függvénykapcsolat lényegére, az értelmezési tartomány és értékkészlet kapcsolatára és ennek az egyenletmegoldásban betöltött szerepére.

A második megoldásból látszik, hogyan keletkezett a feladat, s hogyan lehet hasonló feladatokat készíteni.

4. Határozzuk meg a

(1) $$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x$$

egyenlet valamennyi valós gyökét. p valós paramétert jelent.

Megoldás

Az egyenletet ekvivalens átalakítások sorozatával oldjuk meg.

Először meghatározzuk az (1)-ben szereplő függvények értelmezési tartományának közös részét:

(2) $$x^2 \geqq 1,$$ (2') $$x^2 \geqq p.$$

A (2) feltételek teljesülése mellett a bal oldal nem negatív, így a jobb oldal sem negatív:

(3) $$x \geqq 0.$$

(2), (3) *teljesülése mellett* (1)*-ből négyzetreemeléssel ekvivalens egyenlethez jutunk*, hiszen két nem negatív szám ((1) bal és jobb oldala a keresett x értékek helyettesítésével) akkor és csak akkor egyenlő, ha négyzeteik is egyenlők. A rendezés után (ami ekvivalens átalakítás) kapjuk:

(4) $$4\sqrt{(x^2-p)(x^2-1)} = p+4-4x^2.$$

A bal oldal nem negatív, így a jobb oldal sem negatív, ebből

(5) $$x^2 \leqq \frac{p+4}{4}.$$

Újabb négyzetreemelés, majd rendezés után (4)-ből a következő egyenlethez jutunk:

(6) $$8(2-p)x^2 = (4-p)^2.$$

Ez a (2), (3), (5) feltételek mellett ekvivalens (1)-gyel.

a) *Legyen* $p=2$.
Ebben az esetben (6)-nak nincs megoldása, hiszen $0 \neq 4$.

b) *Legyen* $p \neq 2$, ekkor (6)-ból

(7) $$x^2 = \frac{(4-p)^2}{8(2-p)}.$$

Behelyettesítéssel megvizsgáljuk, mely p értékekre teljesülnek az ekvivalencia (2), (3), (5) *feltételei*. Megoldjuk az egyenlőtlenségeket:

(2) $$\frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \geqq 1, \qquad \frac{p^2}{8(2-p)} \geqq 0, \quad p<2;$$

(2') $$\frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \geqq p, \qquad \frac{(3p-4)^2}{8(2-p)} \geqq 0, \quad p<2;$$

$$(5)\qquad \frac{(4-p)^2}{8(2-p)} \leqq \frac{p+4}{4}, \quad \frac{3p\left(p-\frac{4}{3}\right)}{8(2-p)} \leqq 0, \quad 0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}.$$

Azt kaptuk, hogy az (1) *egyenletnek*

$$(8)\qquad 0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$$

teljesülése mellett van megoldása, és – (7)-ből –

$$(9)\qquad x = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}}.$$

Megjegyzés

1. Lehetséges olyan megoldás is, hogy először négyzetreemeléssel megállapítjuk, mely x értékek lehetnek gyökök, majd behelyettesítéssel döntjük el, hogy azok valóban megfelelnek-e. A paraméter szerinti diszkusszió az utóbbi lépéshez kapcsolódik, de bonyolultabban érünk célhoz, mint az előbbi megoldásban.

2. Ha a p paramétert a $0 \leqq p \leqq \frac{4}{3}$ szakaszon változtatjuk, az egyenlet x gyöke ettől függően változik. Maghatározhatjuk x értékkészletét:

$$x = \frac{4-p}{\sqrt{8(2-p)}} = \sqrt{\frac{16-8p+p^2}{16-8p}} = \sqrt{1+\frac{p^2}{16-8p}},$$

eszerint ha p a $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ szakaszon halad végig, x növekszik, mert a gyök alatt a tört számlálója nő, nevezője csökken. $p=0$ esetén $x=1$, $p=\frac{4}{3}$ esetén $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$. Az x értékkészlete tehát az $\left[1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ szakasz.

5. Oldjuk meg a $\dfrac{2^{(x+1)^2}}{2^{(x-1)^2}} = 4^{x^2}$ egyenletet.

Megoldás

Az egyenletet úgy alakítjuk át, hogy mindkét oldalán a 2-nek egy – egy hatványa álljon:

$$2^{(x+1)^2-(x-1)^2} = 2^{2x^2}, \text{ azaz } 2^{4x} = 2^{2x^2}.$$

Ez utóbbi csak akkor lehetséges, ha a kitevők megegyeznek:

$$4x = 2x^2.$$

Tehát $x=0$, vagy $x=2$. Könnyen belátható, hogy a kapott gyökök az eredeti egyenletnek valóban megoldásai.

6. Néhány adat a szovjet ipar termelésének emelkedéséről (az 1940. évihez viszonyítva):

	1940	1950	1951	1952
Termelési eszközök:	100	205	239	267
Fogyasztási cikkek:	100		143	
Együtt:	100	173	202	224

A fogyasztási cikkek 1952. évi termelése hány százaléka volt az 1950. évinek?

Megoldás

A megoldás során mindent az 1940. évi fogyasztási cikkek termeléséhez fogunk viszonyítani. Feltesszük — a gazdaság fejlesztésének természetes követelménye —, hogy a termelési eszközök termelése minden évben p-szerese volt a fogyasztási cikkek termelésének.

Először p értékét számítjuk ki. Az 1951. évi fogyasztási cikkek termelése az 1940. évinek 1,43-szorosa, a termelési eszközök termelése pedig $p\cdot 2{,}39$-szorosa. Az össztermelés 1940-ben a fogyasztási cikkek termelésének $(1+p)$-szerese, 1951-ben $(1+p)\cdot 2{,}02$-szorosa, tehát

$$1{,}43+2{,}39p=(1+p)2{,}02\,; \text{ innen } p=\frac{59}{37}\,.$$

Legyen a fogyasztási cikkek termelése 1950-ben az 1940. évinek $x\%$-a, 1952-ben pedig $y\%$-a.

Az előbbiek mintájára felírható, hogy

$$\frac{x}{100}+2{,}05p=(1+p)1{,}73, \qquad x=173-32p\,;$$

$$\frac{x}{100}+2{,}67p=(1+p)2{,}24, \qquad y=224-43p.$$

A keresett mennyiség $100\,\dfrac{y}{x}$.

$$100\frac{y}{x}=100\,\frac{224-43\cdot\dfrac{59}{37}}{173-32\cdot\dfrac{59}{37}}=\frac{224\cdot 37-43\cdot 59}{173\cdot 37-32\cdot 59}\cdot 100=\frac{575\,100}{4513}=127{,}4.$$

Ezek szerint a fogyasztási cikkek termelése 1952-ben az 1950. évi termelés 127%-a volt.

7. Egy üzem az első ötéves terv első évében 6%-kal emeli évi termelését, a második évben pedig további 8%-kal. A további három év alatt évente ugyanannyi százalékkal akarják emelni a termelést, úgyhogy a termelésnek a terv egész folyamán elért emelkedése átlagos évi 10%-nak feleljen meg. Hány százalékkal kell emelni évente a termelést?

Megoldás

Ha a terv előtti év termelése T volt, akkor az első évben a termelés $T_1 = T + \frac{T}{100} 6 = 1{,}06T$.

A második évben $T_2 = T_1 + \frac{T_1}{100} 8 = 1{,}08 T_1 = 1{,}06 \cdot 1{,}08T$ a termelés. Ha a további három évben évente x%-kal növelik a termelést, akkor az ötéves terv utolsó évében $T_5 = T_2\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3$ lesz a termelés. Ennek kell megegyeznie a feltétel szerint $T \cdot 1{,}1^5$-nel.

Tehát

$$T_5 = 1{,}06 \cdot 1{,}08 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 T = 1{,}1^5 \cdot T.$$

Innen

$$1 + \frac{x}{100} = \sqrt[3]{\frac{1{,}1^5}{1{,}06 \cdot 1{,}08}} = 1{,}12.$$

Ebből $x = 12$.

Tehát a következő három évben évente 12%-kal kell emelni a termelést.

Megjegyzés

A feladat kérdése így is értelmezhető: A hátralevő három évben évente hány százalékkal kell emelni a termelést, hogy az öt évi össztermelés ugyanannyi legyen, mintha a terv egész folyamán végig évi 10%-kal emelkedett volna a termelés? Ekkor a feltételi egyenlet — $q = 1 + \frac{x}{100}$ jelöléssel —

$$1{,}06 + 1{,}06 \cdot 1{,}08(1 + q + q^2 + q^3) = 1{,}1\,\frac{1{,}1^5 - 1}{0{,}1} = 6{,}715\,61.$$

Innen

$$q^3 + q^2 + q + 1 = 4{,}9\underline{4} \text{ (2 tizedesre kerekítve).}$$

Ha az egyenlet mindkét oldalát $(q-1)$-gyel szorozzuk, akkor a $q^4 - 1 = 4{,}94q - 4{,}94$, azaz

$$q^4 = 4{,}94q - 3{,}94$$

egyenlethez jutunk.

Ennek az egyenletnek a $(q-1)$-gyel való szorzás miatt egyik gyöke az 1, a többi gyöke pedig azonos az eredeti egyenlet gyökeivel.

Az egyenletet grafikusan megoldva $q = 1{,}14$ a megfelelő megoldás. Ezek szerint az utolsó 3 évben 14 %-kal kell emelni évente a termelést.

8. Két munkás, A és B valamely rájuk bízott munkát a következőképpen végzett el: Először csak A dolgozott $\frac{2}{3}$ annyi ideig, mint amennyi idő alatt B egyedül elvégezné az egész munkát. Azután B felváltotta A-t és befejezte a munkát. Ilyen módon a munka 2 órával több időt vett igénybe, mintha együtt fogtak volna hozzá és együttesen végezték volna el. Ha együtt dolgoztak volna az utóbbi módon, akkor A feleannyi munkát végzett volna, mint amennyit ténylegesen B-re hagyott. Hány óra alatt végezné el a munkát A, illetőleg B egyedül?

Megoldás

Legyen az adott munka egységnyi, és tegyük fel, hogy A x óra alatt, B pedig y óra alatt végezné el az egész munkát egyedül.

Ezek szerint A először $\frac{2}{3}y$ óráig dolgozott, s mivel 1 óra alatt $\frac{1}{x}$ munkát végzett el, így elvégzett $\frac{2}{3}y \cdot \frac{1}{x} = \frac{2y}{3x}$ munkát. Ennélfogva B-re $1 - \frac{2y}{3x} = \frac{3x-2y}{3x}$ munka maradt, amit ő $\frac{3x-2y}{3x} : \frac{1}{y}$ óra alatt végzett el.

Az egész munka $\frac{2y}{3} + \frac{3xy-2y^2}{3x}$ ideig tartott. Ha együtt dolgoztak volna, akkor a munka $1 : \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ időt vett volna igénybe. Ennek alapján — a feladat szerint —

$$\frac{2y}{3} + \frac{3xy-2y^2}{3x} = \frac{xy}{x+y} + 2.$$

Másrészt, ha együtt dolgoztak volna, akkor A $\frac{xy}{x+y} \cdot \frac{1}{x} = \frac{y}{x+y}$ munkát végzett volna el. Ekkor B-re $\frac{3x-2y}{3x}$ munkát hagyott volna, ezért a feladat szerint

$$\frac{2y}{x+y} = \frac{3x-2y}{3x}.$$

Innen $3x^2-5xy-2y^2=(3x+y)(x-2y)=0$, tehát feladatunkban $x=2y$, hiszen $x, y>0$.

Ezt behelyettesítve az először kapott egyenletbe:

$$\frac{2y}{3}+\frac{6y^2-2y^2}{6y}=\frac{2y^2}{3y}+2,$$

azaz

$$\frac{4y}{3}=\frac{2y}{3}+2;$$

$$y=3, \quad \text{és így} \quad x=2y=6.$$

Tehát A 6, B pedig 3 óra alatt végezné el a munkát egyedül. Eredményünket könnyen ellenőrizhetjük.

Más megoldási lehetőség: Tegyük fel, hogy egyenlő idők alatt B λ-szor annyi munkát végez el, mint A. Ezt a λ-t határozzuk meg először.

9. Egy vasútvonalon A helységből személyvonat indul C helységbe. Amikor a vonat B-n átfut, onnan egy tehervonat indul A felé. Amidőn pedig a tehervonat A-ba érkezik, egy gyorsvonat indul A-ból C felé, s ez éppen a C állomáson éri utol a korábban említett személyvonatot. A és B közt félúton egy diák megfigyeli, hogy a személyvonat áthaladása után 15 perc múlva futott át a tehervonat, és újabb 11 perc elteltével a gyorsvonat. A-tól B 10 km-re van. Kérdés, hány km-re van B-től a C helység? (Feltesszük, hogy a vonatok egyenletes sebességgel haladnak.)

I. megoldás

Jelöljük a BC távolságot x-szel, a személy-, teher-, és gyorsvonat sebességét rendre c_1, c_2, ill. c_3-mal. (A sebességeket km/perc-ben számoljuk.)

A diák megfigyelése szerint felírhatjuk a következőket:

$$\frac{5}{c_1}+\frac{5}{c_2}=15 \text{ és } \frac{5}{c_2}+\frac{5}{c_3}=11.$$

A BC távolságot a személyvonat $\frac{x}{c_1}$ parc alatt teszi meg. Ennyi idő alatt a tehervonat megtesz 10 km-t és utána a gyorsvonat $(10+x)$ km-t:

$$\frac{x}{c_1}=\frac{10}{c_2}+\frac{10+x}{c_3}.$$

Az első két egyenlet kivonásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{5}{c_1}-\frac{5}{c_3}=4, \text{ azaz } \frac{1}{c_2}-\frac{1}{c_3}=\frac{4}{5}.$$

A harmadik egyenletet rendezve:

$$x\left(\frac{1}{c_1}-\frac{1}{c_3}\right)=10\left(\frac{1}{c_2}+\frac{1}{c_3}\right).$$

Innen $x \cdot \frac{4}{5} = 10 \cdot \frac{11}{5}$.

$x = 27{,}5$ km. Ezt könnyen ellenőrizhetjük.

II. megoldás

A személyvonat és a tehervonat egymás után 5—5 km-t 15 perc alatt, a tehervonat és a gyorsvonat ugyanezt 11 perc alatt teszi meg. *Ez azt jelenti, hogy a gyorsvonat 5 km-t 4 perccel rövidebb idő alatt tesz meg, mint a személyvonat.* A gyorsvonat $15 + 11 = 26$ perccel később halad át az AB távolság felezőpontján, mint a személyvonat. A gyorsvonat 5 km-enként hoz be 4 perc időhátrányt, vagyis $\frac{26}{4} \cdot 5$ km után hozza be a 26 percet. Tehát AB felezőpontjának és a C-nek a távolsága 32,5 km, s így $BC = 32{,}5 - 5 = 27{,}5$ km.

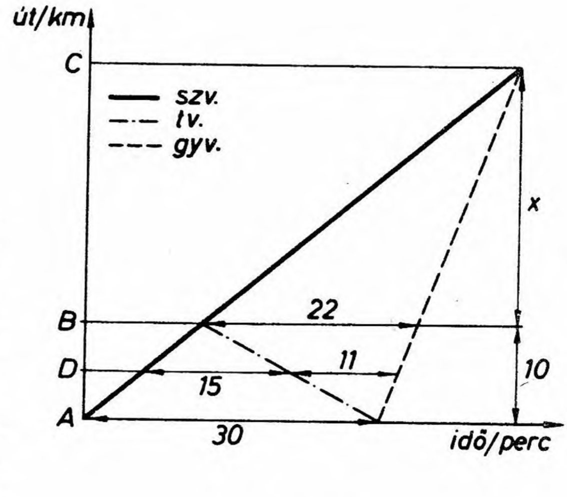
III. Megoldás

A feladat különösen alkalmas arra, hogy a grafikus megoldás előnyeit, áttekinthetőségét megmutassuk.

A koordináta-rendszer egyik tengelyén az időt, másik tengelyén az AC pályaszakaszt tüntetjük fel. A diák helyzetét a D pont jelöli. A feladat szövegét az ábrára közvetlenül vihetjük át, s a megoldást geometriailag vezethetjük le. Mivel D az AB szakasz felezőpontja, a megfelelő háromszögekre alkalmazhatjuk a középvonaltételt *(2. ábra)*.

Két háromszög hasonlóságából leolvashatjuk, hogy

$$\frac{x}{10+x} = \frac{22}{30}; \quad x = 27{,}5.$$



2. ábra

10. Egy teherautó éjfélkor indult A városból B városba, egy személyautó pedig t_1 órakor B-ből A-ba (ugyanazon az útvonalon). t_2 órakor találkoztak. A személyautó r órával később ért célba, mint a teherautó. Dolguk végeztével visszaindultak, t_3 órakor ismét találkoztak, végül egyszerre érkeztek haza. Hány órakor érkeztek meg? Numerikus adatok: $t_1 = 2^h 40^m$, $t_2 = 4^h$, $r = 0^h 40^m$, $t_3 = 14^h$.

Megoldás

Tételezzük fel, hogy a járművek sebessége állandó, és legyen a tehergépkocsi sebessége v, a személygépkocsi sebessége V. A hazaérkezés közös időpontját jelöljük x-szel.

Az első találkozásig a tehergépkocsi vt_2, a személygépkocsi $V(t_2-t_1)$ utat tett meg, és ekkor mindegyik előtt annyi út állt, mint amennyit a másik már megtett.

A tehergépkocsi a hátralevő útját $\frac{V(t_2-t_1)}{v}$ *idő, a személygépkocsi* $\frac{vt_2}{V}$ *idő alatt teszi meg*, de ez utóbbi r órával később ér célba, ezért

$$\frac{V(t_2-t_1)}{v}+r=\frac{vt_2}{V}.$$

Ezt a $\frac{v}{V}$ hányadosra mint ismeretlenre rendezve, a

$$t_2\left(\frac{v}{V}\right)^2-r\left(\frac{v}{V}\right)-(t_2-t_1)=0$$

egyenlethez jutunk, amelynek pozitív gyöke:

$$\frac{v}{V}=\frac{1}{2t_2}\left(r+\sqrt{r^2+4t_2(t_2-t_1)}\right).$$

(A $t_2>t_1>0$, tehát a gyök valós lesz.)

A visszaindulástól a második találkozásig a tehergépkocsi a személygépkocsi előtt álló $V(x-t_3)$ *utat tette meg*. Ehhez $\frac{V(x-t_3)}{v}$ időre volt szüksége. Hasonlóan a személygépkocsi a találkozás előtt $\frac{v(x-t_3)}{V}$ idővel indult vissza. *Ennek a két időnek a különbsége egyben az egész út megtételéhez szükséges idők különbsége is.* Az odamenetre vonatkozó adatok szerint ez az időkülönbség t_1-r, azaz

$$\frac{V(x-t_3)}{v}-\frac{v(x-t_3)}{V}=t_1-r.$$

Innen $\frac{v}{V}$ ismeretében x kiszámítható, a megoldóképletet nem írjuk fel.

A numerikus adatokkal $\frac{v}{V}=\frac{2}{3}$ és $x=16\frac{2}{5}$ óra, azaz a két gépkocsi 16 óra 24 perckor ért haza.

Megjegyzés

A grafikus módszer most is nagyon áttekinthetővé teszi a viszonyokat, a számolásban azonban kevesebbet segít, mint az előbb.

11. Határozzuk meg az x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5 ismeretlenek összes olyan értékrendszerét, melyek kielégítik az

$$(1) \quad x_5+x_2=yx_1 \qquad (4) \quad x_3+x_5=yx_4$$
$$(2) \quad x_1+x_3=yx_2 \qquad (5) \quad x_4+x_1=yx_5$$
$$(3) \quad x_2+x_4=yx_3$$

egyenletrendszert, ahol y paramétert jelöl.

Megoldás

Egyszerűen kifejezhetjük x_1-gyel és x_2-vel a többi ismeretlent; először az (1)-ből x_5-öt, (2)-ből x_3-at, majd ezek felhasználásával (3)-ból x_4-et:

$$(1a) \qquad x_5=yx_1-x_2,$$

$$(2a) \qquad x_3=-x_1+yx_2,$$

$$(6) \qquad x_4=-yx_1+(y^2-1)x_2.$$

A nyert kifejezéseket (4)-be és (5)-be beírjuk, és rendezzük az egyenleteket:

$$(y-1)(x_1+x_2)+y^2x_1-y(y^2-1)x_2=$$
$$=(y^2+y-1)x_1+(y-1)[1-y(y+1)]x_2=0,$$
$$(1-y)x_1+(y^2-1)x_2-y^2x_1+yx_2=(1-y-y^2)x_1+(y^2+y-1)x_2=0,$$

azaz

$$(7) \qquad (y^2+y-1)[x_1-(y-1)x_2]=0,$$

$$(8) \qquad (y^2+y-1)(-x_1+x_2)=0.$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor

$$(9) \qquad y^2+y-1\neq 0.$$

Ekkor

$$(7a) \qquad x_1-(y-1)x_2=0,$$

$$(8a) \qquad x_1-x_2=0;$$

azaz

$$(10) \qquad x_1=x_2,$$

$$(11) \qquad (y-2)x_1=0.$$

Ebből, ha még $y\neq 2$ is teljesül, (1*a*), (2*a*) és (6) alapján következik, hogy

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0.$$

Ez nyilván kielégíti az (1)—(5) egyenleteket.

$y=2$ esetén — amikor (9) is teljesül — (11)-et kielégíti bármely x_1 szá
Ekkor (10), (1*a*), (2*a*) és (6)-ból

$$x_2=x_3=x_4=x_5=x_1 \text{ adódik},$$

és ez $y=2$ mellett tetszés szerinti x_1 értékre kielégíti az (1)—(5) egyenletren szert.

Ha

(12) $$y^2+y-1=0,$$

vagyis y az

$$\eta_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{és} \quad \eta_2=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

számok valamelyikével egyenlő, akkor a (7), (8) egyenletrendszert tetszés szeri x_1, x_2 számpár kielégíti, a további három ismeretlen megfelelő értékét pedig (1*a*), (2*a*), illetve a (6) állítja elő. Mivel a (12) egyenlet gyökeire

$$\eta_i^2-1=-\eta_i \quad (i=1,2),$$

a megoldás:

(13) $$x_1;\ x_2;\ x_3=-x_1+\eta_i x_2;\quad x_4=-\eta_i(x_1+x_2);\quad x_5=\eta_i x_1-x_2.$$

A behelyettesítés mutatja, hogy bármely (13) értékrendszer kielégíti az ad egyenletrendszert.

Összefoglalva: ha az y paraméter értéke különbözik 2-től, η_1-től és η_2-t akkor a rendszer egyetlen megoldása

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0.$$

Ha $y=2$, akkor minden $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=u$ értékrendszer megoldás (u t szés szerinti szám).

Ha pedig y olyan η számmal egyenlő, melyre $\eta^2+\eta-1=0$, akkor minc olyan $x_1=u$; $x_2=v$; $x_3=-u+\eta v$; $x_4=-\eta(u+v)$; $x_5=\eta u-v$ értékrends megoldás, melyben u, v tetszés szerinti számok. (Ez természetesen $v=u$ esetér különbözik az $y=2$ esettől.) *(5. jegyzet)*

12. Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=0\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer együtthatóiról a következőket tudjuk:

a) a_{11}, a_{22}, a_{33} mindegyike pozitív,

b) a többi együttható mind negatív,

c) minden egyes egyenletben az együtthatók összege pozitív.

Bizonyítsuk be, hogy az adott egyenletrendszer egyetlen megoldása:

$$x_1=x_2=x_3=0.$$

Megoldás

Legyen az egyenletrendszer egy megoldása x_1, x_2, x_3, és legyen például

$$|x_1|\geqq|x_2|,\qquad |x_1|\geqq|x_3|.$$

Ekkor az első egyenletből

$$\begin{aligned} |a_{11}x_1|=|-a_{12}x_2-a_{13}x_3|&\leqq|a_{12}|\cdot|x_2|+|a_{13}|\cdot|x_3|\leqq\\ &\leqq(|a_{12}|+|a_{13}|)\cdot|x_1|. \end{aligned}$$

A bal oldalon $|a_{11}|\cdot|x_1|$ áll, így átrendezve

$$(|a_{11}|-|a_{12}|-|a_{13}|)\cdot|x_1|\leqq 0.$$

Az első tényező az *a)* és *b)* feltétel szerint $(a_{11}+a_{12}+a_{13})$-mal egyenlő, és ez *c)* szerint pozitív, tehát $|x_1|$ nem lehet pozitív. Így $x_1=0$, amiből $x_2=x_3=0$ is következik.

Megjegyzés

1. Mutassuk meg, hogy a rendszer determinánsa nem lehet 0, azaz a determináns 3. sora nem lehet az 1. és 2. sor lineáris kombinációja. A *4—5. jegyzet* alapján így egy más típusú megoldáshoz juthatunk.

2. A feltételekből annyit használtunk ki, hogy az i-edik egyenletben az a_{ii} együttható abszolút értéke nagyobb, mint a többi együttható abszolút értékének az összege. A bizonyítás mutatja, hogy ha ez teljesül, és annyi egyenletünk van, ahány ismeretlen, akkor a rendszernek csak triviális megoldása létezik. Ezzel általánosítottuk feladatunkat *(5. jegyzet)*.

13. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} &\qquad\qquad\quad |a_1-a_2|x_2+|a_1-a_3|x_3+|a_1-a_4|x_4=1\\ &|a_2-a_1|x_1 \qquad\qquad\;\; +|a_2-a_3|x_3+|a_2-a_4|x_4=1\\ &|a_3-a_1|x_1+|a_3-a_2|x_2 \qquad\qquad\;\; +|a_3-a_4|x_4=1\\ &|a_4-a_1|x_1+|a_4-a_2|x_2+|a_4-a_3|x_3 \qquad\qquad\;\; =1,\end{aligned}$$

ahol a_1, a_2, a_3 és a_4 négy különböző adott valós számot jelent.

Megoldás

a) *A rendszert először a paraméterek $a_1<a_2<a_3<a_4$ nagyságviszonyának esetére oldjuk meg. A többi esetet erre fogjuk visszavezetni.*

(I) így alakul:

$$\begin{aligned} &(1) && (a_2-a_1)x_2+(a_3-a_1)x_3+(a_4-a_1)x_4=1,\\ &(2) && (a_2-a_1)x_1+(a_3-a_2)x_3+(a_4-a_2)x_4=1,\\ &(3) && (a_3-a_1)x_1+(a_3-a_2)x_2+(a_4-a_3)x_4=1,\\ &(4) && (a_4-a_1)x_1+(a_4-a_2)x_2+(a_4-a_3)x_3=1.\end{aligned}$$

Vonjuk ki (1), (2), (3) mindegyikét az utána álló egyenletből, továbbá adjuk össze az első és az utolsó egyenletet.

Alkalmas kiemelésekkel:

$$\begin{aligned} &(2)-(1) && (a_2-a_1)(x_1-x_2-x_3-x_4)=0,\\ &(3)-(2) && (a_3-a_2)(x_1+x_2-x_3-x_4)=0,\\ &(4)-(3) && (a_4-a_3)(x_1+x_2+x_3-x_4)=0,\\ &(1)+(4) && (a_4-a_1)(x_1+x_2+x_3+x_4)=2.\end{aligned}$$

Mivel az a_i paraméterek különbsége egyik egyenletben sem 0, mindegyik egyenletben oszthatunk velük:

$$\begin{aligned} &(5) && x_1-x_2-x_3-x_4=0,\\ &(6) && x_1+x_2-x_3-x_4=0,\\ &(7) && x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\ &(8) && x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{2}{a_4-a_1}.\end{aligned}$$

(6) és (5), valamint (7) és (6) különbségéből, továbbá (8) és (7) különbségéből, illetve (5) és (8) összegéből:

$$x_2=x_3=0, \quad x_4=x_1=\frac{1}{a_4-a_1}.$$

b) Legyen $a_h<a_i<a_j<a_k$, ahol h, i, j, k az 1, 2, 3, 4 indexek egy tetszés szerinti sorrendje. Az előre jelzett visszavezetést a következő helyettesítéssel hajtjuk végre:

Legyen

$$a_h=b_1, \quad a_i=b_2, \quad a_j=b_3, \quad a_k=b_4,$$
$$x_h=y_1, \quad x_i=y_2, \quad x_j=y_3, \quad x_k=y_4.$$

(I) h-adik egyenlete, a bal oldalon a tagok sorrendjét nem tekintve, így írható:

$$|a_h-a_i|\cdot x_i+|a_h-a_j|\cdot x_j+|a_h-a_k|\cdot x_k=1,$$

ezért helyére a következő lép:

$$|b_1-b_2|\cdot y_2+|b_1-b_3|\cdot y_3+|b_1-b_4|\cdot y_4=1,$$

ez pedig csak abban tér el (1)-től, hogy minden egyes a és x betű helyén b, illetve y áll, hiszen $b_1<b_2<b_3<b_4$ miatt minden együttható egyenlő az abszolút érték jelén belül álló különbség (-1)-szeresével. Hasonlóan (I)-nek i-edik, j-edik, k-adik egyenlete helyére rendre (2), (3), (4) lép, a betűk említett cseréjével, az indexek viszont mindenütt változatlanul maradnak.

Ezek szerint

$a_h<a_i<a_j<a_k$ esetén (I) megoldása:

$$x_h=x_k=\frac{1}{a_k-a_h}, \quad x_i=x_j=0.$$

14. Legyenek m és n adott pozitív számok. Oldjuk meg az $x^y=y^x$, $x^m=y^n$ egyenletrendszert.

Megoldás

Nyilván $x>0$, $y>0$ megoldásokat keresünk.
Emeljük az első egyenletet n-edik, a másodikat x-edik hatványra:

$$x^{ny}=y^{nx}, \quad x^{mx}=y^{nx}.$$

Összehasonlítva a kapott két egyenletet

$$x^{ny}=x^{mx}.$$

Tehát $x=1$, vagy $ny=mx$.

Ha $x=1$, akkor a kiindulási egyenletből következik, hogy $y=1$.

Ha $ny=mx$, akkor $m\neq n$ esetén ebből y-t kifejezve és behelyettesítve az eredeti második egyenletbe:

$$y=\frac{m}{n}x,\quad x^m=\left(\frac{m}{n}\right)^n x^n,\quad x^{m-n}=\left(\frac{m}{n}\right)^n,$$

így

$$x=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}} \quad \text{és} \quad y=\frac{m}{n}x=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}.$$

A kapott gyököket behelyettesítve az eredeti egyenletekbe:

$$x^y=\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}\right]^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}}=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}}=y^x,$$

$$x^m=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{mn}{m-n}}=y^n.$$

Ha $m=n$, akkor $y=x$ esetén mindig megoldást kapunk.

Más megoldási lehetőség: $x\neq 1$ esetén áttérhetünk logaritmusokra.

15. Állapítsuk meg két szám negyedik hatványainak összegét, ha e számok összege 10 és szorzata 4.

Megoldás

Jelölje a szóban forgó két számot x és y. Tudjuk, hogy $x+y=10$ és $xy=4$. *Fejezzük ki x^4+y^4 értékét $x+y$ és xy segítségével (19. jegyzet):*

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2=$$
$$=(10^2-2\cdot 4)^2-2\cdot 4^2=8432.$$

16. Megoldandó a következő egyenletrendszer:

$$x+xy+y+5=0$$
$$x^2y+xy^2+6=0.$$

Megoldás

A második egyenlet $xy(x+y)=-6$ alakban írható, ezért célszerűnek látszik az $u=x+y$, $v=xy$ helyettesítés (19. jegyzet).

Így az
$$u+v=-5$$
$$uv=-6$$

egyenletrendszerhez jutunk. A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti kapcsolat alapján u és v gyökei a

$$z^2+5z-6=0 \quad \text{egyenletnek.}$$

De $z^2+5z-6=(z+6)(z-1)=0$, s így

$$z_1=-6, \quad z_2=1, \quad \text{azaz}$$
$$u_1=-6, \quad v_1=1, \quad \text{illetve} \quad u_2=1, \quad v_2=-6.$$

Tehát $x+y=-6$ és $xy=1$; vagy $x+y=1$ és $xy=-6$, azaz x és y a

$$t^2+6t+1=0, \quad \text{illetve}$$
$$t^2-t-6=0 \quad \text{egyenletek gyökei.}$$

Az elsőből $\quad x_1=-3+2\sqrt{2}, \quad y_1=-3-2\sqrt{2};$ vagy

$$x_2=-3-2\sqrt{2}, \quad y_2=-3+2\sqrt{2}.$$

A másodikból $\quad x_3=3, \quad y_3=-2;$ vagy

$$x_4=-2, \quad y_4=3.$$

Az átalakítások egyenértékűségéből következik, hogy ezek megoldásai az eredeti egyenletrendszernek is. Erről egyébként helyettesítéssel is meggyőződhetünk.

17. Határozzuk meg az

$$(x+y)^4=6x^2y^2-215$$
$$xy(x^2+y^2)=-78$$

egyenletrendszer valós gyökeit.

Megoldás

Vezessük be a következő helyettesítést (19. jegyzet):

$$(x+y)^2=u, \quad xy=v.$$

Ekkor az egyenletrendszerünk

$$u^2-6v^2+215=0$$
$$v(u-2v)+78=uv-2v^2+78=0.$$

Az utóbbi egyenlet háromszorosát vonjuk le az elsőből:

$$u^2-3uv-19=0,$$
$$v=\frac{u^2-19}{3u}.$$

(Mivel $u=(x+y)^2$ — ahol x és y valósak —, és az eredeti egyenletrendszert $x=-y$ nem elégíti ki, ezért $u>0$.)

Behelyettesítve v értékét az $u^2-6v^2+215=0$ egyenletbe:

$$u^2-6\frac{u^4-38u^2+361}{9u^2}+215=0,$$

amiből

$$0=u^4+721u^2-722=(u^2-1)(u^2+722).$$

Innen a pozitív valós gyök: $u=1$; továbbá

$$v=\frac{u^2-19}{3u}=\frac{-18}{3}=-6.$$

Tehát $(x+y)^2=1$, $x+y=\pm 1$ és $xy=-6$.

x és y tehát gyökei a $t^2-t-6=(t-3)(t+2)=0$, illetve a

$z^2+z-6=(z+3)(z-2)=0$ egyenletnek.

A megoldások:

$$x_1=3;\quad x_2=-2;\quad x_3=-3;\quad x_4=2;$$
$$y_1=-2;\quad y_2=3;\quad y_3=2;\quad y_4=-3.$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy valamennyi kapott megoldás kielégíti az eredeti egyenletrendszert.

18. Állítsuk elő az összes olyan x_1, x_2, x_3, x_4 valós számnégyest, melynek bármely eleméhez hozzáadva a többi három szorzatát, összegül mindig 2-t kapunk.

I. megoldás

Csak egy olyan megoldás van, melyre $x_1=x_2=x_3=x_4=x$. Hiszen $0=x^3+$ $+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$, és $x^2+x+2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0.$

Ekkor tehát $x=1$.

Ha a számok között van különböző, akkor van olyan, amelyik legalább két másiktól különbözik. Válasszuk a sorszámozást úgy, hogy

(1) $$x_1 \neq x_2, \quad x_1 \neq x_3 \quad \textit{teljesüljön.}$$

Írjuk fel a követelményt x_1-ből és x_2-ből kiindulva, majd képezzük a két egyenlőség különbségét.

(2) $$x_1 + x_2x_3x_4 = 2, \quad x_2 + x_1x_3x_4 = 2;$$

(3) $$x_1 - x_2 + x_3x_4(x_2 - x_1) = (x_1 - x_2)(1 - x_3x_4) = 0.$$

Hasonlóan kapjuk x_1-ből és x_3-ból kiindulva, hogy

(4) $$(x_1 - x_3)(1 - x_2x_4) = 0.$$

Az (1) miatt ekkor (3)-ból és (4)-ből $x_3x_4 = 1$, és $x_2x_4 = 1$, ezért (2)-ből $x_1 + x_2 = 2$ és $x_1 + x_3 = 2$, tehát

$$x_2 = x_3.$$

Az x_4-ből kiindulva az $x_4 + x_1x_2x_3 = 2$ egyenletből x_1-et, x_3-at, x_4-et könnyen kiküszöbölhetjük, ha x_2-vel szorzunk:

$$x_2x_4 + x_1x_2^2x_3 = 1 + (2 - x_2)x_2^3 = 2x_2,$$

$$x_2^4 - 2x_2^3 + 2x_2 - 1 = 0,$$

$$x_2^4 - 1 - 2x_2(x_2^2 - 1) = (x_2^2 - 1)(x_2^2 + 1 - 2x_2) =$$
$$= (x_2 - 1)^3(x_2 + 1) = 0.$$

Innen vagy $x_2 = x_3 = 1$, $x_1 = 2 - x_2 = 1$, $x_4 = \frac{1}{x_2} = 1$, amit (1)-ben már kizártunk, vagy $x_2 = x_3 = -1$, $x_4 = \frac{1}{x_2} = -1$, $x_1 = 2 - x_2 = 3$, és ez valóban kielégíti a követelményeket.

II. megoldás

Vezessük be az $x_1x_2x_3x_4 = p$ jelölést. Ekkor egyenletrendszerünk a következő lesz *(19. jegyzet):*

$$x_i + \frac{p}{x_i} = 2, \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Az az eset, amikor az ismeretlenek közül egy egyenlő 0-val, ellentmondásra vezet. Valóban: ha $x_1 = 0$, akkor

$$x_2x_3x_4=2 \quad \text{és} \quad x_2=x_3=x_4=2$$

egyszerre nem állhat fenn.

Ily módon minden x_i kielégíti az $x^2-2x+p=0$ egyenletet. Ezért x_1, x_2, x_3, x_4 között csak két különböző lehet.

Vizsgáljuk meg a három esetet:

I.

$$x_1=x_2=x_3=x_4=m,$$
$$m+m^3=2.$$

Ezt az $m=1$ kielégíti, másrészt az $m+m^3$ függvény növekedése miatt nincs más megoldás.

II. Az ismeretlenek közül három egyenlő, a negyedik nem egyenlő velük.

Például:

$$x_1=x_2=x_3=m, \quad x_4=n.$$

Ekkor

$$m+m^2n=2,$$
$$n+m^3=2.$$

Az egyenleteket egymásból kivonva és rendezve az

$$(m-n)(1-m^2)=0$$

egyenletet kapjuk. Abban az esetben, amikor $m=n$ és $m=1$, a már ismert eredményhez jutunk.

Ha $m=-1$, akkor $n=3$ adódik, így a következő számnégyeshez jutunk:

$$(-1, \quad -1, \quad -1, \quad 3).$$

III.

$$x_1=x_2=m, \quad x_3=x_4=n.$$
$$m+mn^2=2,$$
$$n+nm^2=2.$$

Átrendezés után:

$$(m-n)(1-mn)=0.$$

$m=n$ új eredményt nem ad.

Legyen $mn=1$, akkor

$$m+n=2,$$
$$m=n=1,$$

itt sem kaptunk új eredményt.

A két megoldás tehát:

1. $x_1=x_2=x_3=x_4=1$,

2. x_1, x_2, x_3, x_4 közül három egyenlő -1-gyel, a negyedik egyenlő $+3$-mal.

Megjegyzés

A második megoldás nagyon szerencsésen használja fel az ismeretlenek szimmetrikus szerepét. Az első megoldásban viszont éppen a szimmetria megbontásával — nagyságrendi feltétellel — értünk célt.

19. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

(1) $x+y=a$; (2) $x^5+y^5=2a^5$.

Megoldás

Az a célunk, hogy az x^5+y^5 kifejezést $x+y=a$ és $xy=b$ polinomjává alakítsuk (19. jegyzet).

Könnyen ellenőrizhetjük az alábbi azonos átalakítás helyességét:

$$x^5+y^5=(x+y)[x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4]=$$
$$=(x+y)[(x+y)^4-5xy\{(x+y)^2-xy\}].$$

Ezért az (1), (2) egyenletrendszer ekvivalens a következő rendszerrel:

(1) $$x+y=a,$$

(3) $$xy=b,$$

(4) $$a[a^4-5b\{a^2-b\}]=2a^5.$$

Ha $a=0$, akkor az egyenletrendszert minden $x=-y$ feltételt teljesítő számpár kielégíti.

Ha $a\neq 0$, (4)-ből az alábbi — vele ekvivalens — egyenletet nyerjük:

(5) $$5b^2-5a^2b-a^4=0.$$

Ennek gyökei: $b_1=\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$ és $b_2=\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

Az (1), (3) rendszerből látható, hogy x és y a

(6) $$z^2-az+b=0$$

egyenlet valós gyökei.

(6)-nak akkor és csak akkor van valós gyöke, ha a diszkrimináns nem negatív:

(7) $$a^2-4b\geqq 0.$$

A (7) feltételt (5) gyökei közül csak $b_2=\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$ teljesíti. Ezzel (6) gyökei:

$$x_1=y_2=\frac{a}{2}+\frac{a}{10}\sqrt{30\sqrt{5}-25}=1{,}1487a,$$

$$y_1=x_2=\frac{a}{2}-\frac{a}{10}\sqrt{30\sqrt{5}-25}=-0{,}1487a.$$

Mivel ekvivalens rendszerek közvetítésével jutottunk a megoldáshoz, ezért ezek az eredeti (1), (2) rendszert is kielégítik.

20. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

(1) $$x^3+y^3=a;$$ (2) $$xy(x+y)=b.$$

Megoldás

Adjuk hozzá az első egyenlethez a második egyenlet 3-szorosát, ekkor a bal oldal $(x+y)^3$ *lesz (19. jegyzet)*. Ebből köbgyökvonással

(3) $$x+y=\sqrt[3]{a+3b},$$

majd ezt a második egyenletbe helyettesítve osztással

(4) $$xy=\frac{b}{\sqrt[3]{a+3b}};$$

feltéve, hogy $a+3b\neq 0$.

Feltételünk mellett $x+y$ és xy léteznek, és egyértelműen meghatározott értékek, mert a valós számok körében a köbgyökvonás mindig egyértelműen elvégezhető. Az {(1), (2)} és {(3), (4)} rendszer ekvivalens.

Az x és y a következő egyenlet két gyöke:

$$z^2-z\sqrt[3]{a+3b}+\frac{b}{\sqrt[3]{a+3b}}=0.$$

Innen

$$z_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}}\right).$$

Az x és y akkor valósak, ha a négyzetgyökjel alatt pozitív szám vagy 0 áll.

A négyzetgyök értéke 0, ha $a=b$ (és $a=b\neq 0$, különben $a+3b=0$ lenne), ekkor egy megoldás van:

$$x=y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{a+3b}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4a}.$$

A négyzetgyökjel alatti tört értéke akkor pozitív, ha $a-b>0$ és $a+3b>0$, vagy $a-b<0$ és $a+3b<0$.

Az első esetben, ha $b>0$, akkor $a+3b=a-b+4b>a-b$, tehát elég feltenni, hogy $a-b>0$; ha pedig $b\leqq 0$, akkor $a-b=a+3b-4b\geqq a+3b$, és így elég az utóbbi kifejezésről megkövetelni, hogy pozitív legyen.

Hasonló meggondolásokat alkalmazva a második esetben is, azt nyerjük, hogy x-re és y-ra két különböző valós érték adódik, ha

I.	$a-b>0$	és	$b>0$,
II.	$a+3b>0$	és	$b\leqq 0$,
III.	$a+3b<0$	és	$b\geqq 0$,
IV.	$a-b<0$	és	$b<0$.

Ha végül $a+3b=0$, akkor (3)-ból $x+y=0$. Ez a (2) egyenlettel csak úgy egyeztethető össze, ha $b=0$, de akkor $a=-3b=0$ is fennáll. Ekkor az egyenletrendszer $x^3+y^3=0$; $xy(x+y)=0$ alakot ölt, melynek minden x-re $y=-x$ választással megoldását kapjuk. Ha viszont $a+3b=0$, de $b\neq 0$, akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.

Visszafelé haladva megállapíthatjuk, hogy a megoldások valóban kielégítik az eredeti egyenletrendszert is.

21. Bizonyítandó, hogy ha $a+b+c=0$, akkor

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9. \tag{1}$$

Megoldás

A bizonyítandó összefüggés a következő alakba írható (feltesszük, hogy a, b, c egymástól és 0-tól különböznek):

$$3+\frac{c}{a-b}\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)+\frac{a}{b-c}\left(\frac{a-b}{c}+\frac{c-a}{b}\right)+\frac{b}{c-a}\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}\right)=9,$$

továbbá

$$6=\frac{c}{a-b}\left(\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}\right)+\frac{a}{b-c}\left(\frac{ab-b^2+c^2-ac}{bc}\right)+$$

$$+\frac{b}{c-a}\left(\frac{a^2-ab+bc-c^2}{ac}\right)=\frac{c}{a-b}\left(\frac{-(a+b)(a-b)+c(a-b)}{ab}\right)+$$

$$+\frac{a}{b-c}\left(\frac{-(b+c)(b-c)+a(b-c)}{bc}\right)+\frac{b}{c-a}\left(\frac{-(a+c)(c-a)+b(c-a)}{ac}\right)=$$

$$=\frac{c(-a-b+c)}{ab}+\frac{a(-b-c+a)}{bc}+\frac{b(-c-a+b)}{ac}=\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}.$$

Utoljára felhasználtuk a feladat feltételét: $-a-b=c$, $-b-c=a$, $-c-a=b$. Tehát azt kell igazolni, hogy

(2) $$3=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}.$$

Ez pedig igaz, mert feltételünk szerint $c=-(a+b)$, és így

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{a^3+b^3-(a+b)^3}{-ab(a+b)}=-\frac{a^3+b^3-3a^2b-3ab^2-a^3-b^3}{ab(a+b)}=$$

$$=\frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)}=3.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük, hiszen az átalakítások ekvivalensek voltak.

Megjegyzés

Könnyen igazolható a sokszor nagyon hasznos

(3) $$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

azonosság, amiből $a+b+c=0$ mellett (2) azonnal adódik. Ezzel kapcsolatban több érdekes feladat van [17] 1. kötetében (160—164. feladatok) *(19. jegyzet)*.

Megmutathatjuk, hogy ha a, b, c 0-tól és egymástól is különbözők, akkor az (1) egyenlőség egyenértékű a következővel

(4) $$(a+b+c)[(a+b+c)^2-4(ab+bc+ca)]=0.$$

Ebből az is látszik, hogy a feladat állítása nem megfordítható.

22. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$a=bz+cy,\quad b=cx+az,\quad c=ay+bx,$$

akkor

$$\frac{a^2}{1-x^2}=\frac{b^2}{1-y^2}=\frac{c^2}{1-z^2}.$$

I. megoldás

Először a bizonyítandó egyenlőség első részét igazoljuk, ezért z-t és c-t kiküszöböljük a feltételi egyenletekből.

Az első egyenletet a-val, a másodikat b-vel szorozva:

$$a^2=abz+cay,\quad b^2=cbx+abz.$$

A kettő különbsége:

$$a^2-b^2=c(ay-bx).$$

De $c=ay+bx$, így

$$a^2-b^2=(ay+bx)(ay-bx)=a^2y^2-b^2x^2,$$

ebből

(1) $$a^2(1-y^2)=b^2(1-x^2).$$

Ha $x^2\neq 1$, $y^2\neq 1$, akkor

$$\frac{a^2}{1-x^2}=\frac{b^2}{1-y^2}.$$

Hasonlóan kapjuk az

(2) $$a^2(1-z^2)=c^2(1-x^2)$$

egyenlőséget, és ebből

$$\frac{a^2}{1-x^2}=\frac{c^2}{1-z^2},$$

ha $x^2\neq 1$, és $z^2\neq 1$.

Végül vizsgáljuk meg a kizárt eseteket:

a) Figyelmen kívül hagyható az az eset, amikor a, b, c közül kettő is 0. Ekkor ugyanis a feltételekből adódik, hogy a harmadik is 0, s így a feladat semmitmondó.

Ha csak pl. $c=0$, akkor az első két egyenletből

$$z=\frac{a}{b}=\frac{b}{a},$$

azaz

$$z=\pm 1.$$

A harmadik egyenletből $y=-\frac{b}{a}x=\pm x$.

Ekkor tehát az első két tört egyenlő, a harmadik értelmetlen.

b) Ha a, b, c egyike sem 0, de pl. $x^2=1$, akkor (1) és (2)-ből következik, hogy $y^2=1$, $z^2=1$. Tehát a feladatban szereplő mindhárom tört értelmetlen.

II. megoldás (Vázlat)

Oldjuk meg a feltételi egyenletrendszert x, y, z-re, majd képezzük a bizonyítandó egyenlőségben szereplő törteket.

Az I. megoldás diszkussziójának *a)* pontját figyelembe véve feltehetjük, hogy a, b, c egyike sem 0. Az egyenleteket rendre a, b, c-vel szorozva az eredetivel ekvivalens rendszerhez jutunk

$$\begin{aligned} a^2 &= \phantom{bcx+{}} cay+abz, \\ b^2 &= bcx++abz, \\ c^2 &= bcx+cay. \end{aligned}$$

Innen

$$x=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}, \quad y=\frac{a^2-b^2+c^2}{2ac}, \quad z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab};$$

$$\frac{a^2}{1-x^2}=\frac{a^2}{(1+x)(1-x)}=\frac{4a^2b^2c^2}{[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]}=$$

$$=\frac{4a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}=\frac{b^2}{1-y^2}=\frac{c^2}{1-z^2}.$$

A törtek nincsenek értelmezve, ha $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=0$.

Megjegyzés

1. Mint a II. megoldásból is kitűnik, a feladat trigonometriai indítású: Legyenek a, b, c egy háromszög oldalai, x, y, z rendre a szemközti szögek cosinusai. Ebben az esetben a feltételi egyenletek azt a tényt fejezik ki, hogy két oldalt a harmadikra merőlegesen vetítve, a vetületek összege a harmadik oldallal egyenlő.

A bizonyítandó állítás viszont azt jelenti, hogy

$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha}=\frac{b^2}{\sin^2\beta}=\frac{c^2}{\sin^2\gamma},$$

ez pedig éppen a sinustétel.

A fenti eljárás tipikus példája az algebrai feladatok egy gyakori készítési módjának.

2. A II. megoldásból a *Hérón-képlet (54. jegyzet)* alkalmazásával az is kiderül, hogy (t a háromszög területe)

$$\frac{a^2}{1-x^2}=\frac{a^2}{\sin^2\alpha}=\frac{4a^2b^2c^2}{16t^2}.$$

Ez éppen a háromszög köré írt kör átmérőjének a négyzete.

23. Bizonyítsuk be, hogy ha α és β az $x^2+px+1=0$ egyenlet gyökei, továbbá γ és δ az $x^2+qx+1=0$ egyenlet gyökei, akkor

(1) $$(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2.$$

Megoldás

Használjuk fel a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket:

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=1;$$
$$\gamma+\delta=-q,\quad \gamma\delta=1.$$

Ezért

$$q^2-p^2=(\gamma+\delta)^2-(\alpha+\beta)^2=(\gamma^2+2+\delta^2)-(\alpha^2+2+\beta^2)=\gamma^2+\delta^2-\alpha^2-\beta^2;$$
$$[(\alpha-\gamma)(\beta+\delta)][(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)]=[\alpha\delta-\beta\gamma][\beta\delta-\alpha\gamma]=\delta^2-\beta^2-\alpha^2+\gamma^2.$$

Tehát (1) jobb és bal oldala egyenlő.

24. Határozzuk meg a b együtthatót a

(1) $$4x^4-11x^2+9x+b=0$$

egyenletben úgy, hogy legyen az egyenletnek két különböző gyöke, amelyek összege -1.

I. megoldás

Legyen az x_1, x_2 *különböző gyökök összege* (-1). *Helyettesítsük be ezeket* (1)-be:

(2) $$4x_1^4-11x_1^2+9x_1+b=0,$$

(3) $$4x_2^4-11x_2^2+9x_2+b=0.$$

E két egyenlet különbsége

$$4(x_1^4-x_2^4)-11(x_1^2-x_2^2)+9(x_1-x_2)=0,$$

melyet $(x_1-x_2)\neq 0$-val osztva és az $x_1+x_2=-1$ értéket behelyettesítve, rendre az

$$x_1^2+x_2^2=5; \quad (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5; \quad x_1x_2=-2$$

egyenletet kapjuk.

Tehát x_1 és x_2 az alábbi másodfokú egyenlet gyökei:

$$x^2+x-2=0.$$

$x_1=1, x_2=-2$ valóban különböző gyökök, és (2), ill. (3)-ba behelyettesítve, $b=-2$ választással mindegyik kielégíti a feltételeket.

II. megoldás

Legyen $x_1+x_2=-1$ *és* $x_1x_2=c$. *Ekkor* (1) *bal oldala osztható az*

(4) $$(x-x_1)(x-x_2)=x^2+x+c$$

másodfokú polinommal. Az osztást az ismert algoritmussal végrehajtva, a hányados

$$h(x)=4x^2-4x+(-4c-7),$$

és a maradék

$$m(x)=(8c+16)x+[b+c(4c+7)].$$

Az előbbiek szerint $m(x)$ azonosan 0, tehát minden együttható 0 *(12—14. jegyzet):*

(5) $$8c+16=0,$$

(6) $$b+c(4c+7)=0.$$

(5)-ből $c=-2$, (6)-ból $b=-2$.

(4) gyökei ekkor $x_1=1$, $x_2=-2$, és ezek (1)-nek is gyökei.

Megjegyzés

A második megoldásból kiolvashatjuk, hogy az (1) egyenlet további gyökeit a következő másodfokú egyenletből határozhatjuk meg:

$$h(x) \equiv 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = 0$$
$$x_3 = x_4 = \frac{1}{2}.$$

25. Jelentsenek a, b, c komplex számokat. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben

(1) $$a+b+c=ab+bc+ca,$$

(2) $$a^2+b^2+c^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2, \quad \text{akkor}$$

(3) $$a^n+b^n+c^n=a^nb^n+b^nc^n+c^na^n,$$

minden a 3-mal nem osztható n természetes szám esetében.

I. megoldás

Emeljük négyzetre (1) *mindkét oldalát:*

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c).$$

(1) és (2) felhasználásával

$$2(a+b+c)=2abc(a+b+c).$$

Innen:

(4) $$(abc-1)(a+b+c)=0.$$

Tehát vagy (a) $abc=1$, *vagy* (b) $a+b+c=0$ *teljesül. Válasszuk szét ezeket az eseteket.*

(a) $$abc=1$$

Adjuk össze (1)-et és az (a) feltételt, ekkor

$$abc+a+b+c=ab+bc+ca+1.$$

Alakítsuk szorzattá a két oldal különbségét:

$$ab(c-1)-(a+b)(c-1)+(c-1)=0,$$
$$(c-1)(ab-a-b+1)=0,$$
$$(a-1)(b-1)(c-1)=0.$$

Tehát a, b, c közül valamelyik 1-gyel egyenlő, pl.: $c=1$, ekkor $ab=1$ (a) miatt teljesül.

Képezzük a következő egyenlőségeket:

$$a^n b^n + b^n c^n + c^n a^n = (1)^n + b^n + a^n;$$

$$a^n + b^n + c^n = a^n + b^n + 1.$$

Az (a) esetben tehát (3) minden n-re igaz ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

(b) $$a + b + c = ab + bc + ca = 0.$$

Ekkor

$$0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2$$

(1) és (b) miatt teljesül.

Az $a + b = -c$ négyzetreemelésével

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2.$$

Felhasználva az előbbi $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ egyenlőséget:

(5) $$c^2 = ab, \quad \text{és hasonlóan} \quad a^2 = bc, \quad b^2 = ca.$$

Így egy a^n, b^n, c^n-re *vonatkozó egyszerű képzési szabályhoz jutottunk.*

$$\begin{array}{llllll}
a^1 = a & a^2 = bc & a^3 = abc & a^4 = a^2bc & a^5 = ab^2c^2 & a^6 = a^2b^2c^2, \\
b^1 = b & b^2 = ca & b^3 = abc & b^4 = ab^2c & b^5 = a^2bc^2 & b^6 = a^2b^2c^2, \\
c^1 = c & c^2 = ab & c^3 = abc & c^4 = abc^2 & c^5 = a^2b^2c & c^6 = a^2b^2c^2.
\end{array}$$

A k-ra vonatkozó teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy

(6) $$\left\{\begin{array}{l}
\text{ha } n = 3k, \quad \text{akkor } a^n = b^n = c^n = a^k \cdot b^k \cdot c^k; \\
\text{ha } n = 3k + 1, \text{ akkor } a^n = a^{k+1}b^kc^k; \quad b^n = a^kb^{k+1}c^k; \\
\qquad c^n = a^kb^kc^{k+1}; \\
\text{ha } n = 3k + 2, \text{ akkor } a^n = a^kb^{k+1}c^{k+1}; \quad b^n = a^{k+1}b^kc^{k+1}; \\
\qquad c^n = a^{k+1}b^{k+1}c^k.
\end{array}\right.$$

($k = 0, 1, 2, \ldots$).

Vegyük észre, hogy a képzési szabály írható

$$a^{n+3} = a^3 \cdot a^n = abc \cdot a^n; \quad b^{n+3} = abc \cdot b^n; \quad c^{n+4} = abc \cdot c^n$$

alakban. Ennek felhasználásával az összes esetet egyszerre bizonyíthatjuk.

Képezzük a következő egyenlőségeket:

$$a^nb^n+b^nc^n+c^na^n=(1)^n+b^n+a^n;$$

$$a^n+b^n+c^n=a^n+b^n+1.$$

Az (a) esetben tehát (3) minden n-re igaz ($n=1, 2, 3, \ldots$).

(b) $$a+b+c=ab+bc+ca=0.$$

Ekkor

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=a^2+b^2+c^2$$

(1) és (b) miatt teljesül.

Az $a+b=-c$ négyzetreemelésével

$$a^2+2ab+b^2=c^2.$$

Felhasználva az előbbi $a^2+b^2+c^2=0$ egyenlőséget:

(5) $$c^2=ab, \quad \text{és hasonlóan}$$
$$a^2=bc,$$
$$b^2=ca.$$

Így egy a^n, b^n, c^n-re *vonatkozó egyszerű képzési szabályhoz jutottunk.*

$$\begin{array}{llllll}
a^1=a & a^2=bc & a^3=abc & a^4=a^2bc & a^5=ab^2c^2 & a^6=a^2b^2c^2, \\
b^1=b & b^2=ca & b^3=abc & b^4=ab^2c & b^5=a^2bc^2 & b^6=a^2b^2c^2, \\
c^1=c & c^2=ab & c^3=abc & c^4=abc^2 & c^5=a^2b^2c & c^6=a^2b^2c^2.
\end{array}$$

A k-ra vonatkozó teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy

(6) $$\left\{\begin{array}{l}
\text{ha } n=3k, \quad \text{akkor } a^n=b^n=c^n=a^k\cdot b^k\cdot c^k; \\
\text{ha } n=3k+1, \text{ akkor } a^n=a^{k+1}b^kc^k; \quad b^n=a^kb^{k+1}c^k; \\
\qquad c^n=a^kb^kc^{k+1}; \\
\text{ha } n=3k+2, \text{ akkor } a^n=a^kb^{k+1}c^{k+1}; \quad b^n=a^{k+1}b^kc^{k+1}; \\
\qquad c^n=a^{k+1}b^{k+1}c^k.
\end{array}\right.$$

($k=0, 1, 2, \ldots$).

Vegyük észre, hogy a képzési szabály írható

$$a^{n+3}=a^3\cdot a^n=abc\cdot a^n; \; b^{n+3}=abc\cdot b^n; \; c^{n+4}=abc\cdot c^n$$

alakban. Ennek felhasználásával az összes esetet egyszerre bizonyíthatjuk.

Ha $\quad a^{3k+r}=a^{k+u}b^{k+v}c^{k+w}, \quad u+v+w=r;$

akkor $\quad a^{3(k+1)+r}=a^3\cdot a^{3k+r}=abc\cdot a^{k+u}+b^{k+v}+c^{k+w}=$

$$=a^{(k+1)+u}\cdot b^{(k+1)+v}\cdot c^{(k+1)+w}.$$

Ugyanígy bizonyítunk b-re és c-re is.

Legyen először $n=3k+1$, ekkor a bizonyítandó egyenlőség (6) felhasználásával

$$a^{k+1}b^kc^k+a^kb^{k+1}c^k+a^kb^kc^{k+1}=a^{2k+1}b^{2k+1}c^{2k}+a^{2k+1}b^{2k}c^{2k+1}+a^{2k}b^{2k}c^{2k+1}$$

alakú. Az $a^kb^kc^k$, illetve $a^{2k}b^{2k}c^{2k}$ kiemelésével

$$a^kb^kc^k(a+b+c)=a^{2k}b^{2k}c^{2k}(ab+ac+bc).$$

A (b) feltétel miatt teljesül az egyenlőség.

Legyen másodszor $n=3k+2$, ekkor (3) a következő:

$$a^kb^{k+1}c^{k+1}+a^{k+1}b^kc^{k+1}+a^{k+1}b^{k+1}c^k=a^{2k+1}b^{2k+1}c^{2k+2}+a^{2k+1}b^{2k+2}c^{2k+1}+$$

$$+a^{2k+2}b^{2k+1}c^{2k+1}.$$

Kiemeléssel:

$$a^kb^kc^k(bc+ac+ab)=a^{2k+1}b^{2k+1}c^{2k+1}(a+b+c).$$

A (b) feltétel miatt az egyenlőség fennáll.

Ezzel a feladatot már megoldottuk.

Végül, legyen $n=3k$. Ekkor

$$a^nb^n+b^nc^n+c^na^n-a^n-b^n-c^n=$$

$$=3a^{2k}b^{2k}c^{2k}-3a^kb^kc^k=2(a^kb^kc^k)(a^kb^kc^k-1).$$

Ez akkor egyenlő 0-val, ha a, b, c valamelyike 0; vagy $(abc)^k=1$. Különben nem 0, és ekkor (3) sem teljesül.

Hátra van még annak megmutatása, hogy léteznek (1) és (2)-nek eleget tevő, de az utóbbi feltételeket nem teljesítő számok.

Megjegyzés

Ez a megoldási módszer a komplex számok elméletéből „szinte semmit" sem használt fel *(19. jegyzet)*. A most következő megoldás teljesebb és elegánsabb is, viszont mélyebb segédeszközöket használ fel. [Lényegében az algebra alaptételét és következményeit *(17., 18. jegyzet)*.]

II. megoldás

Legyenek a, b, c a

(*) $$0=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ac)x-abc$$

harmadfokú egyenlet gyökei (14. jegyzet).

Az $(ab+bc+ca)^2-(a+b+c)^2=(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^2+b^2+c^2)+$ $+2[abc(a+b+c)-(ab+bc+ca)]$ azonosságból következik, hogy az

(1) $a+b+c=ab+bc+ca$ (1) $a+b+c=ab+bc+ca$

és

(2) $a^2+b^2+c^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ (4) $(abc-1)(a+b+c)=0$

feltételek egyenértékűek: {(1), (2)}-ből {(1), (4)}; {(1), (4)}-ből {(1), (2)}következik.

Tehát (1) *és* (4) *figyelembevételével,* $a+b+c=ab+bc+ca=p$, *illetve* $abc=q$ *jelöléssel a* (*) *egyenlet*

(a) $$x^3-px^2+px-1=0,$$

illetve

(b) $$x^3-q=0$$

alakú lesz.

Válasszuk szét az előbbi eseteket.

(a) Az $x^3-px^2+px-1=0$ egyenlet egyik gyöke 1, tehát pl. $c=1$ és az $abc=1$ feltétel miatt $ab=1$ is teljesül.

Ekkor a bizonyítandó (3) egyenlőség bal oldala

$$a^n+b^n+c^n=a^n+b^n+1,$$

jobb oldala

$$a^nb^n+b^nc^n+c^nn^n=1+b^n+a^n.$$

A (3) egyenlőség tehát minden n-re teljesül.

(b) Az $x^3-q=0$ egyenlet gyökei, mint tudjuk

$$a=q_0,\quad b=q_0\cdot\varepsilon,\quad c=q_0\cdot\varepsilon^2;$$

ahol q_0 egy tetszőleges megoldás ($q_0^3=q$),

$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ harmadik egységgyök ($\varepsilon^3=1$). (Az a, b, c szerepe szimmetrikus.)

Képezzük (3) jobb és bal oldalának különbségét:

(**) $$(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n)-(a^n+b^n+c^n)=$$
$$=q_0^{2n}\varepsilon^n(1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n})-q_0^n(1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n})=$$
$$=q_0^n(1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n})(q_0^n\varepsilon^n-1).$$

Ha $n=3k$ alakú, akkor $\varepsilon^n=(\varepsilon^3)^k=1$, tehát $(a^nb^n+b^nc^n+c^na^n)-(a^n+b^n+c^n)=$ $3q_0^n(q_0^n-1)=3q^k(q^k-1)$. Ez akkor 0, ha $q=abc=0$, vagy $q^k=(abc)^k=1$.

Van olyan q, amelyre $q\neq 0$, $q^k\neq 1$. Egy ilyen q-t választva, a (b) egyenlet gyökei kielégítik az (1) és (2) feltételt, de (3) ezekre nem teljesül. *Ezzel az előző megoldás hézagát is kitöltöttük.*

Ha $n\neq 3k$ alakú, akkor $\varepsilon^n\neq 1$. A (**) a következőképpen folytatható:

$$q_0^n(1+\varepsilon^n+\varepsilon^{2n})(q_0^n\varepsilon^n-1)=q_0^n(q_0^n\varepsilon^n-1)\frac{\varepsilon^{3n}-1}{\varepsilon^n-1}=0,$$

hiszen $\varepsilon^{3n}=(\varepsilon^3)^n=1$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Valóban, ha $n\neq 3k$, akkor teljesül a (3) egyenlőség. Érdemes összehasonlítani a két megoldást.

26. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

(1) $$x+y+z=a$$
(2) $$x^2+y^2+z^2=b^2$$
(3) $$xy=z^2,$$

ahol a és b adott számok. Milyen feltételt kell az a és b számnak teljesítenie, hogy az egyenletrendszer megoldását adó x, y, z számok mind pozitívak és egymástól különbözők legyenek?

Megoldás

a) *Vonjuk ki (1) négyzetéből (2)-t, ekkor az ismeretlenek négyzetei kiesnek:*

$$2[xy+(x+y)z]=a^2-b^2.$$

Az $x+y$ és xy az (1), illetve (3) alapján z-vel kifejezhetők, és így z-re egyismeretlenes egyenletet kapunk: $2[z^2+(a-z)z]=a^2-b^2$, amiből

(4) $$z=\frac{a^2-b^2}{2a},$$

feltéve, hogy $a\neq 0$.
Most már ismerjük x és y szorzatát és összegét:

$$(5)\qquad xy=\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2,\quad x+y=a-z=\frac{a^2+b^2}{2a}.$$

x és y tehát a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$u^2-\left(\frac{a^2+b^2}{2a}\right)u+\left(\frac{a^2-b^2}{2a}\right)^2=0.$$

A diszkrimináns így alakítható:

$$D=\frac{1}{4a^2}[(a^2+b^2)^2-(2a^2-2b^2)^2]=\frac{1}{4a^2}(3a^2-b^2)(3b^2-a^2),$$

tehát

$$u_{1,2}=\frac{a^2+b^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}}{4a}.$$

Eszerint az egyenletrendszernek két megoldása van:

$$x_1=u_1,\quad y_1=u_2,\quad z_1=\frac{a^2-b^2}{2a};$$

$$x_2=u_2,\quad y_2=u_1,\quad z_2=z_1.$$

b) Az x, y, z számok — (1) szerint — csak úgy lehetnek pozitívak, ha $a>0$. Ezt feltéve z valóban pozitív, ha

$$(6)\qquad a^2-b^2>0,\quad \text{azaz}\quad a>|b|.$$

Ebből következik, hogy az (5) alatti mindkét kifejezés pozitív, ezért x, y akkor és csak akkor pozitívak, s egyszersmind különbözők is, ha D pozitív. Ha pedig x, y különbözők, akkor (3) szerint z egyikükkel sem egyenlő.

(6) miatt D első kéttagú kifejezése pozitív, így a második is az:

$$3b^2>a^2.$$

A keresett feltételek a következőkben foglalhatók össze:

$$a>0,\quad b^2<a^2<3b^2.$$

27. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$(1)\qquad x+y=a\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$$

$$(2)\qquad x^2+y^2=a\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2,$$

ahol a valós szám. a mely értékeire lesznek valósak a gyökök?

Megoldás

Először $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$-t, majd $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$-t határozzuk meg.

x, y-t nyilván a nem negatív számok között keressük.

$x^2+y^2=0$ akkor és csak akkor, ha $x=0$, $y=0$.

Az $x=y=0$ értékpár az (1), (2) rendszernek minden valós a számra megoldása.

A továbbiakban ezektől különböző megoldásokat keresünk, ezért feltehetjük, hogy

$$x^2+y^2>0.$$

(2)-ből következik, hogy $a>0$, (1)-ből $x+y>0$ miatt pedig

(3a) $$\sqrt{x}-\sqrt{y}>0.$$

Megoldásunk lényeges észrevétele a következő átalakítás: (1), (2) alapján

(4) $$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=(a^2-a)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=a(a-1)(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2.$$

A bal oldal nem negatív, tehát a jobb oldal sem. Ennek feltétele

(3b) $$a\geqq 1.$$

Az (1) és (4) egyenletek alapján

(5a) $$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=(x+y)-2\sqrt{xy}=a(\sqrt{x}-\sqrt{y})-2\sqrt{a(a-1)}(\sqrt{x}-\sqrt{y})=$$
$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})[a-\sqrt{2a(a-1)}].$$

(5a) és (3a) akkor és csak akkor teljesül, ha

(5) $$\sqrt{x}-\sqrt{y}=a-\sqrt{2a(a-1)}>0,$$

azaz $a^2>2a(a-1)$, $a(2-a)>0$; végül (3b)-t is figyelembe véve

(3) $$1\leqq a<2.$$

Az előbbihez hasonlóan — (1), (4) és (3) miatt —

(6a) $$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+y+2\sqrt{xy}=(a+\sqrt{2a(a-1)})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=$$
$$=(a+\sqrt{2a(a-1)})(a-\sqrt{2a(a-1)})=a(2-a)>0.$$

Tehát

(6) $$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a(2-a)}>0.$$

(6a) második sorából az is kiolvasható, hogy (3a) és (3b) mellett

$$\sqrt{a(2-a)}\geqq a-\sqrt{2a(a-1)},$$

az egyenlőség $a=1$ mellett teljesül. Ebből következik, hogy az (5), (6) rendszer megoldásai (3) mellett nem negatívak:

(7) $$\sqrt{x}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a(2-a)}-\sqrt{2a(a-1)}+a\right)>0,$$

(8) $$\sqrt{y}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a(2-a)}+\sqrt{2a(a-1)}-a\right)\geqq 0$$

(az egyenlőség (8)-ban akkor és csak akkor teljesül, ha $a=1$).

A (7) és (8) négyzetre emelésével kapjuk — egy kis „szépítő átalakítással", (5) és (6)-ban ugyanis $\sqrt{(a-\sqrt{2a(a-1)})}$ közös tényező —:

(9) $$x=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a(2-a)}\right)\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right)>0,$$

(10) $$y=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a(2-a)}\right)\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right)\geqq 0$$

($y=0$ feltétele $a=1$).

Most megmutatjuk, hogy (9) *és* (10) — *a* (3) *feltétel mellett* — *kielégíti az* (1), (2) *rendszert.* Ezt legkönnyebben a lépések ekvivalenciájának bizonyításával érjük el.

Azonnal látszik, hogy (9), (10) behelyettesítésével {(7), (8)}, {(5), (6)} és

(5a) $$x+y-2\sqrt{xy}=\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right)^2,$$

(6a) $$x+y+2\sqrt{xy}=\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right)\left(a+\sqrt{2a(a-1)}\right)$$

rendre teljesül.

A kettőt összeadva és 2-vel osztva — (5) alapján — (1)-hez jutunk:

(1) $$x+y=\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right)a=a\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right).$$

(6a)-ból (5a)-t kivonva, 2-vel osztva,

$$2\sqrt{xy}=\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right)\sqrt{2a(a-1)}.$$

Ha négyzetre emelünk és 2-vel osztunk — (5) alapján) —, (4)-hez jutunk:

(4) $$2xy=a(a-1)\left(a-\sqrt{2a(a-1)}\right)^2=a(a-1)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2.$$

(1) négyzetéből (4)-et kivonva megkapjuk (2)-t:

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2-a(a-1)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2=a\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2.$$

Ezzel a megoldást befejeztük.

28. Az ax^2 és az ax^2-ax polinomoknak — ahol a egész szám — megvan az a tulajdonságuk, hogy minden egész x-re az x^2 helyen felvett értékük egész többszöröse az x helyen felvett értéküknek. Keressünk további ilyen tulajdonságú, egész együtthatós, másodfokú polinomokat.

Megoldás

A feladat követelménye akkor (de nem biztos, hogy csak akkor) teljesül egy $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ egész együtthatós polinomra, ha $P(x^2)=ax^4+bx^2+c$ előállítható $P(x)$-nek és egy egész együtthatós $K(x)=px^2+qx+r$ polinomnak a szorzataként. (15. jegyzet)

Ha képezzük ezt a szorzatot, és ennek együtthatóit egyenlővé tesszük $P(x^2)$ együtthatóival, a következő egyenletrendszert kapjuk:

(1) $a(1-p)=0,$ (3) $b(1-q)-ar-cp=0,$

(2) $aq+bp=0,$ (4) $br+cq=0,$

(5) $c(1-r)=0.$

Öt egyenletet kaptunk az a, b, c, p, q, r egész számokra. Világos, hogy $a\neq 0$ tetszőlegesen választható, b-t és c-t a többszöröseként kapjuk (a rendszer a, b, c-ben homogén: ha valamely a_0, b_0, c_0 alkalmas p_0, q_0, r_0 mellett megoldás, akkor λa_0, λb_0, λc_0, p_0, q_0, r_0 is megoldás).

(1)-ből $p=1$, (5)-ből pedig
A) $c\neq 0$ esetén $r=1$, vagy
B) $c=0$.

A) esetben

(2)-ből és (4)-ből kivonással kapjuk, hogy

(6) $$(a-c)q=0.$$

a) Ha $q\neq 0$, tehát $a=c$, akkor (2)-ből $q=-\frac{b}{a}$, és így (3)-ból

(7) $$b+\frac{b^2}{a}-2a=\frac{1}{a}(b-a)(b+2a)=0.$$

Ez pedig $b=a$ vagy $b=-2a$ esetén teljesül, ezért
$q=-1$ illetve $q=2$.

b) (6) még úgy is teljesül, ha $q=0$, ekkor (2)-ből $b=0$, (3)-ból $c=-a$.
Eddig a feladatnak három megoldását kaptuk meg:

$P_1(x)=a(x^2+x+1)$ és hozzá $K_1(x)=x^2-x+1,$

$P_2(x)=a(x^2-2x+1)=a(x-1)^2$ $\qquad K_2(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2,$
$P_3(x)=a(x^2-1)=a(x-1)(x+1)$ $\qquad K_3(x)=x^2+1.$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezekre a követelmények valóban teljesülnek.

B) eset

a (4)-ből adódik:

(8) $$br=0.$$

a) $b=0$.

Ekkor (2) és (3)-ból $q=r=0$.
$P_4(x)=ax^2$. Ez az első megadott példa, $K_4(x)=x^2$.

b) $b\neq 0$, $r=0$.

(3)-ból $q=1$, (2)-ből $b=-a$.
$P_5(x)=a(x^2-x)$. Ez a másik megadott példa, $K_5(x)=x^2+x$.

Megjegyzés

A feladat nem mondja, hogy az összes megoldást keressük meg. Mégis állíthatjuk, hogy a fenti 5 megoldáson kívül nincs több, de ehhez „súlyos" (középiskolában nem tárgyalt) tételek kellenek *(15. jegyzet)*.

29. Van-e az x változónak olyan negyedfokú, 5 tagból álló kifejezése, melynek négyzete is 5 tagú? Határozzuk meg ezeket!

A feladat szövegében pontosabb lett volna a „kifejezés" helyett a „polinom" szó. Ez az általánosan elfogadott szakkifejezés.

A feladat meglehetősen sok próbálgatást igényel, ezek száma azonban csökkenthető a szimmetriaviszonyok ügyes felhasználásával.

A feladatban nincs arról szó, hogy az együtthatókat melyik számkörben keressük. Feltesszük, hogy az együtthatók komplex számok, ez még áttekinthetőbbé teszi megoldásunkat (17. jegyzet).

Megoldás

Ha $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ egy keresett tulajdonságú polinom, akkor $\alpha f(\beta x)$ is az. (α, β tetszőleges komplex számok.) Elég tehát pl. $\left(\alpha=\frac{1}{e},\ \beta=\sqrt[4]{\frac{e}{a}}\right.$ választása mellett — s ez komplex együtthatókra lehetséges$\left.\right)$ a

(1) $$g(x) \equiv x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + 1$$

alakú polinomokra szorítkozni.

(2) $$[g(x)]^2 \equiv x^8 + 2Ax^7 + (A^2 + 2B)x^6 + 2(AB + C)x^5 + \\ + (2 + 2AC + B^2)x^4 + 2(A + BC)x^3 + (2B + C^2)x^2 + 2Cx + 1.$$

A két-két szélső tag nem tűnhet el, hiszen $A \neq 0$, $C \neq 0$. $[g(x)]^2$ akkor lesz öttagú kifejezés, ha az

(3) $$A^2 + 2B; \quad 2(AB + C); \quad 2 + 2AC + B^2; \quad 2(A + BC); \quad 2B + C^2$$

együtthatók közül négy zérus, és csak egy nem zérus.

Az A és C együtthatók szerepe (3)-ban szimmetrikus, feltehetjük tehát, hogy (3)-ban az első két tag, valamint az utolsó két tag egyike zérus.

(4) $$A^2 + 2B = 0; \quad 2(AB + C) = 0$$

egyenletekből következik

(5) $$2B^2 = AC.$$

Az (5) feltétel mellett viszont a

(6) $$2(A + BC) = 0; \quad 2B + C^2 = 0$$

rendszer egyenletei egyenértékűek: bármelyikükből a másik következik. A (3) együtthatók közül tehát a négy szélső eltűnik, és ez egyenértékű a következő rendszerrel:

(7) $$2B^2 = AC; \quad AB + C = 0; \quad A + BC = 0.$$

(7) második és harmadik egyenletéből következik:

$$B = \pm 1, \quad A = \mp C, \quad \text{és} \quad AC = 2.$$

Így megkapjuk (7) megoldásait:

$$B = 1, \begin{cases} A = -C = i\sqrt{2} \\ A = -C = -i\sqrt{2}; \end{cases} \qquad B = -1, \begin{cases} A = C = \sqrt{2} \\ A = C = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

A (3) középső tagja: $2 + 2AC + B^2 = 7$, valóban nem zérus.

Lényegében tehát 4-féle megoldás van:

$$\alpha g_1(\beta x) = \alpha[(\beta x)^4 + \sqrt{2}(\beta x)^3 - (\beta x)^2 + \sqrt{2}(\beta x) + 1],$$

$$\alpha g_2(\beta x)=\alpha[(\beta x)^4-\sqrt{2}(\beta x)^3-(\beta x)^2-\sqrt{2}(\beta x)+1],$$
$$\alpha g_3(\beta x)=\alpha[(\beta x)^4+i\sqrt{2}(\beta x)^3+(\beta x)^2-i\sqrt{2}(\beta x)+1],$$
$$\alpha g_4(\beta x)=\alpha[(\beta x)^4-i\sqrt{2}(\beta x)^3+(\beta x)^2+i\sqrt{2}(\beta x)+1].$$

Még ezek is lényegében egy megoldást jelentenek. Az elsőbe β helyett rendre $(-\beta)$-t, $(i\cdot\beta)$-t, $(-i\cdot\beta)$-t téve, megkapjuk a másik hármat.

30. Jelentsen f olyan valós függvényt, amely minden valós x-re értelmezett, továbbá a következő tulajdonságú:

(1) $$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2},$$

ahol a adott pozitív szám.

I. Bizonyítsuk be, hogy az f függvény periodikus, azaz létezik olyan pozitív b szám, amelyre x minden értékére fennáll:

$$f(x+b)=f(x).$$

II. Adjunk konkrét példát (az azonosan állandótól különböző) ilyen f függvényre, ahol $a=1$.

Megoldás

I. *Megmutatjuk, hogy* $b=2a$. (Természetesen b-ként $2a$ minden egész számú többszöröse is választható.)

(1)-*ből következik a szimmetrikus alakú* (3) *összefüggés:*

(2) $$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2},$$

$$\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2=\frac{1}{4}-\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2,$$

(3) $$\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]^2=\frac{1}{4}.$$

Innen azonnal látszik, hogy $0\leqq f(x)\leqq 1$, sőt (1)-et x helyett $(x-a)$-ra alkalmazva,

(4) $$1\geqq f(x)=f[(x-a)+a]=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)+[f(x-a)]^2}\geqq\frac{1}{2}.$$

Ezután (3)-ból (4) és (2) felhasználásával [x helyett $(x+a)$-ra] következik

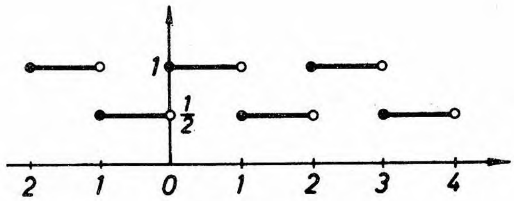
$$f(x)-\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}-\left[f(x+a)-\frac{1}{2}\right]^2}=f(x+2a)-\frac{1}{2},$$

(5) $$f(x+2a)=f(x).$$

II. Legyen $a=1$. (1) alapján

ha $f(x)=1$, akkor $f(x+1)=\frac{1}{2}$;

ha $f(x)=\frac{1}{2}$, akkor $f(x+1)=1$.



3. ábra

Ezután $f(x)$ értékeit pl. a következőképpen választhatjuk *(3. ábra)*

(6) $$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha } 2k \leqq x < 2k+1 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } 2k+1 \leqq x < 2k+2 \end{cases}$$

(k egész szám).

Megjegyzés

1. A $0 \leqq x < a$ intervallumon $f(x)$ értéke tetszőlegesen megadható, csak a már felhasznált $\frac{1}{2} \leqq f(x) \leqq 1$ feltételt kell kielégítenie.

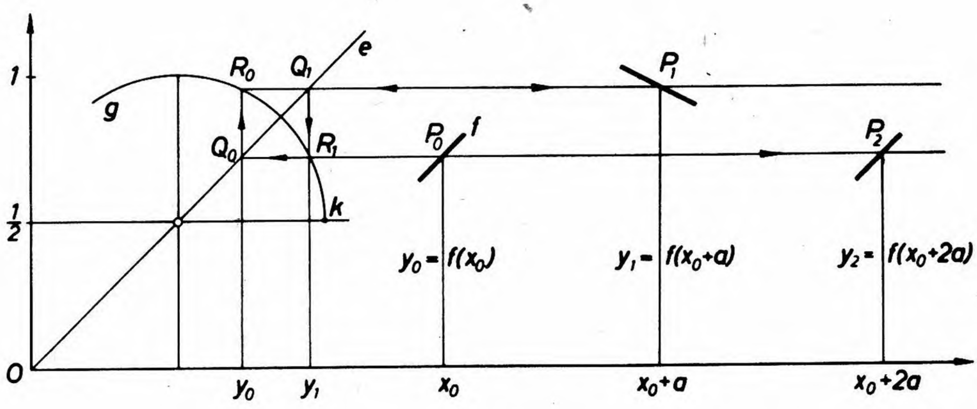
Ha az x_0 helyhez az $y_0=f(x_0)$ értéket rendeli a függvény, az (x_0+a) helyen felvett függvényérték már egyértelműen meghatározott:

$$f(x_0+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{y_0-y_0^2}.$$

A jobb oldal a

(7) $$g(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x-x^2}$$

függvénynek az y_0 helyen felvett értéke. A $g(x)$ függvénynek a képe az $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ pont körüli $\frac{1}{2}$ sugarú kör felső íve. Ezt — ha már ismerjük $f(x)$ grafikonját egy a hosszúságú intervallumban — felhasználhatjuk a grafikon pontjainak szerkesztésére a következő a hosszúságú intervallumban $\left(\frac{1}{2} \leqq y_0 \leqq 1\right.$ miatt elég a félkör jobb oldali k ívét megrajzolni, *4. ábra*$\left.\right)$.



4. ábra

Az $e(x)=x$ függvény segítségével az $y_0=f(x_0)$ függvényértéket átmásoljuk az x tengelyre, majd megszerkesztjük az $y_1=f(x_0+a)=g(y_0)$ függvényértéket ($P_0 \to Q_0 \to R_0 \to P_1$). Hasonlóan kapjuk az $y_2= =f(x_0+2a)=g(y_1)$ függvényértéket ($P_1 \to Q_1 \to R_1 \to P_2$).

A feladat I. állítása abból következik, hogy a $Q_0R_0Q_1R_1$ négyszög négyzet — hiszen a k ív szimmetrikus az e egyenesre —, és ezért $y_2=y_0$, azaz $f(x_0+2a)=f(x_0)$.

2. A függvények kompozíciójának $\bigcirc$-rel jelölt műveletét bevezetve *(23. jegyzet)* feladatunkat és az előző megjegyzést is új oldalról világíthatjuk meg. A *4. ábra* szerkesztését a *187. ábráéval* összevetve észrevehetjük a szoros kapcsolatot.

Jelölje α azt a függvényt, mely a valós számok halmazán van értelmezve, és $\alpha(x)=a+x$.

A g függvényt már értelmeztük (7)-ben a $g(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{x-x^2}$ előírással. Értelmezési tartománya $B\equiv[0, 1]$.

A feladat olyan f függvényről szól, melynek értelmezési tartománya a valós számok halmaza, s melyre az (1) előírás így fogalmazható:

(8) $$f\bigcirc\alpha\equiv g\bigcirc f.$$

Az I. állítás pedig a $\beta(x)=x+b$ függvény felhasználásával azt mondja ki, hogy létezik olyan b valós szám, melyre

(9) $$f\bigcirc\beta\equiv f.$$

A bizonyításban megmutattuk, hogy $b=2a$, azaz

$$f\circ\beta\equiv f\circ\alpha\circ\alpha\equiv g\circ f\circ\alpha\equiv g\circ g\circ f\equiv f.$$

A g függvényről csak azt használtuk ki, hogy értelmezési tartományának van olyan B^* része, hogy bármely $x\in B^*$ esetén teljesüljön

$$g(x)\in B^*,\quad g[g(x)]=x.$$

Így a feladatot általánosíthatjuk. Az előbbi tulajdonságú tetszőleges g függvényhez megadhatunk a (8) *követelményeinek megfelelő f függvényt, csak arra kell ügyelnünk, hogy a* $0\leqq x<a$ *intervallumon minden x-re* $f(x)\in B^*$ *legyen.*

31. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\begin{aligned} &ax_1^2+bx_1+c=x_2,\\ &ax_2^2+bx_2+c=x_3,\\ (1)\qquad &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c=x_n,\\ &ax_n^2+bx_n+c=x_1 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek, ahol a, b, c adott valós számok, és $a\neq 0$,

I. $(b-1)^2-4ac<0$ esetén nincs valós megoldása;
II. $(b-1)^2-4ac=0$ esetén egyetlen valós megoldása van;
III. $(b-1)^2-4ac>0$ esetén egynél több valós megoldása van.

Megoldás

Vegyük észre, hogy az I—III. *feltételek bal oldalán az*

$$ax^2+(b-1)x+c=0$$

egyenlet diszkriminánsa áll.

Vonjuk ki az (1) egyenletrendszer i-edik egyenletének mindkét oldalából x_i-t $(i=1, 2, \dots, n)$:

$$\begin{aligned} &ax_1^2+(b-1)x_1+c=x_2-x_1,\\ &ax_2^2+(b-1)x_2+c=x_3-x_2,\\ (1')\qquad &\dots\dots\dots\dots\dots\\ &ax_{n-1}^2+(b-1)x_{n-1}+c=x_n-x_{n-1},\\ &ax_n^2+(b-1)x_n+c=x_1-x_n. \end{aligned}$$

Az (1') rendszer i-edik egyenletének bal oldalán az

$$(2) \qquad f(x)=ax^2+(b-1)x+c=a\left[\left(x+\frac{b-1}{2a}\right)^2-\frac{(b-1)^2-4ac}{4a^2}\right]$$

másodfokú függvény x_i helyen felvett értéke áll.

Az I. feltevés mellett
$f(x)$ előjele állandó, és megegyezik a előjelével, hiszen (2) szögletes zárójelében pozitív kifejezés áll.

Ha $a>0$, akkor $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_{n-1}<x_n<x_1$;
ha $a<0$, akkor $x_1>x_2>x_3>\ldots>x_{n-1}>x_n>x_1$ következik (1')-ből.
Ilyen x_i számok pedig nincsenek.

A II. feltevés mellett

$f(x)$ egyetlen helyen, az $x=\dfrac{1-b}{2a}$ helyen 0 értéket vesz fel, minden más helyen a-val egyező előjelű.

Ha $a>0$, akkor $x_1\leqq x_2\leqq x_3\leqq\ldots\leqq x_{n-1}\leqq x_n\leqq x_1$;
ha $a<0$, akkor $x_1\geqq x_2\geqq x_3\geqq\ldots\geqq x_{n-1}\geqq x_n\geqq x_1$ következik (1')-ből. Bármelyikük csak úgy állhat fenn, ha

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{1-b}{2a}.$$

Ez az egyetlen megoldás.

A III. feltétel mellett
most már könnyen belátható, hogy az (1') rendszernek (és így (1)-nek is) van két olyan megoldása, melyben minden ismeretlen érték ugyanaz, éspedig az $f(x)=0$ egyenlet egyik, illetve másik gyöke:

$$x_1=x_2=x_3=\ldots=x_{n-1}=x_n=\frac{1-b\pm\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{2a}.$$

Tehát egynél több megoldás van.

Megjegyzés

1. A III. feltevés mellett az egyenletrendszernek kettőnél több megoldása is lehet.

Például $a=\dfrac{3}{2}$, $b=-\dfrac{19}{2}$, $c=17$ esetén $(b-1)^2-4ac=\dfrac{33}{4}>0$, és a fentiek szerinti

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{21\pm\sqrt{33}}{6}$$

megoldásokon kívül $n=3$ esetén az egyenletrendszert az

$$x_1=4, \quad x_2=3, \quad x_3=2$$

megoldás is kielégíti.

2. Az 1. megjegyzésnek megfelelően egymástól különböző x_1-, x_2-, x_3-at megadva, (1)-ből a, b, c-t meghatározva, olyan rendszert kaphatunk, melynek kettőnél több megoldása van ($n=3$).

Ha $n>3$; a fenti módszerrel a, b, c-re 3-nál több egyenletet kapunk, és ezt kellene a, b, c-re megoldani.

Úgy tűnik ezért, hogy $n>3$ mellett a (1′) rendszernek nem lehet kettőnél több megoldása. Ez azonban nem igaz.

3. *Bármely $n(n\geqq 2)$ természetes számhoz megadhatjuk az* (1) *egyenletrendszerben szereplő a, b, c együtthatót úgy, hogy a rendszernek legalább három megoldása legyen.*

Az

$$f_1(x)=f(x)=ax^2+bx+c$$

másodfokú függvényből kiindulva az

$$f_{i+1}(x)=f[f_i(x)] \qquad (i=1, 2, \ldots) \tag{3}$$

előírással $f_1, f_2, f_3, \ldots$ függvénysorozatot képezünk.

A függvények kompozíciójáról szóló *23. jegyzet*tel összevetve, írhatjuk:

$$f_{i+1}\equiv f\circ f_i. \tag{3'}$$

Ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok eleget tesznek (1)-nek, akkor

$$f(x_i)=f_i(x_1)=x_{i+1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ x_{n+1}=x_1), \tag{4}$$

és x_1 gyöke az

$$f_n(x)=x \tag{5}$$

egyenletnek. Megfordítva: az (5) *egyenlet tetszőleges gyökét véve x_1-nek, az $x_2, \ldots, x_n$ számokat pedig* (4) *alapján definiálva, az* (1) *rendszer egy megoldását kapjuk.*

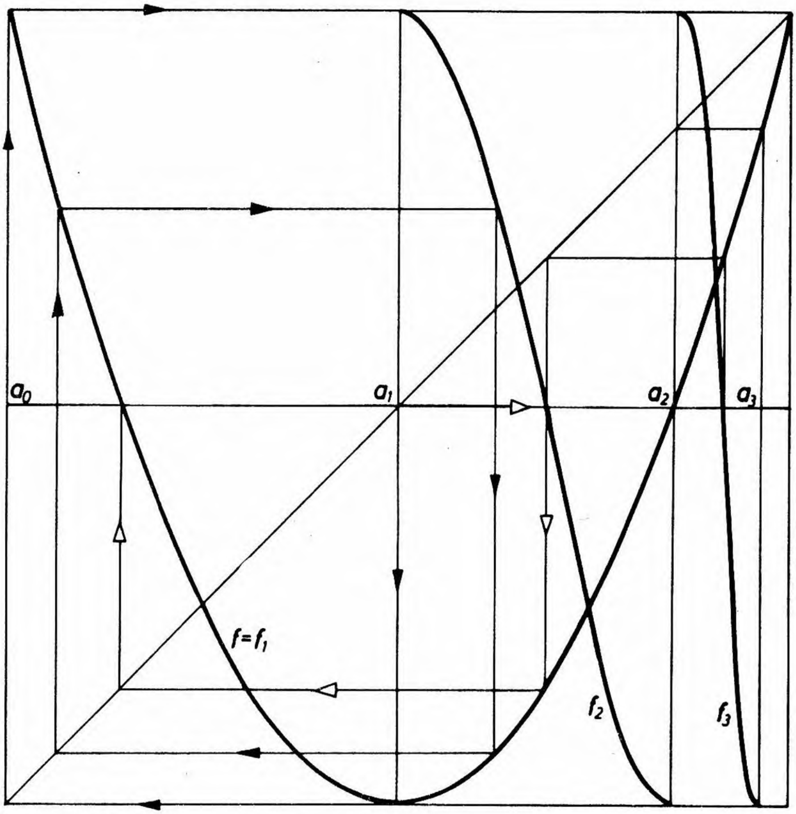
Az egyszerűsítés kedvéért az $f(x)$ függvényt olyan szakaszon vizsgáljuk, ahol értékkészlete és értelmezési tartománya azonos: ez a közös halmaz lesz a (3) rekurzióval definiált függvények értelmezési tartománya is. Emiatt választjuk az

(6) $$f(x)=f_1(x)=2x^2-1$$

függvényt, mely a $[-1, 1]$ szakaszt önmagára képezi le. *Megmutatjuk, hogy* (6)*-ból kiindulva, és* (3) *szerint definiálva az $f_n(x)$ függvényt, a kapott* (5) *egyenletnek legalább 3 gyöke van. Tehát $a=2$, $b=0$, $c=-1$, megfelelő együtthatók.*

Az (5) *egyenlet nyilvánvaló gyöke az $f(x)=x$*

egyenlet két gyöke, az $A=-\frac{1}{2}$ és a $B=1$ szám, így egyetlen további C gyök létezését kell kimutatnunk (5. ábra).



5. ábra

A (6) függvény a $[0, 1]$ zárt szakaszon folytonos, monoton növekedő függvény, egy-egy értelműen képezi le a $[0, 1]$ szakaszt a $[-1, 1]$ szakaszra.

Ezért definiálhatjuk az a_i sorozatot az

(7) $$a_0=-1, \quad f(a_{i+1})=a_i \qquad (i=0, 1, 2, \dots)$$

előírással. Érvényes a

(8) $$-1=a_0<a_1<a_2<\dots<a_i<\dots<1$$

egyenlőtlenség. Az $f(x)$ monotonitása miatt, ha

$$a_{i+1}\leqq x\leqq a_{i+2} \qquad (i=0, 1, 2, \dots), \text{ akkor}$$

$$f(a_{i+1})\leqq f(x)\leqq f(a_{i+2}), \quad \text{azaz} \quad a_i\leqq f(x)\leqq a_{i+1}.$$

Tekintsük most már a (3)-mal és (6)-tal definiált $f_n(x)$ függvényt az $[a_{n-1}, a_n]$ zárt szakaszon.

Az előbbiek alapján teljes indukcióval könnyen igazolhatjuk, hogy mivel az $[a_0, a_1]$ szakaszon $f_1(x)=f(x)$ monoton fogyó függvény, és az $[a_0, a_1]$ szakaszt az $[1, -1]$ szakaszra képezi, a (3) és (6) segítségével definiált $f_n(x)$ függvény monoton fogyó módon az $[a_{n-1}, a_n]$ szakaszt az $[1, -1]$ szakaszra képezi le.

Felhasználjuk *Bolzano* tételét *(25. jegyzet)*, miszerint az $a\leqq x\leqq b$ szakaszon értelmezett folytonos $f(x)$ függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz. Ebből következik, hogy az $f_n(x)$ függvénynek az $[a_n, a_{n+1}]$ szakasz valamely C pontjában felvett függvényértéke éppen C. (8) miatt C különbözik $A=-\frac{1}{2}$-től és $B=1$-től, ha $n\geqq 2$. C tehát az (5) egyenlet harmadik gyöke.

32. Valamely x szögre teljesül az

(1) $$a \cos^2 x+b \cos x+c=0$$

egyenlet. Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelyet $\cos 2x$ elégít ki. Alkalmazzuk eredményünket az $a=4$, $b=2$, $c=-1$ esetben.

I. megoldás

Az adott egyenlet ismeretlenét a keresett egyenlet ismeretlenével a következő azonosság kapcsolja össze:

(2) $$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Ha valamely x szögre (1) teljesül, akkor teljesül

$$-b \cos x = a \cos^2 x + c \quad \text{és}$$
$$b^2 \cos^2 x = a^2 \cos^4 x + 2\, ac \cos^2 x + c^2$$

is. De akkor (2) miatt teljesül , hogy

$$\frac{b^2-2ac}{2}(1+\cos 2x) = \frac{a^2}{4}(1+2\cos 2x + \cos^2 2x) + c^2.$$

Tehát $\cos 2x$ kielégíti az

(3) $$\frac{1}{4}a^2\cos^2 2x + \frac{1}{2}(a^2-b^2+2ac)\cos 2x + \frac{1}{4}(a^2+4ac+4c^2-2b^2) = 0$$

másodfokú egyenletet.

Az adott a, b, c számhármassal (1) és (3) így alakul:

(1*) $$4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0;$$

(3*) $$4\cos^2 2x + 2\cos 2x - 1 = 0.$$

Ezek szerint $\cos x$ és $\cos 2x$ ugyanannak az egyenletnek a gyökei. E meglepő ténynek az a magyarázata, hogy a két egyenlet közös $\frac{(-1\pm\sqrt{5})}{4}$ gyökeiből x értékei a $(-180°, 180°)$ intervallumban

$$-144°, \quad -72°, \quad 72°, \quad 144°.$$

$2x$ értékei a $(-360°, 360°)$, majd a $(-180°, 180°)$ intervallumban

$$-288°, \quad -144°, \quad 144°, \quad 288°,$$

azaz $$72°, \quad -144°, \quad 144°, \quad -72°.$$

A két gyöknégyes csak a felsorolás sorrendjében különbözik.

II. megoldás

Legyenek az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei z_1 és z_2. Olyan másodfokú egyenletet állítunk elő, melynek $w_1 = 2z_1^2-1$ és $w_2 = 2z_2^2-1$ a gyökei.

Legyen ez

(4) $$AX^2+BX+C=0.$$

A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggések alapján

$$-\frac{B}{A}=w_1+w_2=2(z_1^2+z_2^2)-2=2(z_1+z_2)^2-2z_1z_2-2$$

$$\frac{C}{A}=w_1\cdot w_2=4z_1^2z_2^2-2(z_1^2+z_2^2)+1=$$

$$=4z_1^2z_2^2-2(z_1+z_2)^2+4z_1z_2+1,$$

és mivel $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ és $z_1z_2=\frac{c}{a}$, azért

$$(5)\qquad \begin{cases} -\dfrac{B}{A}=\dfrac{2b^2}{a^2}-\dfrac{4c}{a}-2=\dfrac{2b^2-4ac-2a^2}{a^2}\,; \\ \dfrac{C}{A}=\dfrac{a^2+4ac+4c^2-2b^2}{a^2}. \end{cases}$$

A-t $\frac{a^2}{4}$-nek választva, (4)-ből $X=\cos 2x$ helyettesítéssel (3)-hoz jutunk. *(19. jegyzet.)*

Megjegyzés

1. Megvizsgálható, hogy (1)-nek mely a, b, c értékrendszerek mellett van valós megoldása, vagyis olyan, hogy a fenti jelölésekkel a

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

gyökök -1 és 1 közé esnek, e határokat is megengedve. Tudniillik, így van olyan x szög, amelyre (1) teljesül.

2. A feladat eredeti szövegezése (lásd a II. részben) nyilván nem pontos, hiszen nemcsak egy olyan másodfokú egyenlet van, melynek adott x mellett $\cos 2x$ gyöke (még ha a konstans szorzóktól el is tekintünk). Az olvasóra bízzuk a következő problémát: Fogalmazza meg a feladat szövegét úgy, hogy csupán a (3) legyen helyes megoldás.

33. Megoldandó a következő egyenlet:

$$(1)\qquad \sin x+\cos x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}.$$

Megoldás

Ekvivalens átalakításokat végzünk.

Csak azok az x értékek jöhetnek számításba, amelyekre

(*) $$1-\sin 2x \neq 0, \text{ azaz } x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k \text{ egész}).$$

A jobb oldalon

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x),$$
$$1-\sin 2x=\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x=(\cos x-\sin x)^2,$$

így egyenletünk

$$\sin x+\cos x=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}.$$

Rendezve:

(2) $$(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x-1)=0.$$

Tehát vagy $\sin x+\cos x=0$, vagy $\cos x-\sin x-1=0$.

Az elsőből:

(*a*) $$\operatorname{tg} x=-1, \text{ azaz } x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k \text{ egész}).$$

A másodikból:

$$1-\cos x=-\sin x,$$
$$2\sin^2\frac{x}{2}=-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$
$$\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0.$$

Így

$$\sin\frac{x}{2}=0, \qquad \frac{x}{2}=k\pi \quad (k \text{ egész}),$$

(*b*) $$x=2k\pi.$$

vagy

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=0,$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-1.$$
$$\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{4}+k\pi,$$

(*c*) $$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k \text{ egész}).$$

A kapott (*a*), (*b*), (*c*) értékek megoldásai a (2) egyenletnek. Ez pedig a (*) feltétel mellett egyenértékű a megoldandó (1) egyenlettel.

Az (*a*), (*b*), (*c*) megoldások között (*) nem fordul elő, tehát megoldásaink az (1) egyenlet gyökei.

Más lehetőség: A (2) egyenlet írható

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-1\right]=0$$

alakban is.

34. Oldjuk meg a következő egyenletet:

(1) $$\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1.$$

I. megoldás

Vigyük át a bal oldal harmadik tagját a jobb oldalra, és emeljük négyzetre mindkét oldalt:

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1-2\sin x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x.$$

A bal oldal első két tagjának összege 1, ezért az egyenlet a következő alakba rendezhető át:

$$\sin x\cos x(4-\sin x\cos x)=0.$$

Az utolsó tényező értéke legalább 3, tehát ez az egyenlet, és így az eredeti is csak akkor teljesülhet, ha $\sin x\cos x=0$. $\sin x\cos x$ értéke akkor és csak akkor 0, ha $\sin x$ és $\cos x$ egyike 0.

Ha $\sin x=0$, akkor $\cos x=\pm 1$,
ha $\cos x=0$, akkor $\sin x=\pm 1$.

(1)-be helyettesítve azonban

$\sin x=0$ esetén csak a $\cos x=1$,

illetve

$\cos x=0$ esetén csak a $\sin x=1$

értékpárt találjuk jónak.
A megfelelő szögértékek:

$$x=k\cdot 360^\circ$$
$$x=90^\circ+k\cdot 360^\circ,$$

ahol k egész szám.

II. megoldás (Vázlat)

Az $(1+\sin x)(1+\cos x)=2$ ekvivalens egyenletből látható, hogy $\sin x$ és $\cos x$ egyike sem lehet negatív. Viszont

$$\sin x+\cos x+\sin x\cos x \geqq \sin x+\cos x \geqq \sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Tehát (1) $\sin x=0$, $\cos x=1$; vagy $\cos x=0$, $\sin x=1$ mellett áll fenn.

35. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

I. megoldás

Minden szögfüggvényt $\sin x$ *-szel és* $\cos x$*-szel fejezünk ki:*

$$1+\cos x+\cos 2x=1+\cos x+2\cos^2 x-1=\cos x(2\cos x+1);$$
$$\sin x+\sin 2x=\sin x+2\sin x\cos x=\sin x(1+2\cos x);$$

$$\begin{aligned}\sin 3x&=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x=\\&=\sin x(2\cos^2 x-1)+2\sin x\cos^2 x=\sin x(4\cos^2 x-1)=\\&=\sin x(2\cos x-1)(2\cos x+1).\end{aligned}$$

Ezek figyelembevételével képezzük a megadott egyenlet két oldalának különbségét, és a közös tényezőt emeljük ki:

$$(1+2\cos x)[\sin x+\sin x(2\cos x-1)-\cos x]=$$
$$=(1+2\cos x)(2\sin x\cos x-\cos x)=(1+2\cos x)(2\sin x-1)\cos x.$$

Ez a kifejezés 0, ha $\cos x=-\frac{1}{2}$ vagy $\sin x=\frac{1}{2}$, vagy $\cos x=0$.

Az egyenlet megoldásai tehát:

$x=120°+k\cdot 360°$, $\quad x=240°+k\cdot 360°$,
$x=30°+k\cdot 360°$, $\quad x=150°+k\cdot 360°$,
$x=90°+k\cdot 180°$ $\quad$ (k egész szám).

A végzett átalakításokból azonnal kitűnik, hogy a fenti megoldások valóban kielégítik az eredeti egyenletet.

II. megoldás

Legyen n tetszőleges természetes szám. Megoldjuk a következő általánosabb egyenletet:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx=1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos (n-1)x.$$

Először mindkét oldalt egyszerűbb alakra hozzuk:

A bal oldal $2\sin\frac{x}{2}$-vel való szorzás után — az ismert $2\sin\alpha\sin\beta=$ $=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$ azonosság felhasználásával — a következőképpen alakítható át:

$$2\sin\frac{x}{2}\sin x+2\sin\frac{x}{2}\sin 2x+2\sin\frac{x}{2}\sin 3x+\ldots+$$
$$+2\sin\frac{x}{2}\sin nx=$$
$$=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{5}{2}x+\cos\frac{5}{2}x-\cos\frac{7}{2}x+\ldots+$$
$$+\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x.$$

A jobb oldalt szorozzuk $2\sin\frac{x}{2}$-vel — a $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+$ $+\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\beta-\alpha)$ azonosság felhasználásával —:

$$2\sin\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos x+2\sin\frac{x}{2}\cos 2x+\ldots+2\sin\frac{x}{2}\cos(n-1)x=$$
$$=2\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x+\ldots+$$
$$+\sin\frac{2n-1}{2}x-\sin\frac{2n-3}{2}x=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{2n-1}{2}x.$$

A kapott kifejezések — ismét a már említett azonosságok alkalmazásával — szorzattá alakíthatók:

$$\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x=2\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x,$$

illetve

$$\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{2n-1}{2}x=2\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n-1}{2}x.$$

Egyenletünk tehát a következő alakra egyszerűsödött:

$$\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x=\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{n-1}{2}x,$$

ahonnan

$$0=\sin\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{n+1}{2}x-\cos\frac{n-1}{2}x\right)=$$

$$=\sin\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{n}{2}x\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{n}{2}x\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\sin\frac{n}{2}x\left[\sin\frac{n}{2}x\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)-\cos\frac{n}{2}x\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\right]=$$

$$=\sin\frac{n}{2}x\left(\sin\frac{n}{2}x-\cos\frac{n}{2}x\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right).$$

Innen pedig

$$\frac{n}{2}x=k\cdot 180^\circ,\quad \text{azaz}\quad x=\frac{k\cdot 360^\circ}{n},$$

vagy

$$\frac{n}{2}x=45^\circ+k\cdot 180^\circ,\quad \text{azaz}\quad x=\frac{1}{n}(90^\circ+k\cdot 360^\circ),$$

vagy

$$\frac{x}{2}=45^\circ+k\cdot 180^\circ,\quad \text{azaz}\quad x=90^\circ+k\cdot 360^\circ\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Az átalakítás során $\sin\frac{x}{2}$-vel szoroztunk, ezért meg kell vizsgálni ennek a gyökeit, tehát az $x=k\cdot 360^\circ$ $(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ szögeket. Ezekre az eredeti egyenlet bal oldalán 0 áll, a jobb oldalon pedig n darab 1-es összege, ezek tehát az eredeti egyenletnek nem gyökei.

Az egyenletünk összes gyökei tehát

$$x=r\frac{360^\circ}{n}+k\cdot 360^\circ,\quad r=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;$$

$$x=\frac{90^\circ}{n}+s\frac{360^\circ}{n}+k\cdot 360^\circ,\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1;$$

$$x=90^\circ+k\cdot 360^\circ\quad (k \text{ egész}).$$

Feladatunkban $n=3$, a gyökök az első megoldás gyökeivel azonosak.

36. Oldjuk meg a következő egyenletet:

(1) $$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1.$$

I. megoldás

Ismeretes, hogy $\cos 2x=2\cos^2 x-1$. *Kifejezhetjük* $\cos 3x$*-et is* $\cos x$*-szel:*

(2) $\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1-\cos^2 x)\cos x = (4\cos^2 x - 3)\cos x.$

Ezekkel (1) így alakul:

$$2\cos^2 x(8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3) = 0.$$

Ez akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényező 0. Ha a második tényező nulla, akkor $\cos^2 x$-re másodfokú egyenletet kapunk.

$$8\cos^4 x - 10\cos^2 x + 3 = 0.$$

A másodfokú egyenlet két gyöke $\frac{3}{4}$ és $\frac{1}{2}$.

Tehát (1) megoldásaira $\cos^2 x = 0$ vagy $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, vagy $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ teljesül; azaz, ha

$$x_1 = 90° + n \cdot 180°, \quad x_2 = 30° + n \cdot 180°, \quad x_3 = 150° + n \cdot 180°,$$
$$x_4 = 45° + n \cdot 180°, \quad x_5 = 135° + n \cdot 180° \quad (n \text{ egész}).$$

(Felhasználtuk, hogy a $\cos^2 x$ függvény 180° szerint periodikus függvény.)

A [0°, 360°] intervallumban az egyenletnek 10 megoldása van. Az első három és az utolsó két megoldás összevonva egyszerűbben írható fel:

$$x = 30° + n \cdot 60°, \quad x = 45° + n \cdot 90°.$$

II. megoldás

Az egyenletet 0-ra redukálva, a bal oldalt a

$$\cos^2 w = \frac{1+\cos 2w}{2}$$

és a

$$2\cos u \cos v = \cos(u-v) + \cos(u+v)$$

azonosság ismételt alkalmazásával szorzattá alakíthatjuk:

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{2} + \cos^2 3x - 1 =$$
$$= \cos 3x \cos x + \cos^2 3x = \cos 3x(\cos x + \cos 3x) =$$
$$= 2\cos 3x \cos x \cos 2x = 0.$$

A gyökök a következő három egyenletből számíthatók:

$$\cos 3x = 0; \quad \cos x = 0; \quad \cos 2x = 0.$$
$$3x = 90° + n \cdot 180°; \quad x = 90° + n \cdot 180°; \quad 2x = 90° + n \cdot 180°.$$

Látható, hogy $\cos x = 0$ mellett $\cos 3x = 0$ is teljesül.
A megoldás ismét

$$x = 30° + n \cdot 60° \quad \text{és} \quad x = 45° + n \cdot 90°,$$

ahol n egész szám.

37. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\cos^n x - \sin^n x = 1, \tag{1}$$

ahol n tetszőlegesen adott természetes szám.

Megoldás

Tegyük fel először, hogy $n \geqq 2$. *A jobb oldal helyére* $\cos^2 x + \sin^2 x$*-et írva,* (1) *így alakítható:*

$$\sin^2 x(1 + \sin^{n-2} x) + \cos^2 x(1 - \cos^{n-2} x) = 0. \tag{2}$$

Mivel $n - 2 \geqq 0$, *a* $\sin^{n-2} x \geqq -1$, *és* $\cos^{n-2} x \leqq 1$, *ezért*

$$1 + \sin^{n-2} x \geqq 0,$$

és

$$1 - \cos^{n-2} x \geqq 0,$$

tehát (2) *bal oldalán egyik szorzat sem negatív. A* (2) *csak úgy teljesülhet, ha mindkét szorzat* 0*-val egyenlő:*

$$\sin^2 x(1 + \sin^{n-2} x) = 0 \tag{3}$$

és

$$\cos^2 x(1 - \cos^{n-2} x) = 0 \tag{4}$$

egyszerre fennáll.

A (3) két esetben teljesül, ha

a) $\sin^2 x = 0$, azaz $x = k\pi$ (k egész szám);

b) $\sin^{n-2} x = -1$, ennek csak páratlan n mellett van valós megoldása:

$$\sin x = -1, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi.$$

Az a) esetben $\cos x = \pm 1$, tehát (4) csak úgy teljesülhet, ha második tényezője 0.

Páros n-re $\cos^{n-2} x = 1$, ezért a második tényező mindig 0, páratlan n-re viszont csak akkor 0 a második tényező, ha $\cos x = +1$, azaz $x = 2k\pi$.

A b) esetben $\cos x=0$, tehát (4) teljesül.

Végül, ha $n=1$, *és* $\sqrt{2}$*-vel osztunk,* (1) *így írható:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\cos\frac{\pi}{4}\cos x-\sin\frac{\pi}{4}\sin x=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

amiből

$$\frac{\pi}{4}+x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi,$$

azaz

$$x=\begin{cases}2k\pi;\\ \frac{3}{2}\pi+2k\pi \quad (k \text{ egész}).\end{cases}$$

Ugyanarra az eredményre jutottunk, mint fentebb, amikor 1-nél nagyobb páratlan n a kitevő.

Foglaljuk össze eredményeinket:

Ha $n=2j$, akkor $x=k\pi$;

ha $n=2j-1$, akkor $x=2k\pi$ és $x=\left(\frac{3}{2}+2k\right)\pi$

a megoldások (j természetes szám, k egész számot jelöl).

38. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

(1) $$2\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2y=0$$

(2) $$2\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} 2x=0.$$

Megoldás

A keresett megoldásokra $\operatorname{tg}^2 x\neq 1$ és $\operatorname{tg}^2 y\neq 1$, *mert akkor* $\operatorname{tg} 2x$ *és* $\operatorname{tg} 2y$ *nincsen értelmezve. Ekvivalens átalakításokkal oldjuk meg rendszerünket. Alkalmazzuk a* $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ *azonosságot, ekkor a következő rendszerhez jutunk:*

(1') $$\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y};$$

(2') $$\operatorname{tg} y=\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x-1}.$$

Helyettesítéssel:

$$(3)\qquad \operatorname{tg} x=\frac{-\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\,\frac{1}{1-\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}}=\frac{-\operatorname{tg} x(1-\operatorname{tg}^2 x)}{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2-\operatorname{tg}^2 x}=$$

$$=\frac{(\operatorname{tg}^2 x-1)}{\operatorname{tg}^4 x-3\operatorname{tg}^2 x+1}\cdot \operatorname{tg} x.$$

Ez teljesül, ha $\operatorname{tg} x=0$, azaz

$$(4')\qquad x_1=0°+k\cdot 180° \qquad (k \text{ egész szám}),$$

és ekkor (2')-ből $\operatorname{tg} y=0$,

$$(4'')\qquad y_1=0°+l\cdot 180° \qquad (l \text{ egész szám}).$$

(3) teljesülésének másik lehetősége: $\operatorname{tg}^2 x-1=\operatorname{tg}^4 x-3\operatorname{tg}^2 x+1$, azaz

$$\operatorname{tg}^4 x-4\operatorname{tg}^2 x+2=0.$$

Ebből
$$\operatorname{tg}^2 x=2\pm\sqrt{2};$$

$$(5)\qquad \operatorname{tg} x=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2}}.$$

(A talált értékek mellett (3) jobb oldala értelmezve van, mert a nevező egyenlő a számlálóval, az pedig $1\pm\sqrt{2}\neq 0$.)

(5) négy megoldást jelent $\operatorname{tg} x$-re, ezek (2') szerint egyértelműen megadják $\operatorname{tg} y$ megfelelő értékét. Először az abszolút értéket számítjuk ki:

$$(6)\qquad |\operatorname{tg} y|=\left|\frac{\sqrt{2\pm\sqrt{2}}}{1\pm\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{\sqrt{(1\mp\sqrt{2})^2(2\pm\sqrt{2})}}{1-2}\right|=$$

$$=\sqrt{(3\mp 2\sqrt{2})(2\pm\sqrt{2})}=\sqrt{2\mp\sqrt{2}}.$$

(2')-ből látható, hogy $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{tg} y$ egyező előjelű, ha $\operatorname{tg}^2 x=2+\sqrt{2}>1$; $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{tg} y$ ellenkező előjelű, ha $\operatorname{tg}^2 x=2-\sqrt{2}<1$.

Numerikusan a $-90°$ és $90°$ közti értékekre szorítkozva, szögpercnyi pontossággal:

$$(7)\qquad \begin{aligned} x_2&=+61°\,35' & y_2&=+37°\,26'\\ x_3&=-61°\,35' & y_3&=-37°\,26'\\ x_4&=+37°\,26' & y_4&=-61°\,35'\\ x_5&=-37°\,26' & y_5&=+61°\,35'. \end{aligned}$$

Az általános megoldásban mindegyikhez még figyelembe kell venni, hogy a tg függvény 180° szerint periodikus.

Az adott egyenletrendszernek egy perióduson belül 5 megoldása van: (4′), (4″), (7).

39. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} 2y$$
$$\operatorname{tg} y = b \operatorname{tg} 2x,$$

ahol a, b valós paraméterek. Van-e bármely a, b értékpár esetén a triviális $x=y=0$-tól különböző megoldás?

Megoldás

A 38. feladat ennek a feladatnak speciális esete, amikor $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$. *Az ottani elinduláshoz hasonlóan, majd az itt érdektelen triviális megoldást már nem tárgyalva:*

(1) $$\operatorname{tg} y = \frac{2b \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},$$

(2) $$\operatorname{tg} x = \frac{2a \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y} = \operatorname{tg} x \cdot \frac{4ab(1-\operatorname{tg}^2 x)}{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2 - 4b^2 \operatorname{tg}^2 x},$$

$$(1-\operatorname{tg}^2 x)^2 - 4b^2 \operatorname{tg}^2 x = 4ab(1-\operatorname{tg}^2 x),$$

(3) $$\operatorname{tg}^4 x - 2(1-2ab+2b^2)\operatorname{tg}^2 x + (1-4ab) = 0,$$

hacsak $\operatorname{tg}^2 x \neq 1$, $\operatorname{tg}^2 y \neq 1$, *különben* $\operatorname{tg} 2x$ *és* $\operatorname{tg} 2y$ *nincs értelmezve.* Továbbá sem a, sem b nem lehet 0, különben a (2)-beli tört már eleve nem lehet 1, nincs a triviálistól különböző megoldás. Tegyük fel, hogy $ab \neq 0$.

(3) diszkriminánsának 1/4 része

$$(1-2ab+2b^2)^2 - (1-4ab) = 4b^2[1+(a-b)^2] \geqq 4b^2$$

mindig pozitív, tehát $z = \operatorname{tg}^2 x$-re mindig két különböző valós értéket kapunk:

(4) $$z_{1,2} = 1-2ab+2b^2 \pm 2b\sqrt{1+(a-b)^2}.$$

Ha z_1 és z_2 egyike sem pozitív, akkor a gyökök és együtthatók összefüggése szerint

(5) $$z_1 \cdot z_2 = 1-4ab \geqq 0,$$

(6) $$z_1+z_2=2-4ab+4b^2=(1-4ab)+(1+4b^2)\leqq 0$$

állna fenn, holott (5) teljesülése esetén (6) bal oldala pozitív. *Ezek szerint* (4) *legalább egy pozitív értéket ad, vagyis* tg x*-re mindig van a triviálistól különböző, valós megoldás.*

a) Ha $1-4ab\leqq 0$ akkor tg x-re két megoldás van, mert (4) másik értéke nem pozitív:

$$(\operatorname{tg} x)_{1,2}=\pm\sqrt{1-2ab+2b^2+2\,|\,b\,|\sqrt{1+(a-b)^2}}.$$

b) Ha $1-4ab>0$ akkor tg x-re további két megoldás van, mert ekkor (4) mindkét értéke pozitív:

$$(\operatorname{tg} x)_{3,4}=\pm\sqrt{1-2ab+2b^2-2\,|\,b\,|\sqrt{1+(a-b)^2}}.$$

Mindezen megoldásokban teljesül $\operatorname{tg}^2 x\neq 1$, mert (4)-ből

(7) $$\operatorname{tg}^2 x-1=2b(b-a\pm\sqrt{1+(b-a)^2}),$$

és itt egyik tényező sem 0. Eszerint tg y mindig kiszámítható (1)-ből.

tg x és tg y a $(-90°, 90°)$ intervallumban egyértelműen meghatározza x-et, y-t; egyébként a megoldások periódusa 180°.

Eredményünket a **38.** feladat $a=1/2$, $b=-1/2$ esetére alkalmazva, $1-4ab=$ $=2>0$, négy, a triviálistól különböző megoldás van, megegyezésben az ottani eredménnyel.

40. Legyen $\cos x+\cos y=a$ és $\sin x+\sin y=b$, ahol $a^2+b^2>0$. Fejezzük ki $\sin(x+y)$-t a-val és b-vel.

Megoldás

Tudjuk, hogy

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

Célszerű, ha ezt összehasonlítjuk a megadott kifejezések szorzatával:

$$ab=(\cos x+\cos y)(\sin x+\sin y)=\cos x\sin x+\cos y\sin y+\sin(x+y)=$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2y)+\sin(x+y).$$

Alkalmazzuk a következő azonosságot ($\alpha=2x$, $\beta=2y$ választással):

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(1) $\quad ab=\sin(x+y)+\sin(x+y)\cos(x-y)=[1+\cos(x-y)]\sin(x+y).$

A $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$ kifejezés fellép, ha a feltételekben szereplő egyenlőségek négyzetösszegét képezzük:

(2) $$a^2+b^2=(\cos^2 x+\sin^2 x)+(\cos^2 y+\sin^2 y)+2(\cos x\cos y+$$
$$+\sin x\sin y)=2[1+\cos(x-y)].$$

Tehát (2)-t (1)-be helyettesítve:

$$ab=\frac{a^2+b^2}{2}\sin(x+y),$$

és mivel

$$a^2+b^2\neq 0,$$

ezért

$$\sin(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

41. Bizonyítsuk be, hogy

(1) $$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}.$$

I. megoldás

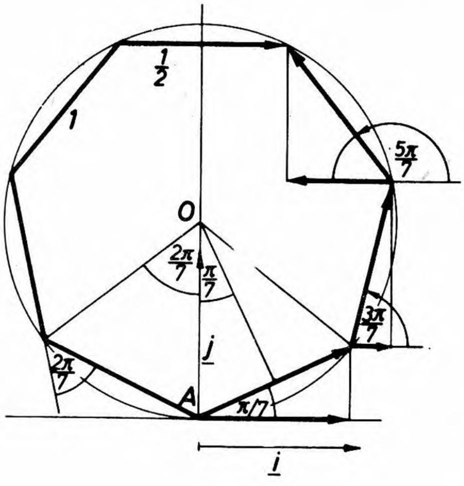
A bizonyítandó (1) *állítást átírhatjuk*

(2) $$\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$$

alakba, hiszen a $\cos(\pi-x)=-\cos x$ *azonosság miatt* $-\cos\frac{2\pi}{7}=\cos\frac{5\pi}{7}$.

Ezután a $\cos(x)$ *függvény definícióját alkalmazzuk:* Ha az **i** egységvektort x forgásszöggel elforgatva kapjuk az **e** egységvektort, akkor ennek **i** egyenesére történő merőleges vetülete a $\cos(x)\cdot\mathbf{i}$ vektor *(42. jegyzet).*

Az **i** *egységvektorral rendre* $\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}$ *szöget bezáró egységvektorokat fűzünk össze egy A pontból kiindulva (6. ábra).* Könnyű belátni, hogy így egy egységnyi oldalú szabályos hétszög oldalvektorait kapjuk, és a hétszög szimmetrikus az A-n áthaladó **i**-re merőleges egyenesre. A *6. ábrá*ról leolvasható, hogy



6. ábra

$$\cos\frac{\pi}{7}\,\mathbf{i}+\cos\frac{3\pi}{7}\,\mathbf{i}+\cos\frac{5\pi}{7}\,\mathbf{i}=\frac{1}{2}\,\mathbf{i},$$

ebből pedig következik a feladat állítása.

II. megoldás

A (2) *egyenlőség bal oldalát* $2\sin\frac{\pi}{7}$*-tel szorozzuk és osztjuk, majd a számlálóban alkalmazzuk a* $2\sin x\cos y=\sin(x+y)-\sin(y-x)$ *azonosságot, így sok tag kiesik.*

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}-\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{4\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{2},$$

hiszen a $\sin(\pi-x)=\sin x$ azonosság miatt $\sin\frac{6\pi}{7}=\sin\frac{\pi}{7}$.

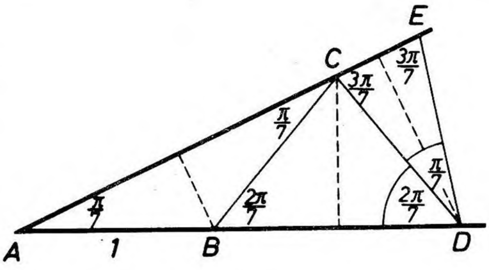
III. megoldás

Geometriai módszerrel igazoljuk az (1)*-gyel egyenértékű alábbi összefüggést* (*7. ábra*)*:*

$$(3)\qquad 2\cos\frac{\pi}{7}+2\cos\frac{3\pi}{7}=1+2\cos\frac{2\pi}{7}.$$

Az A csúcsú, $\frac{\pi}{7}$ *nagyságú szög szárain a B, C, D, E pontokat úgy vettük fel, hogy* $AB=BC=CD=DE=1$ *legyen.*

Az így nyert egyenlő szárú háromszögek alapon fekvő szögeit, valamint a



7. ábra

szárak metszéspontjánál levő külső szöget — mint az alapon fekvő szögek összegét — sorba kiszámítottuk *(7. ábra)*, végül a *CED* háromszög *CE* alapján fekvő szögei $\frac{3\pi}{7}$ nagyságúak, tehát a $CDE\sphericalangle = \frac{\pi}{7}$.

De akkor az *ADE* háromszög *D* és *E* csúcsánál levő szögek is egyenlők, és így $AD = AE$. Ez viszont éppen (3) helyességét igazolja, hiszen

$$AD = AB + BD = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{7}, \quad AE = AC + CE = 2\cos\frac{\pi}{7} + 2\cos\frac{3\pi}{7}.$$

Megjegyzés

1. A feladatnak nagy értéke, hogy több egyformán egyszerű és szép megoldása van. Mindhárom megoldás általánosítható a következő tétel bizonyítására:

Ha $\alpha = \frac{\pi}{2k+1}$ alakú szög ($k = 1, 2, 3, \ldots$), akkor

$$\cos\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos(2k-1)\alpha = \frac{1}{2}. \tag{4}$$

2. Ha $\alpha = \frac{\pi}{5}$, akkor (4) így alakul:

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

Ebből az összefüggésből — a $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ azonosság alapján — kiszámítható $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ és $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{5} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ is.

42. Bizonyítsuk be, hogy bármely n természetes számra és bármely $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; λ tetszés szerinti egész szám) valós számra érvényes a következő azonosság:

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x. \tag{1}$$

I. megoldás

Minden feltevés szerinti x-re (1) *két oldala értelmezve van. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.*

$n=1$ esetén az állítás helyes, ugyanis a $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ azonosság felhasználásával

$$(2) \qquad \frac{1}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x}{2\sin x \cos x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x.$$

Tegyük fel, hogy $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, j, j+1$; λ természetes szám), és fennáll az

$$(3) \qquad \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2^2 x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^j x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^j x$$

egyenlőség.

Írjuk továbbá (2) mindkét oldalán x helyére a $(2^j x)$-et:

$$(4) \qquad \frac{1}{\sin 2^{j+1} x} = \operatorname{ctg} 2^j x - \operatorname{ctg} 2^{j+1} x.$$

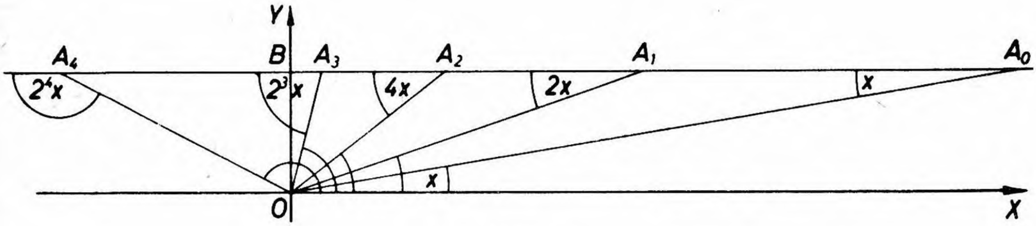
Itt feltevésünk szerint mind a két oldalnak van értelme. Mármost (3) és (4) összeadásával (1)-et kapjuk, de n helyén $j+1$-gyel, tehát (1) bármely n természetes számra igaz.

II. megoldás

Geometriai módszerrel bizonyítunk. A $0 < x < \frac{\pi}{2^n}$ *értékekre szorítkozunk. Mérjük föl az* $x, 2x, 4x, \ldots, 2^n x$ *forgásszögeket a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az O origó közös csúcsuk, az x tengely pozitív fele közös száruk legyen (8. ábra).*

Messe az $y=1$ egyenes (az origó körüli egységkör érintője a $B(0; 1)$ pontban) a szögek másik szárát rendre az $A_0, A_1, \ldots, A_n$ pontban. Ekkor, mint ismeretes, az A_i pont $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ abszcisszája $\operatorname{ctg} 2^i x$, tehát (1) jobb oldala az A_0A_n szakasz hosszát jelenti, egyszersmind az OA_nA_0 háromszög területének kétszeresét, továbbá az $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ pontok ebben a sorrendben vannak az A_0A_n szakaszon.

Az OA_i szakasz hossza viszont az OA_iB derékszögű háromszögből $\frac{1}{\sin 2^i x}$, az OA_i és OA_{i+1} félegyenesek közti szög:



8. ábra

$$2^{i+1}x-2^ix=2^ix,$$

így az OA_iA_{i+1} háromszög területének kétszerese:

$$OA_i\cdot OA_{i+1}\cdot \sin A_iOA_{i+1}\sphericalangle=$$
$$=\frac{1}{\sin 2^ix}\cdot\frac{1}{\sin 2^{i+1}x}\cdot\sin 2^ix=\frac{1}{\sin 2^{i+1}x}.$$

Tehát (1) bal oldalának tagjai rendre az $OA_0A_1, OA_1A_2, \ldots, OA_{n-1}A_n$ háromszögek területének kétszeresét jelentik, összegük pedig a feldarabolt OA_0A_n háromszög területének kétszerese. Ezzel (1)-et a $0<x<\frac{\pi}{2^n}$ feltétel mellett bebizonyítottuk.

43. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ jelentsenek valós állandókat, továbbá x jelentsen valós változót, végül legyen

(1) $$f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\frac{\cos(a_3+x)}{2^2}+\ldots+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x_1)=f(x_2)=0$, akkor $x_2-x_1=m\pi$, ahol m egész szám.

I. megoldás

A $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ *összegzési képlet alapján*

$$f(x)=\cos x\left(\cos a_1+\frac{\cos a_2}{2}+\frac{\cos a_3}{2^2}+\ldots+\frac{\cos a_n}{2^{n-1}}\right)-$$
$$-\sin x\left(\sin a_1+\frac{\sin a_2}{2}+\frac{\sin a_3}{2^2}+\ldots+\frac{\sin a_n}{2^{n-1}}\right)=$$

(2) $$=A\cos x-B\sin x.$$

Az A és B kifejezések nem mindegyike 0, *mert f*(*x*) *nem azonosan* 0. Ugyanis az $x=-a_1$ helyen (1) szerint

$$f(-a_1)=1+\frac{\cos(a_2-a_1)}{2}\frac{\cos(a_3-a_1)}{2^2}+\ldots+\frac{\cos(a_n-a_1)}{2^{n-1}},$$

és itt minden számlálóra érvényes, hogy $\cos(a_i - a_1) \geqq -1$ $(i=2, 3, \ldots, n)$, ezért

$$f(-a_1) \geqq 1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} > 0.$$

Ha $B \neq 0$, akkor $f(x)$ gyökeire (2)-ből

(3) $$\operatorname{tg} x = \frac{A}{B}.$$

Ha $A \neq 0$, akkor $f(x)$ gyökeire (2)-ből

(4) $$\operatorname{ctg} x = \frac{B}{A}.$$

A $\operatorname{tg} x$ és $\operatorname{ctg} x$ függvény is π szerint periodikus, és egy perióduson belül minden valós értéket egyszer vesz fel, ezért (3)-nak illetve (4)-nek van x_1 gyöke, s minden más x_2 gyök

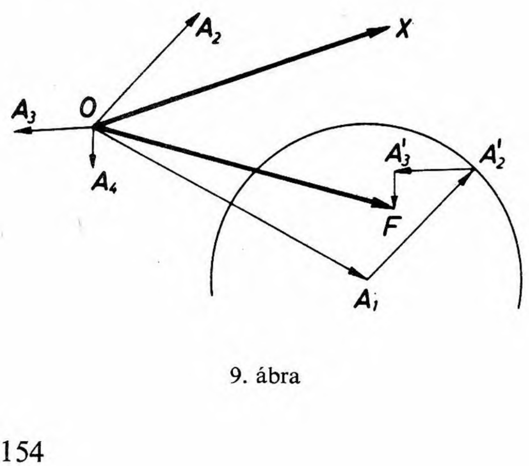
$$x_2 = x_1 + m\pi$$

alakú, ahol m egész szám.

Ebből adódik, hogy (1)-nek is van gyöke, s a gyökökre teljesül a feladat állítása.

II. megoldás

Válasszunk egy O kezdőpontot és egy OX félegyenest. Az $\overrightarrow{OA_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *vektort úgy választjuk meg, hogy abszolút értéke* $\frac{1}{2^{i-1}}$, *irányszöge (ívmértékben)* a_i *legyen (a 9. ábrán* $n=4$*).*



9. ábra

E vektorok OX-re merőleges vetületeinek összege — ami ugyanaz, mint OF összegüknek OX-re merőleges vetülete — $f(0)$ *hosszúságú és* 0, *illetve* π *irányszögű vektor aszerint, hogy* $f(0) \geqq 0$, *illetve* $f(0) < 0$ *(42. jegyzet).*

$\overrightarrow{OF}$ nem nullvektor, mert

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2'} = \overrightarrow{OA_2'}$$

abszolút értéke nem kisebb $\frac{1}{2}$-nél, hiszen A_2' az A_1 középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kör kerületén van, és e körnek O-hoz legközelebbi pontja az OA_1 szakasz felezőpontja.

Ugyanígy kapjuk, tagról tagra képezve a részösszegeket, hogy $\overrightarrow{OA_n}$ hozzáadása után $|\overrightarrow{OF}| \geqq \frac{1}{2^n}$.

Tetszőleges x-re (1) szerint úgy kapjuk az $f(x)$ abszolút értékű és 0 vagy π irányszögű vektort, hogy mindegyik vektorunkat elfordítjuk O körül x ívmértékű szöggel, és így vesszük OX-re merőleges vetületük összegét. Ugyanazt kapjuk, ha OF-et fordítjuk el x-szel és ennek OX-re merőleges vetületét nézzük. Eszerint $f(x)$ akkor és csak akkor 0, ha $OF \perp OX$, az ezt eredményező x forgásszögek pedig π egész számú többszöröseiben különböznek egymástól.

Megjegyzés

Láthatjuk, hogy a második megoldás ragadja meg igazán a feladat lényegét, ennek alapján a feladatot többféleképpen is általánosíthatjuk. Az olvasóra bízzuk, fogalmazzon meg ezek közül egyet, s igazolja állítását.

2. Egyenlőtlenségek és szélsőérték-számítások

44. Az a, b, c valós számokra fennáll az

(1) $$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$$

egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a=b=c$.

I. megoldás

Megmutatjuk, hogy

(2) $$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca,$$

és az egyenlőség csak $a=b=c$ mellett igaz.

(2) *bal és jobb oldalának különbségét négyzetösszeggé alakítjuk:*

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\geqq 0$$

azonnal adódik, továbbá az egyenlőség csak $a-b=b-c=c-a=0$ esetén igaz.

II. megoldás

Az (1) egyenlőséget mint egyenletet tekintjük, például a az ismeretlen, b és c pedig paraméterek:

(3) $$a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2)=0.$$

(3) diszkriminánsa: $(b+c)^2-4(b^2-bc+c^2)=-3(b-c)^2$.

Ez csak $b=c$ esetén nem negatív, s ekkor a megoldás: $a=b=c$.

45. Bizonyítsuk be, hogy a pozitív a és b számok számtani és mértani közepének különbsége $\frac{(a-b)^2}{8a}$ és $\frac{(a-b)^2}{8b}$ közé esik.

Megoldás

Feltehetjük, hogy pl. $a\geqq b$. A számtani és mértani közép különbsége:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}.$$

Minthogy

$$2\sqrt{a}\geqq\sqrt{a}+\sqrt{b}\geqq 2\sqrt{b},$$

azért

(1) $$\frac{(a-b)^2}{8a}\leqq\frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\leqq\frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Megjegyzés

A fenti (1) egyenlőtlenség megmutatja, hogy „mennyire jó" gyökvonási eljárás a következő: $\sqrt{x}$ kiszámításához először egy a_1 közelítő gyököt választunk, majd képezzük a következő — $\sqrt{x}$-hez tartó — sorozatot:

$$a_1,\ a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{x}{a_1}\right),\ \ldots,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{x}{a_n}\right).$$

Az (1) egyenlőtlenség alapján méginkább igaz, hogy

$$\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{x}{a_n}\right)-\sqrt{x}\leqq\frac{\left(a_n-\frac{x}{a_n}\right)^2}{8c},$$

ahol feltesszük, hogy $c<a_n$ és $c<\frac{x}{a_n}$ minden n-re teljesül, de természetesen c azonos „nagyságrendű”, mint $\sqrt{x}$.

Ha $a_n-\frac{x}{a_n}\leqq 10^{-m}c$, akkor

$$\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{x}{a_n}\right)-\sqrt{x}\leqq\frac{10^{-2m}}{8}c.$$

Ez lényegében azt jelenti, hogy ha a_n m értékes jegyre pontos közelítés, akkor $\frac{x}{a_n}$-et $2m$ értékes jegyig kell számítani, és akkor a_{n+1} már $2m$ értékes jegyre pontos közelítés.

46. Bizonyítsuk be, hogy tetszés szerinti 1-nél nagyobb a számra

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_a 16}\geqq 1.$$

Megoldás

A logaritmus definíciója szerint $a\neq 1$ esetén $a^{\log_a 16}=16$. 2 alapú logaritmusra áttérve: $\log_a 16\cdot\log_2 a=\log_2 16=4$, *ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség az alábbi alakba írható:*

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{4}-1=\frac{4+(\log_2 a)^2-4\log_2 a}{4\log_2 a}\geqq 0,$$

ahonnan a

$$\frac{(\log_2 a-2)^2}{4\log_2 a}\geqq 0$$

egyenlőtlenség adódik. Ez az utóbbi egyenlőtlenség $a>1$, azaz $\log_2 a>0$ miatt igaz, tehát eredeti egyenlőtlenségünk is igaz, mert az átalakítások visszafelé is elvégezhetők.

Az egyenlőség csak $\log_2 a=2$, azaz $a=4$ mellett teljesül.

Megjegyzés

Hasonlóan igazolható a feladat következő általánosítása:

$$\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_a c}\geqq\frac{2}{\sqrt{\log_b c}},$$

ha $a, b, c>1$ vagy $0<a, b, c<1$. Feladatunkban $b=2$, $c=16$, $a>1$.

47. a, b, c olyan számok, melyekre $4ac-b^2$ nem negatív és a pozitív. Bizonyítandó, hogy

(1) $$a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}\leqq\frac{4ac-b^2}{2a}.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás

Igyekezzünk az (1) *egyenlőtlenséget ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozni, melynek helyessége már nyilvánvaló!*

Az (1) egyenlőtlenséget a — feltevés szerint — pozitív $2a$ számmal szorozva:

$$2a^2+2ac-2a\sqrt{(a-c)^2+b^2}\leqq 4ac-b^2.$$

Átrendezve:

$$2a^2-2ac+b^2\leqq 2a\sqrt{(a-c)^2+b^2}.$$

a) Ha $2a^2-2ac+b^2<0$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, mert a jobb oldal a négyzetgyök értelmezése és az $a>0$ feltevés szerint nem negatív. Eddig csak megfordítható átalakításokat végeztünk, ezért az (1) egyenlőtlenség is helyes, de egyenlőség nem állhat fenn.

b) Ha $2a^2-2ac+b^2\geqq 0$, akkor elég megmutatni, hogy a bal oldal négyzete nem nagyobb a jobb oldal négyzeténél:

$$(2a^2-2ac+b^2)^2\leqq 4a^2[(a-c)^2+b^2].$$

A kijelölt műveleteket elvégezve és átrendezve:

$$0\leqq 4acb^2-b^4=b^2(4ac-b^2).$$

Mivel $b^2\geqq 0$, és a feltevés szerint $4ac-b^2\geqq 0$, az egyenlőtlenség teljesül.

Egyenlőség csak a $b^2=0$, vagy $4ac-b^2=0$ feltétel mellett lehetséges, de még meg kell vizsgálnunk, hogy milyen további kikötések mellett teljesül valóban.

1. Tegyük fel, hogy $b^2=0$, azaz $b=0$. A $b=0$ értéket az (1) egyenlőtlenségbe behelyettesítve:

$$a+c-|a-c|\leqq 2c.$$

Átrendezve: $$a-c\leqq|a-c|.$$

Az egyenlőség feltétele: $a\geqq c$.

2. Tegyük fel, hogy $4ac-b^2=0$. (1) így alakul:

$$a+c-|a+c|\leqq 0.$$

Átrendezve: $$a+c\leqq|a+c|.$$

Ez mindig egyenlőséget eredményez, mert $a>0$ és a $4ac=b^2$ feltevésből $c\geqq 0$ is következik, amiből $a+c>0$ nyilvánvaló.

Mindezek szerint az (1) egyenlőtlenség a feltevések mellett mindig teljesül, és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha vagy

1. $b=0$ és $a\geqq c$, vagy

2. $4ac-b^2=0$.

Megjegyzés

Az egyenlőség vizsgálatánál elegendő az ekvivalenciát biztosító *b)* $2a^2-2ac+b^2\geqq 0$ feltételbe behelyettesíteni. Így rövidebben jutunk célhoz.

48. Az x változó mely értékeire teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}<2x+9.$$

I. megoldás

A bal oldal értelmezve van, ha $1+2x\geqq 0$, *azaz* $x\geqq -\frac{1}{2}$; *és ha* $\sqrt{1+2x}\neq 1$, *azaz* $x\neq 0$. *Minden így megengedett esetben a nevező pozitív, így a jobb és bal oldal különbsége akkor és csak akkor pozitív:*

$$\frac{(2x+9)\left(2+2x-2\sqrt{1+2x}\right)-4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}>0,$$

ha a számláló pozitív. Ebből rendezéssel és egyszerűsítéssel a

$$11x+9>(2x+9)\sqrt{1+2x}$$

egyenlőtlenséghez jutunk, mely $x \geqq -\frac{1}{2}$ és $x \neq 0$ mellett ekvivalens az eredetivel.
Az előző feltételek mellett mindkét oldal pozitív, ezért négyzetreemeléssel ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk. Kifejtéssel, rendezéssel:

$$121x^2+198x+81>(4x^2+36x+81)(1+2x)=8x^3+76x^2+198x+81,$$

$$0>x^2(8x-45),$$

amiből nyilván

$$x<\frac{45}{8}.$$

Az ekvivalencia feltételeit is tekintve, a megoldások

$$-\frac{1}{2}\leqq x<0 \quad \text{és} \quad 0<x<\frac{45}{8}.$$

II. megoldás

Vizsgáljuk meg az

$$f(x)=\frac{4x^2}{\left(1-\sqrt{1+2x}\right)^2}$$

függvényt.

Ez $x \geqq -\frac{1}{2}$ és $x \neq 0$ mellett van értelmezve. Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt $\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2$-tel. Ekkor

$$f(x)=\frac{4x^2\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}{(1-1-2x)^2}=\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2. \tag{1}$$

Tehát egyenlőtlenségünk:

$$\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2<2x+9,$$

$$2\sqrt{1+2x}<7.$$

Most az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve, vele ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk:

$$4+8x<49,$$

$$x<\frac{45}{8}.$$

Ezek szerint egyenlőtlenségünk érvényes, ha

(2) $$-\frac{1}{2} \leqq x < 0 \quad \text{és} \quad 0 < x < \frac{45}{8}.$$

Megjegyzés

Ha az $f(x)$ függvényt $x=0$-nál $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ definícióval értelmezzük — (1)-ből látható, hogy ekkor $f(0)=4$ —, akkor az adott egyenlőtlenség $x=0$-nál is érvényes.

49. Határozzuk meg az összes olyan x valós számot, mely kielégíti a

(1) $$\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1} > \frac{1}{2} \quad \text{egyenlőtlenséget.}$$

I. megoldás

A bal oldal akkor és csak akkor valós, ha egyik négyzetgyökjel alatt sem áll negatív szám: $x+1 \geqq 0$ és $3-x \geqq 0$, tehát

(2) $$-1 \leqq x \leqq 3.$$

Az (1) egyenlőtlenséget a vele ekvivalens

$$\sqrt{3-x} > \sqrt{x+1}+\frac{1}{2}$$

alakban írva, a (2) alatti x-ekre egyik oldal sem negatív. Négyzetreemeléssel és rendezéssel tehát az eredetivel ekvivalens

(3) $$\frac{7}{4}-2x > \sqrt{x+1}$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Itt a bal oldal pozitív. Ez újabb korlátozást ad x-re:

$$x < \frac{7}{8}.$$

Ha tehát

(4) $$-1 \leqq x < \frac{7}{8},$$

a (3) újabb négyzetreemelésével, majd rendezéssel és gyöktényezőkre bontással:

$$4x^2-8x+\frac{33}{16} > 0, \quad 4\left(x-\frac{8+\sqrt{31}}{8}\right)\left(x-\frac{8-\sqrt{31}}{8}\right) > 0$$

ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk. Ez akkor teljesül, ha mindkét különbség pozitív, vagy ha mindkettő negatív:

$$x>1+\frac{\sqrt{31}}{8}$$

vagy

$$x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Az első ellentmond (4)-nek, a második pedig (4)-nél erősebb korlátozást ad:

(5) $$-1\leqq x<1-\frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért (5) valóban az (1) megoldása.

II. megoldás (Útmutatás)

Mutassuk meg, hogy az $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$ *függvény a* $-1\leqq x\leqq 3$ *értelmezési tartományban szigorúan fogyó függvény, melynek értékkészlete* $-2\leqq f(x)\leqq 2.$

Ezért elegendő a $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}$ egyenlet négyzetreemelésekkel történő megoldása, mert a megoldás ismeretében könnyen válaszolhatunk a feladat kérdésére is.

50. Keressük meg a $0\leqq x\leqq 2\pi$ szakaszba eső valamennyi olyan x számot, mely kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

(1) $$2\cos x\leqq \left|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}\right|\leqq\sqrt{2}.$$

Megoldás

Először az előjeleket vizsgáljuk meg. Az első egyenlőtlenség jobb oldalán álló szám nem negatív, így ez teljesül, ha $\cos x\leqq 0$, azaz ha

(2) $$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{3\pi}{2}.$$

A további x-ekre egyik kifejezés sem negatív, tehát négyzetreemeléssel ekvivalens egyenlőtlenségekhez jutunk. Osszunk mindjárt 2-vel:

$$2\cos^2 x\leqq 1-\sqrt{1-\sin^2 2x}=1-|\cos 2x|\leqq 1.$$

Mindegyik kifejezésből levonunk 1-et, $2\cos^2 x-1=\cos 2x$. Az így nyert

$$\cos 2x \leqq -|\cos 2x| \leqq 0$$

egyenlőtlenségekből a második mindig teljesül, az első pedig akkor, ha $\cos 2x \leqq 0$, vagyis a szóban forgó, (2)-től különböző x értékek közül

(3) $$\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{7\pi}{4}.$$

Itt az egyenlőség jele érvényes.

A második egyenlőtlenség minden x-re teljesül. Egyenlőség áll fenn, ha $\cos 2x = 0$, azaz ha

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4}.$$

Összefoglalva: $2\cos x \leqq \left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right|$, ha $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{7\pi}{4}$, az egyenlőség pedig $\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ és $\frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{7\pi}{4}$ mellett áll fenn.

$\left|\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}\right| \leqq \sqrt{2}$ minden x-re teljesül, egyenlőség $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ mellett áll fenn.

51. Bizonyítsuk be, hogy ha $a+b$ pozitív szám, akkor

(1) $$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Megoldás

Bebizonyítjuk, hogy a bal és jobb oldal különbsége nem lehet negatív. Nyilván a és b nem zérus. Közös nevezőre hozva, majd a számlálót szorzattá alakítva,

$$\frac{a^3+b^3-ab^2-a^2b}{a^2b^2} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2-ab)}{a^2b^2} = \frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2}.$$

Tehát az (1) egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$\frac{(a+b)(a-b)^2}{a^2b^2} \geqq 0.$$

Itt $a+b$ és a^2b^2 a feltétel szerint pozitív, $(a-b)^2$ pedig nem lehet negatív, tehát az (1) egyenlőtlenség igaz.

Megjegyzés

Ugyanígy bebizonyíthatjuk, hogy ha n és k természetes számok, továbbá n páros, valamint $a+b>0$ és a, b egyike sem 0, akkor

$$\frac{a^k}{b^n}+\frac{b^k}{a^n} \geqq \frac{1}{a^{n-k}}+\frac{1}{b^{n-k}}.$$

52. Bizonyítandó, hogy ha a és b pozitív számok, akkor

$$(a+b)(a^4+b^4) \geqq (a^2+b^2)(a^3+b^3).$$

Megoldás

Megmutatjuk, hogy a bal és jobb oldal különbsége nem lehet negatív.

$$(a+b)(a^4+b^4)-(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^4b-a^3b^2-a^2b^3+ab^4=$$
$$=ab[a^2(a-b)+b^2(b-a)]=ab(a+b)(a-b)^2.$$

Ez utóbbi kifejezés nem negatív, mert a és b sem negatív. (Láthatjuk, hogy a feladat feltétele gyengíthető. A jobb oldali kifejezés akkor sem negatív, ha közülük a nagyobb abszolút értékű negatív, a másik pedig nem negatív.)

Megjegyzés

1. Bebizonyítjuk, hogy ha a és b pozitív számok, m, n, és k pedig pozitív egész számok ($n>m$), akkor

$$(a^m+b^m)(a^{n+k}+b^{n+k}) \geqq (a^{m+k}+b^{m+k})(a^n+b^n).$$

Valóban, ha nézzük a két oldal különbségét:

$$a^{n+k}b^m+a^mb^{n+k}-a^nb^{m+k}-b^na^{m+k}=$$
$$=a^mb^m(a^{n+k-m}+b^{n+k-m}-a^{n-m}b^k-a^kb^{n-m})=$$
$$=a^mb^m(a^{n-m}-b^{n-m})(a^k-b^k) \geqq 0$$

igaz akár $a \geqq b$, akár $a \leqq b$. Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a=b$.

2. *Igazoljuk a feladat következő általánosítását:*

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_l$ pozitív számok; m, n, k természetes számok, úgy, hogy $n>m$.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{l} a_i^m\right)\left(\sum_{j=1}^{l} a_j^{n+k}\right) \geqq \left(\sum_{i=1}^{l} a_i^{m+k}\right)\left(\sum_{j=1}^{l} a_j^n\right).$$

Egyenlőség csak $a_1=a_2=\ldots=a_l$ esetén áll fenn.

53. Bizonyítsuk be, hogy ha az a és b számok egyike sem negatív, akkor $a^3-3ab^2+2b^3$ sem negatív.

Megoldás

Szorzattá alakítással

$$a^3-3ab^2+2b^3=a(a^2-b^2)+2b^2(b-a)=(a-b)(a^2+ab-2b^2)=$$
$$=(a-b)[a^2-b^2+b(a-b)]=(a-b)^2(a+2b).$$

Ebből az állítás helyessége következik, sőt elég, ha feltesszük, hogy $a+2b\geqq 0$.

54. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b 0-tól különböző valós számok, akkor

(1) $$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4\geqq 0.$$

Megoldás

Igazoljuk, hogy a bal oldal nem negatív kifejezések szorzatává alakítható. Közös nevezőre hozva

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[a^4+b^4-3ab(a^2+b^2)+4a^2b^2\right]=$$
$$=\frac{1}{a^2b^2}\left[(a^2+b^2)^2-ab(a^2+b^2)-2ab(a^2+b^2)+2a^2b^2\right]=$$
$$=\frac{1}{(ab)^2}\left[(a^2+b^2)(a^2+b^2-ab)-2ab(a^2+b^2-ab)\right]=$$
$$=\frac{1}{(ab)^2}(a^2+b^2-ab)(a-b)^2.$$

Azonnal látható, hogy $(ab)^2>0$, $(a-b)^2\geqq 0$,

$a^2+b^2-ab>0$ pedig következik az

(2) $$a^2+b^2-ab=(a-b)^2+ab$$

azonosságból, ha $ab>0$; az

(3) $$a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab$$

azonosságból, ha $ab<0$.

Ezzel (1) helyességét igazoltuk ($ab\neq 0$).

Sőt az is látható, hogy (1)-ben az egyenlőség csak $a=b$ mellett érvényes.

Megjegyzés

Az előbbi megoldást „szépíthetjük", ha $x=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ helyettesítéssel (1) bal oldalát

$$(4) \qquad x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

alakba írjuk. Mivel $a^2+b^2 \geqq 2ab$, és $a^2+b^2 \geqq -2ab$,

$$x=\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2, \text{ ha } ab>0, \text{ illetve}$$

$$x=\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leqq -2, \text{ ha } ab<0.$$

(4)-be behelyettesítve, azonnal látható (1) helyessége. Láthatjuk azt is, hogyan lehet ismert egyenlőtlenségekből nehezebben bizonyítható egyenlőtlenségeket „gyártani".

55. Jelentsenek a, b és n 1-nél nagyobb természetes számokat; közülük a és b két számrendszer alapszáma. Az $\overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0}$ alakú szám értéke az a alapú számrendszerben A_n, a b alapúban B_n, ahol $x_n \neq 0$ és $x_{n-1} \neq 0$. Az első, x_n számjegy elhagyásával keletkező számok A_{n-1}, illetve B_{n-1}. Bizonyítsuk be, hogy az $a>b$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$(1) \qquad \frac{A_{n-1}}{A_n}<\frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

Megoldás

A számrendszerek értelmezése szerint

$$(2) \qquad \begin{aligned} A_n&=(x_0+x_1a+x_2a^2+\ldots+x_{n-1}a^{n-1})+x_na^n=A_{n-1}+x_na^n, \\ B_n&=(x_0+x_1b+x_2b^2+\ldots+x_{n-1}b^{n-1})+x_nb^n=B_{n-1}+x_nb^n. \end{aligned}$$

Az (1) *egyenlőtlenség ekvivalens a most következőkkel és végül* (1')*-vel:*

$$\frac{A_n}{A_{n-1}}>\frac{B_n}{B_{n-1}}; \quad \frac{A_{n-1}+x_na^n}{A_{n-1}}>\frac{B_{n-1}+x_nb^n}{B_{n-1}};$$

$$\frac{x_na^n}{A_{n-1}}>\frac{x_nb^n}{B_{n-1}}; \quad a^nB_{n-1}-b^nA_{n-1}>0;$$

$$(1') \qquad x_0(a^n-b^n)+x_1ab(a^{n-1}-b^{n-1})+x_2a^2b^2(a^{n-2}-b^{n-2})+\ldots$$
$$\ldots+x_{n-1}a^{n-1}b^{n-1}(a-b)>0.$$

Az átalakítások során először reciprokokra tértünk át, majd (2) felhasználásával mindkét oldalból 1-et levontunk, x_n-nel osztottunk, végül a nevezőkkel szoroztunk, és a tagokat átrendeztük.

Sőt, az is kiolvasható az átalakításból, hogy ha (1)-ben egyenlőség van, akkor (1')-ben is egyenlőség van, ha (1)-ben a jobb oldal kisebb, akkor (1')-ben a bal oldal kisebb.

1. Ha $a-b>0$, akkor $a^2-b^2>0, \ldots, (a^n-b^n)>0$, akkor (1') fennáll, hiszen egy tag biztosan pozitív — $x_{n-1}(ab)^{n-1}(a-b)>0$ — a többi pedig nem negatív. Ezért (1) is teljesül.

2. Ha $a-b=0$ akkor (1')-ben és (1)-ben is az egyenlőség áll fenn.

3. Ha $a-b<0$ akkor (1')-ben a bal oldal (1)-ben a jobb oldal kisebb, mint a másik oldal, hiszen (1') bal oldalán egy tag negatív, a többi nem pozitív. Ezzel az állítást igazoltuk, sőt láthatjuk, hogy az $x_{n-1}\neq 0$ feltétel helyett csak azt használtuk ki, hogy $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ nem negatív egész számok egyike biztosan 0-tól különböző.

Megjegyzés

Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy a feladatéhoz analóg feltételek mellett $a>b$ ekvivalens az $\frac{A_{n-k}}{A_n}<\frac{B_{n-k}}{B_n}$ egyenlőtlenséggel. Itt A_{n-k} azt a számot jelöli, melyet A_n-ből az első k jegy törlésével kapunk, B_{n-k} a B_n-ből hasonlóan adódik.

56. Az $ax^2+bx-c=0$ egyenletben a, b, c pozitív számok és $a^2=bc$. Mi az eggyel növelt gyökök szorzatának lehetséges legnagyobb értéke, és ezt az a, b, c milyen értékei mellett veszi fel?

Megoldás

A gyökök és együtthatók közötti összefüggések és a fentiek alapján a következőket kapjuk:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{bc}{ab}=-\frac{a^2}{ab}=-\frac{a}{b}.$$

Az eggyel növelt gyökök szorzata pedig:

$$(1+x_1)(1+x_2)=1+(x_1+x_2)+x_1x_2=1-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=$$

$$=\frac{ab-b^2-a^2}{ab}=-\frac{(a-b)^2+ab}{ab}=-1-\frac{(a-b)^2}{ab}.$$

Az a és b pozitív, ezért az utóbbi kifejezés mindig kisebb (-1)-nél, ha $a \neq b$. Ha $a=b$, a kifejezés értéke maximális. Ekkor viszont $a^2=bc=ac$ folytán $a=c$, tehát mindhárom együttható egyenlő.

Az eggyel növelt gyökök szorzatának lehetséges legnagyobb értéke tehát -1, s ezt az értéket akkor veszi fel, ha $a=b=c$. Ekkor valóban létezik két valós gyök.

57. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b pozitív, 1-nél kisebb szám, akkor az

$$x^3-(1+a+b)x-2ab=0 \tag{1}$$

egyenletnek pozitív gyöke csak 1 és 2 között lehet.

Megoldás

Ha $a=b=1$ helyettesítést végzünk, akkor $x>0$ miatt (1) *bal oldalát csökkentjük:*

$$0=x^3-(1+a+b)x-2ab>x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2). \tag{2}$$

Viszont $a=b=0$ helyettesítéssel (1) *bal oldalát növeljük:*

$$(x-1)x(x+1)=x^3-x>x^3-(1+a+b)x-2ab=0. \tag{3}$$

(2) azt jelenti, hogy $x<2$, (3) pedig azt jelenti, hogy $1<x$. Tehát az (1) egyenlet pozitív gyöke csak 1 és 2 között lehet.

Megjegyzés

A folytonos függvényekre vonatkozó *Bolzano*-tétel alapján bebizonyítjuk, hogy (1)-nek valóban van 1 és 2 között gyöke *(25. jegyzet)*.

$x=1$ esetén — $0<a$, $0<b$ miatt —
$x^3-(1+a+b)x-2ab=-(a+b+2ab)<0.$
$x=2$ esetén — $a<1$, $b<1$ miatt —
$x^3-(1+a+b)x-2ab=6-2(a+b+ab)>0.$

Az (1) bal oldala x-nek folytonos függvénye az $[1, 2]$ szakaszon, ezért (1)-nek van 1 és 2 közé eső gyöke.

58. Három pozitív szám szorzata nagyobb 1-nél, az összegük kisebb a reciprokaik összegénél Bizonyítsuk be, hogy

a) egyik szám sem lehet 1;

b) a számok közül kettő nagyobb, egy pedig kisebb 1-nél.

I. megoldás

Jelöljük a szóban forgó számokat x, y, z-vel. A feltételek szerint: $x>0$, $y>0$, $z>0$;

(1) $$1<xyz;$$

(2) $$x+y+z<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Mindkét állítást indirekt módon igazoljuk.

a) Tegyük fel, hogy valamelyik szám 1-gyel egyenlő. Feltehetjük, hogy ez éppen a z. Ekkor teljesülne

(1*a*) $$xy>1;$$

(2*a*) $$x+y<\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

De viszont $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}<x+y$ (1*a*) szerint, ez pedig (2*a*)-nak ellentmond. Valóban, egyik szám sem lehet 1.

b) Nem lehet mindhárom szám 1-nél nagyobb, hiszen akkor reciprokuk 1-nél kisebb szám lenne, és (2) nem teljesülhetne.

Megmutatjuk, hogy a három szám közül legfeljebb az egyik kisebb 1-nél. Tegyük fel ugyanis, hogy például x és y kisebb 1-nél. (2) alapján

(2*b*) $$K=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-x-y-z>0.$$

A bal oldalt a feltételek felhasználásához alkalmasan átalakítjuk:

$$K=(xy-x-y+1)-\left(\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+1\right)+\left(\frac{1}{z}-xy\right)+\left(\frac{1}{xy}-z\right)=$$

$$=(x-y)(y-1)-\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{z}-xy\right)+\left(\frac{1}{xy}-z\right)=$$

$$=(x-1)(y-1)\left(1-\frac{1}{xy}\right)+\left(\frac{1}{z}-xy\right)+\left(\frac{1}{xy}-z\right)<0.$$

Itt a két utolsó tag (1) miatt, az első tag pedig — hiszen mindhárom tényezője negatív — feltevésünk szerint negatív. Ellentmondásra jutottunk. Ezzel a *b)* állítást is igazoltuk.

II. megoldás

A feladat átfogalmazható a következőképpen (14., 19. jegyzet): Legyenek az x, y, z pozitív számok a

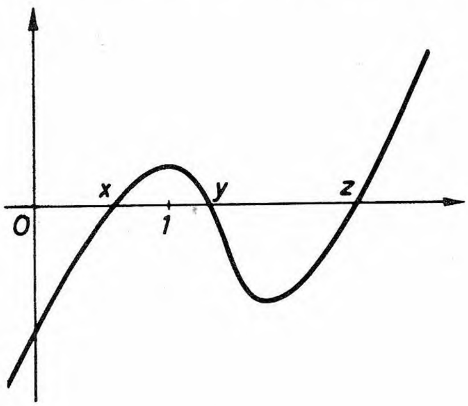
$$P(u) \equiv (u-x)(u-y)(u-z) \equiv u^3-(x+y+z)u^2+(xy+yz+zx)u-xyz \equiv$$
$$\equiv u^3-pu^2+qu-r$$

polinom gyökei, ahol az együtthatókra fennállnak az alábbi feltételek:

$$1 < r \equiv xyz; \quad x+y+z \equiv p < \frac{q}{r} \equiv \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Állítás: az x, y, z számok közül kettő nagyobb, egy pedig kisebb 1-nél.

$P(u)$ folytonos függvény, gyöktényezős alakjából leolvashatók a függvény előjelviszonyai *(10. ábra). Ha megmutatjuk, hogy* $P(1) > 0$, *a Bolzano-tétel szerint ez azt jelenti, hogy páratlan számú gyök van a* (0, 1) *intervallumban (25. jegyzet). Három 1-nél kisebb gyök viszont nem lehet, mert* $xyz > 1$. Valóban, $u=1$ helyettesítésével, majd a második, $q > pr$ feltételt alkalmazva:



10. ábra

$$P(1)=1-p+q-r>1-p+pr-r=$$
$$=(r-1)(p-1)>0,$$

mivel $r>1$ és $p \equiv x+y+z \geqq 3\sqrt[3]{xyz} \geqq 3$ a pozitív számokra vonatkozó számtani és mértani középről szóló tétel *(24. jegyzet)*, valamint az első feltétel alapján. Előzetes fejtegetésünk után így pontosan 1 gyök van a (0, 1) intervallumban.

Megjegyzés

1. El kell ismernünk, hogy az utóbbi megoldás a szebb és jobban megragadja a lényeget, mint az első, ahol az utolsó lépés eléggé mesterkéltnek tűnhet.

A II. megoldás arra is rámutat, hogyan lehet további hasonló jellegű feladatokat gyártani.

2. Könnyű olyan számhármast találni, mely eleget tesz a feladat követelményeinek: például $x=\frac{1}{50}$, $y=10$, $z=20$.

59. Szorozzuk meg a téglatest egyes oldallapjainak területét a kerületükkel. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett hat mennyiség összege legalább akkora, mint a test térfogatának 24-szerese.

I. megoldás

Ha a test éleinek hosszát a, b, c-vel jelöljük, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség a következő:

$$2ab \cdot 2(a+b)+2bc \cdot 2(b+c)+2ca \cdot 2(a+c) \geqq 24abc,$$

azaz vele egyenértékű

$$\frac{1}{6}(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \geqq abc.$$

Ez viszont a zárójelben levő 6 számra vonatkozó számtani és mértani közép összefüggése alapján igaz. Egyenlőség csak $a=b=c$ esetén áll fenn *(24. jegyzet)*.

II. megoldás

Azt fogjuk bizonyítani, hogy az egyes tagoknak a térfogattól való eltéréseinek összege nem negatív:

$$\begin{aligned}(a^2b-abc)+(a^2c-abc)+(b^2a-abc)+(b^2c-abc)+(c^2a-abc)+(c^2b-abc)&=\\ =ab(a-c)+ac(a-b)+ba(b-c)+bc(b-a)+ca(c-b)+cb(c-a)&=\\ =(a-c)b(a-c)+(a-b)c(a-b)+(b-c)a(b-c)&=\\ =(a-b)^2c+(b-c)^2a+(c-a)^2b.&\end{aligned}$$

Ezen utóbbi kifejezés viszont valóban nem negatív. Nulla is csak $a=b=c$ esetén lehet.

III. megoldás

Ha a bizonyítandó egyenlőtlenséget elosztjuk abc-vel, akkor a következőt kapjuk:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geqq 6.$$

Azonban egy pozitív számnak és a reciprokának összege legalább 2, s ezért az utóbbi egyenlőtlenség nyilvánvalóan helyes, tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség is az.

Végül igazoljuk az imént felhasznált összefüggést. A $k+\frac{1}{k} \geqq 2$ egyenlőtlenség valóban helyes, mert $\left(\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 \geqq 0.$

60. Bizonyítandó, hogy ha a és b természetes számok, akkor

(1) $$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} \geqq \left(\frac{a}{b}\right)^{b}.$$

Megoldás

1. *Tegyük fel, hogy* $a=b$. Ekkor az $\frac{a+1}{b+1}$ és $\frac{a}{b}$ törtek értéke 1. Mivel 1-nek minden (valós kitevőjű) hatványa 1, ezért (1)-ben az egyenlőség teljesül.

2. *Ha* $a \neq b$, *akkor tekintsük a következő* $b+1$ *darab pozitív számot:*

(2) $$1;\ \underbrace{\frac{a}{b};\ \frac{a}{b};\ \dots;\ \frac{a}{b}}_{b \text{ darab}}.$$

A (2)-ben szereplő számok számtani közepe:

$$\frac{1+b\frac{a}{b}}{b+1}=\frac{a+1}{b+1}.$$

A (2)-ben szereplő számok mértani közepe:

$$\sqrt[b+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^{b}}.$$

A (2)-ben szereplő számok pozitívak, $a \neq b$ *feltevés miatt számtani közepük nagyobb, mint a mértani közepük (24. jegyzet):*

$$\frac{a+1}{b+1} > \sqrt[b+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^{b}}.$$

Az egyenlőtlenség két oldalán pozitív számok állnak, továbbá $b+1$ természetes szám, ekkor, ha mindkét oldalt $b+1$-edik hatványra emeljük:

$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1} > \left(\frac{a}{b}\right)^{b}$$

egyenértékű az előzővel. Tehát (1) teljesül, mégpedig $a=b$ esetben az egyenlőség, $a \neq b$ esetben az egyenlőtlenség valósul meg.

61. Legyenek α, β, γ egy háromszög szögei. Bizonyítsuk be, hogy

(1) $$\operatorname{ctg}^2 \alpha+\operatorname{ctg}^2 \beta+\operatorname{ctg}^2 \gamma \geqq 1.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Megoldás

A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldalát a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma=\frac{1}{2}[(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)+(\operatorname{ctg}^2\beta+\operatorname{ctg}^2\gamma)+(\operatorname{ctg}^2\gamma+\operatorname{ctg}^2\alpha)]=$$

$$=\frac{1}{2}[(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta)^2+(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma)^2+(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\alpha)^2]+$$

$$+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha.$$

Mivel

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ,$$

ezért

$$\operatorname{ctg}\gamma=-\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=-\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},$$

amiből

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

Ennélfogva a bizonyítandó egyenlőtlenség:

$$1+\frac{1}{2}[(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta)^2+(\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma)^2+(\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\alpha)^2]\geqq 1.$$

Ez pedig nyilvánvalóan helyes. Egyenlőség csak $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}\gamma$ esetén állhat fenn, ami viszont csak úgy lehetséges, ha $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$.

Megjegyzés

Jensen tételének, valamint a hatványközép és a számtani közép közötti egyenlőtlenségnek a felhasználásával a feladatot általánosíthatjuk.

Jensen tétele: Ha az I intervallumban értelmezett $f(x)$ függvényre teljesül

$$(1)\qquad f(x)+f(y)\geqq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

bármely $x, y \in I$ mellett, akkor teljesül

$$(2)\qquad f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\geqq nf\left(\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right)$$

bármely $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ mellett.

Továbbá, ha az egyenlőség (1)-ben csak $x=y$ mellett teljesül, akkor (2)-ben is csak $x_1=x_2=\ldots=x_n$ mellett teljesül *(24. jegyzet)*.

Először azt bizonyítjuk be, hogy

$$(3)\qquad |\operatorname{ctg}\alpha|+|\operatorname{ctg}\beta|\geqq 2\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\right|,$$

ha $0° < \alpha, \beta < 180°$. (Tehát az $|\text{ctg } x|$ függvény az említett intervallumban alulról konvex.)

A bal oldalt a következőképpen lehet átalakítani:

$$|\text{ctg } \alpha| + |\text{ctg } \beta| = \frac{|\cos \alpha|}{\sin \alpha} + \frac{|\cos \beta|}{\sin \beta} = \frac{\sin \beta\, |\cos \alpha| + \sin \alpha\, |\cos \beta|}{\sin \alpha \sin \beta} \geqq$$

$$\geqq \frac{|\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta|}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{|\sin (\alpha+\beta)|}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \left|\cos \frac{\alpha+\beta}{2}\right|}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Azt fogjuk igazolni, hogy

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \left|\cos \frac{\alpha+\beta}{2}\right|}{\sin \alpha \sin \beta} \geqq 2 \frac{\left|\cos \frac{\alpha+\beta}{2}\right|}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Szorozzuk mindkét oldalt a pozitív $\dfrac{\sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin \alpha \sin \beta}{\left|\cos \frac{\alpha+\beta}{2}\right|}$ kifejezéssel:

$$2 \sin^2 \frac{\alpha+\beta}{2} \geqq 2 \sin \alpha \sin \beta, \quad \text{azaz} \quad 1 - \cos (\alpha+\beta) \geqq 2 \sin \alpha \sin \beta,$$

ahonnan

$$1 \geqq \cos (\alpha - \beta).$$

Ez az utóbbi egyenlőtlenség nyilvánvalóan helyes. Mivel a végzett átalakítások visszafelé is elvégezhetők, a (3) egyenlőtlenség is igaz.

Könnyen látszik az is, hogy egyenlőség csak $\alpha = \beta$ esetén áll fenn. $\left(\sin \alpha, \sin \beta, \sin \frac{\alpha+\beta}{2}\right.$ és $\cos \frac{\alpha+\beta}{2}$ közül a feltétel szerint csak $\cos \frac{\alpha+\beta}{2}$ lehet 0, de ez esetben a bizonyítandó egyenlőtlenség triviális.)

Alkalmazhatjuk tehát *Jensen* tételét az $f(x) = |\text{ctg } x|$ függvényre, s azt kapjuk, ha $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 0° és 180° közötti szögek, akkor

$$|\text{ctg } \alpha_1| + |\text{ctg } \alpha_2| + |\text{ctg } \alpha_3| + \ldots + |\text{ctg } \alpha_n| \geqq n \left|\text{ctg} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\right|,$$

ahol egyenlőség csak $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$ esetén áll fenn.

Végül, mivel az $|\text{ctg } \alpha_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nem negatív számok k-adik (k 1-nél nagyobb természetes szám) hatványközepe nem kisebb a számtani közepüknél, a

$$\sqrt[k]{\frac{1}{n}\left[|\operatorname{ctg}\alpha_1|^k+|\operatorname{ctg}\alpha_2|^k+\ldots+|\operatorname{ctg}\alpha_n|^k\right]} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{n}\left[|\operatorname{ctg}\alpha_1|+|\operatorname{ctg}\alpha_2|+\ldots+|\operatorname{ctg}\alpha_n|\right],$$

ahol az egyenlőség $|\operatorname{ctg}\alpha_1|=|\operatorname{ctg}\alpha_2|=\ldots=|\operatorname{ctg}\alpha_n|$ esetén teljesül.

Érvényes tehát a következő általános egyenlőtlenség

$$|\operatorname{ctg}\alpha_1|^k+|\operatorname{ctg}\alpha_2|^k+\ldots+|\operatorname{ctg}\alpha_n|^k \geqq n\left|\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\right|^k,$$

ahol egyenlőség csak $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n$ esetén áll fenn. (Ha a kitevő páros, az abszolútérték-jelek elhagyhatók.)

Eredeti feladatunk az előbbinek speciális esete, amikor is $n=3$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=180°$ és $k=2$:

$$\operatorname{ctg}^2\alpha_1+\operatorname{ctg}^2\alpha_2+\operatorname{ctg}^2\alpha_3 \geqq 3\operatorname{ctg}^2 60° = 1.$$

62. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1>0$, $x_2>0$, $x_1y_1-z_1^2>0$ és $x_2y_2-z_2^2>0$, akkor fennáll a következő egyenlőtlenség:

(1)
$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leqq \frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

Állapítsuk meg annak szükséges és elegendő feltételét is, hogy mikor érvényes (1)-ben az egyenlőség jele!

Megoldás

A bal oldalt az

(2)
$$(x_1+x_2)(y_1+y_2) \geqq \left(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}\right)^2$$

egyenlőtlenség, majd a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján növelve (nem csökkentve), a jobb oldalhoz juthatunk. Ezt az „ötletet" indokolja, hogy a jobb oldalon x_1y_1-, x_2y_2-t tartalmazó tagok állnak.

Először (2)-t igazoljuk. Világos, hogy a feladat feltételei csak $y_1>0$, $y_2>0$ mellett teljesülhetnek. (2) két oldalának különbsége

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-\left(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}\right)^2 = x_1y_2+x_2y_1-$$
$$-2\sqrt{x_1y_1x_2y_2} = \left(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1}\right)^2 \geqq 0.$$

Itt egyenlőség akkor áll fenn, ha van olyan t pozitív szám, hogy $y_1=tx_1$, $y_2=tx_2$.
Az (1) bal oldalán álló tört — B jelöli — így növelhető:

$$(3)\qquad B=\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqq\frac{8}{\left(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}\right)^2-(z_1+z_2)^2}=$$

$$=\frac{2}{\frac{\left(\sqrt{x_1y_1}+z_1\right)+\left(\sqrt{x_2y_2}+z_2\right)}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{x_1y_1}-z_1\right)+\left(\sqrt{x_2y_2}-z_2\right)}{2}}.$$

B nevezője ugyanis csökkent vagy nem változott, de a feladat feltételei szerint pozitív maradt. Továbbra sem növeljük a nevezőt, ha a két számtani közepet a mértani középpel helyettesítjük:

$$B\leqq\frac{2}{\sqrt{\left(\sqrt{x_1y_1}+z_1\right)\left(\sqrt{x_2y_2}+z_2\right)}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x_1y_1}-z_1\right)\left(\sqrt{x_2y_2}-z_2\right)}}=$$

$$(4)\qquad =\frac{2}{\sqrt{(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)}}=2\sqrt{\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}\cdot\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}}.$$

A jobb oldali mértani közép helyett a nem kisebb számtani közepet írva, a kívánt egyenlőtlenséghez jutunk:

$$(5)\qquad B\leqq 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\right)\right]=\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

(1)-ben akkor és csak akkor hagyható el az egyenlőtlenség jele, ha (3)-ban (4)-ben és (5)-ben nem növeltünk. Tehát alkalmas t-vel

$$(3')\qquad y_1=tx_1,\quad y_2=tx_2,$$

továbbá

$$(4')\qquad \sqrt{x_1y_1}+z_1=\sqrt{x_2y_2}+z_2,\quad \sqrt{x_1y_1}-z_1=\sqrt{x_2y_2}-z_2,$$

végül

$$(5')\qquad x_1y_1-z_1^2=x_2y_2-z_2^2.$$

Az (5′) egyenlőség (4′)-ből már adódik, továbbá (4′) egyenértékű a következővel:

$$(4^*)\qquad \sqrt{x_1y_1}=\sqrt{x_2y_2},\quad z_1=z_2.$$

(3′) és (4*) felhasználásával

$$\sqrt{t}x_1=\sqrt{t}x_2, \quad \sqrt{t}>0, \quad \text{tehát} \quad x_1=x_2 \quad \text{és} \quad y_1=y_2.$$

Egyenlőség tehát az $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$ esetben áll fenn.

Megjegyzés

A (2) egyenlőtlenség speciális esete a következő ún. *Cauchy—Bunyakovszkij*-féle egyenlőtlenségnek *(24., 3., 44. jegyzet)*

$$(2') \quad (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geqq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2,$$

ez pedig az ún. *Lagrange*-azonosság következménye:

$$(2'') \quad (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2+$$
$$+[(a_1b_2-a_2b_1)^2+\ldots+(a_1b_n-a_nb_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+\ldots+$$
$$+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2].$$

(2″) belátásához elegendő, ha észrevesszük, hogy — a kijelölt műveletek elvégzése után — a bal oldali tagok és csak ezek lépnek fel a jobb oldalon, mert ott az $a_ib_ia_jb_j$ típusú tagok kiesnek, ha $i\neq j$.

(2′)-ben az egyenlőség akkor áll fenn, ha (2″)-ben a [ ] zárójelminden tagja 0, azaz alkalmas t-vel

$$b_i=ta_i, \quad \text{vagy} \quad a_i=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

(van olyan λ és μ hogy nem mindkettő 0 és

$$\lambda a_i=\mu b_i, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Ez a feltétel összefogja az előbbi eseteket.)

Mivel a számtani és mértani közép közti

$$\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}\geqq\sqrt[n]{c_1\cdot c_2\cdot\ldots\cdot c_n}$$

egyenlőtlenség is érvényes akárhány nem negatív számra, ezért a feladat bizonyítása minden változás nélkül átvihető a következő egyenlőtlenség bizonyítására:

$$\text{ha } x_i>0 \text{ és } x_iy_i-z_i^2>0 \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

akkor

$$\frac{n^3}{(x_1+x_2+\ldots+x_n)(y_1+y_2+\ldots+y_n)-(z_1+z_2+\ldots+z_n)^2}\leqq$$
$$\leqq\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_ny_n-z_n^2}.$$

Itt egyenlőség akkor áll fenn, ha van olyan t pozitív szám, hogy $y_1=tx_1$, $y_2=tx_2$. Az (1) bal oldalán álló tört — B jelöli — így növelhető:

$$(3)\qquad B=\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqq\frac{8}{\left(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}\right)^2-(z_1+z_2)^2}=$$

$$=\frac{2}{\dfrac{\left(\sqrt{x_1y_1}+z_1\right)+\left(\sqrt{x_2y_2}+z_2\right)}{2}\cdot\dfrac{\left(\sqrt{x_1y_1}-z_1\right)+\left(\sqrt{x_2y_2}-z_2\right)}{2}}.$$

B nevezője ugyanis csökkent vagy nem változott, de a feladat feltételei szerint pozitív maradt. Továbbra sem növeljük a nevezőt, ha a két számtani közepet a mértani középpel helyettesítjük:

$$B\leqq\frac{2}{\sqrt{\left(\sqrt{x_1y_1}+z_1\right)\left(\sqrt{x_2y_2}+z_2\right)}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{x_1y_1}-z_1\right)\left(\sqrt{x_2y_2}-z_2\right)}}=$$

$$(4)\qquad =\frac{2}{\sqrt{(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)}}=2\sqrt{\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}\cdot\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}}.$$

A jobb oldali mértani közép helyett a nem kisebb számtani közepet írva, a kívánt egyenlőtlenséghez jutunk:

$$(5)\qquad B\leqq 2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}\right)\right]=\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}.$$

(1)-ben akkor és csak akkor hagyható el az egyenlőtlenség jele, ha (3)-ban (4)-ben és (5)-ben nem növeltünk. Tehát alkalmas t-vel

$$(3')\qquad y_1=tx_1,\quad y_2=tx_2,$$

továbbá

$$(4')\qquad \sqrt{x_1y_1}+z_1=\sqrt{x_2y_2}+z_2,\quad \sqrt{x_1y_1}-z_1=\sqrt{x_2y_2}-z_2,$$

végül

$$(5')\qquad x_1y_1-z_1^2=x_2y_2-z_2^2.$$

Az (5′) egyenlőség (4′)-ből már adódik, továbbá (4′) egyenértékű a következővel:

$$(4^*)\qquad \sqrt{x_1y_1}=\sqrt{x_2y_2},\quad z_1=z_2.$$

(3′) és (4*) felhasználásával

$$\sqrt{t}x_1=\sqrt{t}x_2, \quad \sqrt{t}>0, \quad \text{tehát} \quad x_1=x_2 \quad \text{és} \quad y_1=y_2.$$

Egyenlőség tehát az $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$ esetben áll fenn.

Megjegyzés

A (2) egyenlőtlenség speciális esete a következő ún. *Cauchy—Bunyakovszkij*-féle egyenlőtlenségnek *(24., 3., 44. jegyzet)*

$$(2')\quad (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\geqq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2,$$

ez pedig az ún. *Lagrange*-azonosság következménye:

$$(2'')\quad (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2+$$
$$+[(a_1b_2-a_2b_1)^2+\ldots+(a_1b_n-a_nb_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+\ldots+$$
$$+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2].$$

(2″) belátásához elegendő, ha észrevesszük, hogy — a kijelölt műveletek elvégzése után — a bal oldali tagok és csak ezek lépnek fel a jobb oldalon, mert ott az $a_ib_ia_jb_j$ típusú tagok kiesnek, ha $i\neq j$.

(2′)-ben az egyenlőség akkor áll fenn, ha (2″)-ben a [ ] zárójel minden tagja 0, azaz alkalmas t-vel

$$b_i=ta_i, \quad \text{vagy} \quad a_i=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

(van olyan λ és μ hogy nem mindkettő 0 és

$$\lambda a_i=\mu b_i, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Ez a feltétel összefogja az előbbi eseteket.)

Mivel a számtani és mértani közép közti

$$\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}\geqq\sqrt[n]{c_1\cdot c_2\cdot\ldots\cdot c_n}$$

egyenlőtlenség is érvényes akárhány nem negatív számra, ezért a feladat bizonyítása minden változás nélkül átvihető a következő egyenlőtlenség bizonyítására:

$$\text{ha } x_i>0 \text{ és } x_iy_i-z_i^2>0 \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

akkor

$$\frac{n^3}{(x_1+x_2+\ldots+x_n)(y_1+y_2+\ldots+y_n)-(z_1+z_2+\ldots+z_n)^2}\leqq$$
$$\leqq\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}+\ldots+\frac{1}{x_ny_n-z_n^2}.$$

Egyenlőség az $x_1=x_2=\ldots=x_n$, $y_1=y_2=\ldots=y_n$, $z_1=z_2=\ldots=z_n$ esetben áll fenn.

63. Mekkora a^6+b^6 legkisebb és legnagyobb értéke, ha a és b olyan valós számok, amelyekre $a^2+b^2=1$?

I. megoldás

A feltételekből $b^2=1-a^2$, $0\leqq a^2\leqq 1$, $1\geqq b^2\geqq 0$ következik. $F\equiv a^6+b^6=$
$=a^6-(1-a^2)^3=3a^4-3a^2+1=3\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

Az $\left(a^2-\frac{1}{2}\right)^2$ nem negatív, legkisebb értéke 0, ha $a^2=\frac{1}{2}$, ezért F minimuma $\frac{1}{4}$; legnagyobb értékét akkor veszi fel, ha $a^2=0$, vagy $a^2=1$, tehát F maximuma 1.

II. megoldás

Differenciálszámítás segítségével meghatározzuk az

$$F(a)\equiv 3a^4-3a^2+1$$

függvény szélsőértékeit a $-1\leqq a\leqq 1$ szakaszon *(25. jegyzet)*.
Szélsőérték vagy a szakasz végpontjaiban, vagy olyan belső pontokban lehet, ahol a függvény deriváltja zérus.

$$F'(a)=12a^2-6a=6a(2a^2-1),$$

a derivált zérushelyei: $0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}$.

A 0 hely környezetében $2a^2-1$ negatív, ezért 0-tól balra a derivált pozitív, jobbra negatív, a 0 helyen $F(a)$-nak helyi maximuma van és $F(0)=1$. A $\frac{\sqrt{2}}{2}$ helyen $2a^2-1=0$, tőle balra negatív, jobbra pozitív, így a derivált is negatívból pozitívba megy át, F-nek helyi minimuma van és $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

Hasonlóan látható, hogy a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ helyen is minimuma van a függvénynek és $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}$. Az intervallum végpontjaiban $F(-1)=F(1)=1$.

Tehát a $-1\leqq a\leqq 1$ szakaszon $F(a)$ minimuma $\frac{1}{4}$, maximuma 1.

64. Állapítsuk meg az

(1) $$y=\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$$

függvény minimumát és maximumát!

I. megoldás

a) $$y=1+\frac{x^2+2x+1}{x^2+4x+5}=1+\frac{(x+1)^2}{(x+2)^2+1}.$$

A függvénynek nyilván ott lesz minimuma, ahol a második tag minimális. A második tag nevezője mindig pozitív, mert $(x+2)^2 \geqq 0$ miatt $(x+2)^2+1 \geqq 1$. A második tag számlálója nem negatív, és csak akkor 0, ha $x=-1$. Ekkor a függvény minimuma 1, és ezt $x=-1$ mellett veszi fel.

b) $$y=3-\frac{x^2+6x+9}{x^2+4x+5}=3-\frac{(x+3)^2}{(x+2)^2+1}.$$

A függvénynek ott lesz maximuma, ahol a kivonandó második tag minimális. A második tag számlálója nem negatív, nevezője pozitív. A második tag nyilván akkor minimális, ha értéke 0. Ez az $x=-3$ helyen következik be. A függvény az $x=-3$ helyen az $y=3$ értéket veszi fel.

A függvény minimuma tehát: $y_{min}=1$;
a függvény maximuma: $y_{max}=3$.

Ezután lássunk egy módszeresebb megoldást is, amely bármely két másodfokú kifejezés hányadosára alkalmazható.

II. megoldás

Meghatározzuk az (1) *függvény értékkészletét: mely y értékekre van* (1)*-nek megoldása.*

A függvény minden valós x értékre értelmezett, mert nevezője $x^2+4x+5=(x+2)^2+1 \geqq 1$, ezért az átszorzással és átrendezéssel kapott

(2) $$(y-2)x^2+(4y-6)x+(5y-6)=0$$

kapcsolat az eredetivel ekvivalens. Innen

(3) $$x=\frac{-4y+6\pm\sqrt{-4y^2+16y-12}}{2(y-2)}.$$

$y=2$ esetén a (3) megoldóképlet nem alkalmazható, de (2)-ből látszik, hogy az $y=2$ értéket a függvény az $x=-2$ helyen veszi fel.

Ha $y \neq 2$, akkor a megoldóképlet alapján x akkor és csak akkor lesz valós, ha a diszkrimináns nem negatív. A diszkriminánst alakítsuk szorzattá:

$$-4(y-1)(y-3) \geqq 0, \quad \text{tehát} \quad (y-1)(y-3) \leqq 0.$$

Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $1 \leqq y \leqq 3$.

Az $y=3$ értéket a függvény az $x=-3$, az $y=1$ értéket az $x=-1$ helyen veszi fel.

Megjegyzés

Természetesen a differenciálszámítás is célhoz vezet, de az előbbieknél hosszadalmasabb módon. A II. megoldás módszere azért is szép, mert a lényegre utal, s más feladatoknál is alkalmazható addig, amíg másodfokú egyenletre vezet.

Az **I. megoldás** *b)* lépésére nehéz rájönni. Az

$$y=\frac{2(x^2+4x+5)-2x-4}{x^2+4x+5}=2-\frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1}$$

átalakításból egységesebb megoldáshoz juthatunk:

$$-1 \leqq \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1} \leqq 1 \quad \text{és} \quad -[(x+2)+1]^2 \leqq 0 \leqq [(x+2)-1]^2$$

egyenlőtlenségpárok ekvivalenciája a nevezővel való szorzás után, teljes négyzetté alakítással belátható. Ezután eredményeinket könnyen megkaphatjuk.

65. Legyen n adott természetes szám. Válasszuk meg a k és l nem negatív egészeket úgy, hogy összegük n-től különböző természetes szám legyen, továbbá

$$\frac{k}{k+l}+\frac{n-k}{n-(k+l)}$$

a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás

A feltételek szerint a K-val jelölt kifejezés első tagjára

(1) $$0 \leqq \frac{k}{k+l} \leqq 1.$$

Célunk elsősorban a második tag lehető legnagyobb értékének megkeresése lesz. Előbb azonban bizonyos óvatosságra van szükség, hogy ne hibázzunk.

Az áttekintést megkönnyíti a következő azonos átalakítás:

(2) $$K=\frac{k}{k+l}+\frac{n-k}{n-(k+l)}=\frac{k}{k+l}+1+\frac{l}{n-(k+l)}.$$

Innen azonnal látható, hogy ha

a) $n-(k+l)<0$, akkor $K\leqq 2$.

b) Ha $l=0$, akkor — minden szóba jövő n-re és k-ra — $K=2$.

c) Ha viszont $n-(k+l)\geqq 1$, és $1\leqq l$ is teljesül, akkor $n\geqq 2$, $l\leqq n-1$.

Ha $l=n-1$, akkor $k=0$ jön csak számításba:

$$K=\frac{k}{k+(n-1)}+1+\frac{n-1}{1-k}=n.$$

Ha viszont $0<l\leqq n-2$, akkor

$$\frac{l}{n-k-l}\leqq\frac{n-2}{1}\quad\text{és}\quad\frac{k}{k+l}<1.$$

$$K<1+1+n-2=n.$$

Összefoglaljuk az eredményeket:

Ha $n=1$, akkor K maximuma 2, és ezt $l=0$; $k=2, 3, 4, \ldots$ esetén veszi fel.

Ha $n=2$, akkor K maximuma 2, ezt $l=0$; $k=1, 3, 4, 5, \ldots$ esetén, vagy pedig $l=1$; $k=0$ esetén veszi fel.

Ha $n\geqq 3$, akkor K maximuma n, és ezt $l=n-1$; $k=0$ esetén veszi fel.

66. Mennyi a $K=5x-6y+7z$ kifejezés legkisebb és mennyi a legnagyobb értéke, ha x, y és z olyan nem negatív számok, melyekre fennáll

(1) $4x+y+2z=4$; (2) $3x+6y-2z=6$?

Megoldás

Fejezzük ki a három változótól függő K kifejezést egyetlen változóval, például x-szel.

(1) és (2) összeadásával: $7x+7y=10$,

(3) $$y=\frac{10}{7}-x.$$

Az y-ra kapott kifejezést (1)-be helyettesítve:

$$4x+\frac{10}{7}-x+2z=4,$$

(4) $$z=\frac{9}{7}-\frac{3}{2}x.$$

(3) és (4) alapján:

$$K=\frac{x}{2}+\frac{3}{7}.$$

A K kifejezés értéke x növekedésével nő, ezért a legkisebb és legnagyobb értékét ott veszi fel, ahol x minimális, illetve maximális.

A feltétel alapján x nem negatív, a 0 értéket viszont már felveheti, mert $x=0$ esetén (3) és (4) szerint y és z pozitívak. x minimális értéke tehát 0, és

$$K_{\min}=\frac{3}{7}.$$

Ahhoz, hogy y nem negatív legyen (3) miatt az $x\leqq\frac{10}{7}$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

Ahhoz, hogy z nem negatív legyen az $x\leqq\frac{6}{7}$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

x maximális értéke tehát $\frac{6}{7}$. Ezért $K_{\max}=\frac{6}{7}$. *(48. jegyzet)*

67. Válasszuk meg az a, b, c valós együtthagyókat úgy, hogy az

$$ax^2+bx+c$$

polinom minden -1 és 1 közti x-re -1 és 1 közé eső értéket vegyen fel, és

$$\frac{8}{3}a^2+2b^2$$

(ami egyébként a polinom deriváltja négyzetének a $[-1, 1]$ intervallumon vett határozott integrálja) a lehető legnagyobb legyen.

I. megoldás

Először megkeressük, milyen feltételeket kell kielégíteniük az a, b, c együtthatóknak, hogy

(1) $$-1\leqq x\leqq 1$$

mellett a polinom helyettesítési értékeire teljesüljön,

(2) $$-1\leqq ax^2+bx+c\leqq 1.$$

Látjuk majd, hogy a kikötés leginkább az a és b együtthatók kapcsolatára utal, hiszen csak tőlük függ, hogy az (1)*-hez tartozó legnagyobb és legkisebb függvényérték különbsége 2-nél ne legyen nagyobb. Ha ezt biztosítottuk, akkor alkalmas c együtthatóval mindig elérhető, hogy a függvényértékek* (2)*-t is kielégítsék.*

Ezután az a és b közti kapcsolat ismeretében számítjuk ki a

$$K=\frac{8}{3}a^2+2b^2$$

kifejezés legnagyobb értékét.

Feltehetjük, hogy a pozitív, b nem negatív. A K kifejezést ugyanis ez nem befolyásolja.

Ha a negatív és (1), (2) teljesül, akkor ezek a (-1)-gyel történő szorzás után is teljesülnek, akkor pedig x^2 együtthatója már pozitív lesz. Ha ezután még az első fokú tag együtthatója negatív, akkor $x'=-x$ helyettesítéssel olyan polinomot kapunk, hogy (1) és (2) teljesül az x' változóra, s most már az első fokú tag is pozitív.

Könnyen beláthatjuk, hogy az $a=0$ esetben $|b|=1$, $c=0$ mellett $K=2$ a legnagyobb, de később K-ra ennél nagyobb értéket is kapunk.

1. Ha $a>0$, az

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

azonosságból látszik, hogy a parabola csúcsának (x_0, y_0) koordinátáira

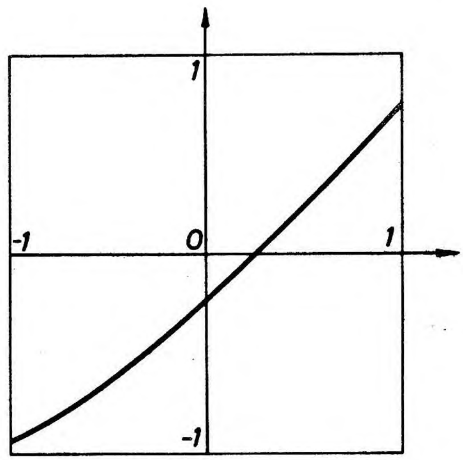
$$(3) \qquad x_0=-\frac{b}{2a}, \quad y_0=c-\frac{b^2}{4a}.$$

Két fontos esetet különböztetünk meg.

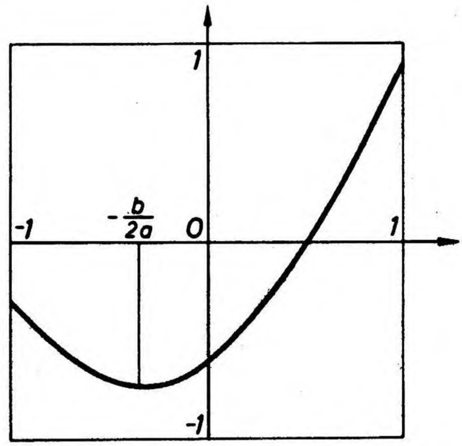
a) Ha $-\frac{b}{2a}\leqq -1$, azaz $0<2a\leqq b$ *(11/a ábra)*, akkor a polinom a $[-1, 1]$ szakasz végpontjaiban veszi fel szélsőértékeit, ezek különbsége akkor és csak akkor nem nagyobb 2-nél, ha — a polinomba helyettesítve —

$$2b\leqq 2, \quad b\leqq 1, \quad \text{vagyis} \quad a\leqq\frac{1}{2}.$$

Ekkor K legnagyobb értéke $\frac{8}{3}$, $b=1$, $a=\frac{1}{2}$, $c=-\frac{1}{2}$ mellett. Ez még nem lesz maximum.



a)



b)

11. ábra

b) Ha $-1<-\frac{b}{2a}\leqq 0$ azaz $0\leqq b<2a$ *(11/b ábra)*, akkor a polinom minimumát az $x_0=-\frac{b}{2a}$ helyen, maximumát a $+1$ helyen veszi fel. A kettő különbsége akkor és csak akkor nem nagyobb 2-nél, ha — helyettesítve —

$$a+b+\frac{b^2}{4a}\leqq 2, \text{ vagyis } (b+2a)^2\leqq 8a,$$

végül is a *b)* feltétellel együtt

(4) $$0\leqq b\leqq 2\left(\sqrt{2a}-a\right)<2a.$$

Könnyen látható, hogy a (4)-ből adódó

$$0\leqq 2\left(\sqrt{2a}-a\right)<2a$$

feltételeknek az alábbi a értékek felelnek meg

(5) $$\frac{1}{2}<a\leqq 2.$$

Rátérve K maximumának kiszámítására (4) és (5) alapján

(6) $$K=\frac{8}{3}a^2+2b^2\leqq\frac{8}{3}a^2+2\left[2\left(\sqrt{2a}-a\right)\right]^2=$$

$$=\frac{8}{3}\left(4a^2-6\sqrt{2a^3}+6a\right)\leqq\frac{32}{3}.$$

Ehhez megmutatjuk, hogy az $\frac{1}{2}<a\leqq 2$ intervallumban

$$f(a)=4a^2-6\sqrt{2a^3}+6a$$

szigorúan növekedő függvény, mert deriváltja itt pozitív *(25. jegyzet)*:

$$f'(a)=8a-9\sqrt{2a}+6=\left(2\sqrt{2a}-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{15}{16}>0.$$

Tehát $$f(a)\leqq f(2)=4.$$

(6), (5), (4), (3) alapján összefoglalhatjuk eredményünket.

Az (1) és (2) feltételek mellett a $\frac{8}{3}a^2+2b^2$ kifejezés maximuma $\frac{32}{3}$. Ez $a=2$, $b=0$, $=-1$ vagy $a=-2$, $b=0$, $c=+1$ mellett, tehát a $2x^2-1$ és a $-2x^2+1$ polinomokra lép fel.

II. megoldás

Meglepően egyszerű módszerrel becsülhetjük meg a $K=\frac{2}{3}a^2+(a+b)^2+$ $+(a-b)^2$ *kifejezés tagjait, ha az* $x=0$, $x=1$, $x=-1$ *értékeket helyettesítjük* (2)*-be, s az így nyert*

$$|c|\leqq 1, \quad |a+b+c|\leqq 1, \quad |a-b+c|\leqq 1$$

feltételeket alkalmazzuk.

Az első egyenlőtlenség alapján az utóbbi kettőből

$$(7) \qquad |a+b| = |(a+b+c)-c| \leqq 2,$$

$$(8) \qquad |a-b| = |(a-b+c)-c| \leqq 2$$

következik, ezekből pedig

$$(9) \qquad |a|=\frac{1}{2}\cdot|(a+b)+(a-b)|\leqq 2.$$

A (7)—(9) becslések alapján most már kapjuk, hogy

$$K\leqq\frac{2}{3}\cdot 4+4+4=\frac{32}{3},$$

és az egyenlőség jele pontosan akkor érvényes, ha

$$|a| = |a+b| = |a-b| = 2.$$

Ebből vagy $a=2$, $b=0$, majd

$$|a+c|\leqq 1 \quad \text{és} \quad |c|\leqq 1$$

alapján $c=-1$ következik, vagy pedig $a=-2$, $b=0$ és $c=1$ adódik.

A kapott $(2x^2-1)$ és $(-2x^2+1)$ polinomok valóban eleget tesznek a feladat követelményeinek.

Megjegyzés

1. A $2x^2-1$ polinom a másodfokú *Csebisev*-polinom. A *Csebisev*-polinomok kitüntetett szerepet játszanak a polinomok között, mert

— mint ebben a feladatban is — érdekes „szélsőérték jellegű" tulajdonságokkal rendelkeznek (ilyeneket látunk a [7] I. kötetének jegyzetei között, valamint [21] IV. kötetében).

A $T_n(x)$ n-edfokú *Csebisev*-polinomot így definiáljuk:

$$T_n(x) \equiv \cos\,[n \cdot \arc\cos\,(x)]; \quad x \in [-1, 1].$$

Megmutatható, hogy ez valóban n-edfokú, és x^n együtthatója 2^{n-1}. Jellegzetes a következő tétel:

A $P_n(x) \equiv x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ *polinom abszolút értékének a* $[-1, 1]$ *szakaszon felvett maximuma* (ezt hívják a $P_n(x)$ 0-tól való eltérésének $[-1, 1]$-ben) *nem kisebb* $\frac{1}{2^{n-1}}$*-nél*:

$$\max_{x \in [-1,1]} |P_n(x)| \geqq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $P_n(x) \equiv \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

A *Csebisev*-polinomok jelentős szerepet játszanak a függvények approximációjának (közelítésének) elméletében.

2. A feladat szövege már utal az alábbi általánosítási lehetőségre: *Melyik az az f függvény, amely a* $[-1, 1]$ *zárt szakaszon van értelmezve, itt* -1 *és* $+1$ *közötti értékeket vesz fel, az* f' *derivált létezik, az* $(f')^2$ *függvény integrálható és az*

(10) $$\int_{-1}^{1} [f'(x)]^2\, dx \quad \textit{integrál maximális?}$$

Az $f_k(x) = \cos k\pi x$ $(k = 1, 2, \ldots)$ függvénysorozat példája azonban mutatja, hogy a (10) integrál a k növekedésével akármilyen nagy lehet, a kérdéses függvényosztályt tehát szűkíteni kell. Ezt tette a feladat is, amikor csak a másodfokú polinomfüggvények között kereste azt, amelyre (10) maximális. Az olvasóra bízzuk, ellenőrizze fenti állításunkat, továbbá keresse meg szélsőérték-problémánk megoldását az n-edfokú polinomfüggvények körében.

3. Aritmetikai és számelméleti feladatok

68. Mutassuk meg, hogy — bármely természetes számot jelentsen is n — a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört sohasem egyszerűsíthető.

I. megoldás

Írjuk az adott törtet

$$\frac{21n+4}{14n+3}=1+\frac{7n+1}{14n+3}$$

alakba. Ha a jobb oldalon álló tört egyszerűsíthető, akkor a bal oldalon álló is, és fordítva. Egy tört akkor és csak akkor egyszerűsíthető, ha a (reciprok) fordított értéke is egyszerűsíthető. A jobb oldalon álló tört reciprok értéke így írható:

$$\frac{14n+3}{7n+1}=2+\frac{1}{7n+1}.$$

Az $\frac{1}{7n+1}$ tört nem egyszerűsíthető, tehát az eredeti tört sem.

II. megoldás

Megmutatjuk, hogy a számláló és a nevező legnagyobb közös osztója 1. Legyen $d \geqq 1$ a legnagyobb közös osztó egy tetszőleges n esetén. Akkor:

$$21n+4=sd,$$
$$14n+3=td.$$

Innen
$$42n+8=2sd,$$
$$42n+9=3td.$$

A különbség
$$1=(3t-2s)d.$$

De $0<\frac{1}{d}=3t-2s$ egész szám, ezért $d=1$, tehát a tört nem egyszerűsíthető *(6. jegyzet).*

69. Mi az utolsó 0-tól különböző jegye az első száz természetes szám szorzatának?

Megoldás

Előállítjuk a szorzat prímtényezős felbontását. Az első száz természetes szám között 50 páros szám van, közülül 25 4-gyel is, azok közül 12 még 8-cal is, 6 még 16-tal is, 3 még 32-vel is és végül 1 64-gyel is osztható A kérdéses szorzat tehát 2-nek az $50+25+12+6+3+1=97$-edik hatványával. osztható. Hasonló módon kiszámíthatjuk a többi törzsszám kitevőjét is.

Így kapjuk az első száz szám szorzatának prímfelbontását:

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots 99\cdot 100=2^{97}\cdot 3^{48}\cdot 5^{24}\cdot 7^{16}\cdot 11^{9}\cdot 13^{7}\cdot 17^{5}\cdot 19^{5}\cdot 23^{4}\cdot$$
$$\cdot 29^{3}\cdot 31^{3}\cdot 37^{2}\cdot 41^{2}\cdot 43^{2}\cdot 47^{2}\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 73\cdot$$
$$\cdot 79\cdot 83\cdot 89\cdot 97.$$

Ebből a szorzatból elhagyhatjuk a $2^{24}\cdot 5^{24}=10^{24}$ tényezőket, hiszen az utolsó nullától különböző jegy értéke evvel szorozva nem változik. A kétjegyű tényezők első jegyét és az 1-re végződő tényezőket szintén elhagyhatjuk, mert ezek nem befolyásolják a szorzat utolsó nullától különböző jegyét. Feladatunk tehát visszavezethető a következő szorzat utolsó jegyének kiszámítására:

$$2^{73}\cdot 3^{48}\cdot 7^{16}\cdot 3^{7}\cdot 7^{5}\cdot 9^{5}\cdot 3^{4}\cdot 9^{3}\cdot 7^{2}\cdot 3^{2}\cdot 7^{2}\cdot 3\cdot 9\cdot 7\cdot 3\cdot 9\cdot 3\cdot 9\cdot 7=$$
$$=2^{73}\cdot 3^{86}\cdot 7^{27}=16^{18}\cdot 2\cdot 81^{21}\cdot 3^{2}\cdot (49^{2})^{6}\cdot 7^{3}.$$

A 6-ra végződő szám minden hatványa 6-ra végződik, ennek 2-szerese 2-re végződik. A $(49^2)^6$ 1-re végződő szám hatodik hatványa, tehát 1-re végződik. Végül 7^3 3-ra végződik, s így a kérdéses számjegy a $2\cdot 9\cdot 3$ utolsó jegye, azaz 4.

Más megoldási lehetőség: Szorozzuk először össze a 2-re és 5-re végződő számokat!

70. Bizonyítsuk be, hogy $2^{2n}+15n-1$ osztható 9-cel, bármilyen természetes szám is n.

I. megoldás

A kérdésben szereplő $K(n)$ számot így írhatjuk:

$$K(n)=(4^n-1)+15n=(4-1)(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1)+15n=$$
$$=3[(4^{n-1}+5)+(4^{n-2}+5)+\ldots+(4+5)+(1+5)].$$

A szögletes zárójelen belül minden kéttagú összeg osztható 3-mal, mert $4^k+5=$ $=4^k-1+6$ és 4^k-1 osztható $4-1=3$-mal.

II. megoldás

Teljes indukcióval bizonyítunk.

$K(1)=2\cdot 9$. Feltesszük, hogy $K(n)$ osztható 9-cel.

$$K(n+1)=4^{n+1}+15(n+1)-1=4(4^n+15n-1)-45n+18=$$
$$=4K(n)-9(5n-2)$$ miatt ekkor $K(n+1)$ is osztható 9-cel.

III. megoldás (Vázlat)

A 9-cel való osztás maradékait táblázatba foglalva —

n	0	1	2	3	4	5	...
4^n	1	4	7	1	4	7	...
$15n$	0	6	3	0	6	3	...

— könnyen bebizonyíthatjuk, hogy a maradékok hármas periódusban ismétlődnek. Elegendő meggyőződnünk arról, hogy az állítás egy perióduson belül teljesül *(10. jegyzet)*.

71. Bizonyítsuk be, hogy ha n tetszőleges természetes szám, akkor $5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$ osztható 8-cal.

I. megoldás

Külön választjuk a páros és páratlan esetet.

Legyen $F(n)=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$.
a) Ha $n=2k$ (azaz n páros), ahol $k=1, 2, \ldots$, akkor

$$F(2k)=(5^{2k}-1)+2(3^{2k-1}+1).$$

Itt az ismert oszthatósági tételek szerint az első zárójelben levő különbség osztható $5^2-1^2=24=3\cdot 8$-cal, a második zárójelben levő összeg pedig osztható $3+1=4$-gyel. Tehát $F(2k)$ valóban osztható 8-cal.

b) Ha $n=2k+1$, ahol $k=0, 1, 2, \ldots$, akkor $k=0$ esetén $F(1)=8$, minden más esetben pedig

$$F(2k+1)=5^{2k+1}-5+2\cdot 3^{2k}+6=5(5^{2k}-1)+6(3^{2k-1}+1).$$

Itt az első tag osztható az előbbiek szerint 24-gyel, a második tag pedig szintén osztható $6\cdot 4=24$-gyel.

II. megoldás

Teljes indukciót alkalmazunk.

$n=1$-re az állítás igaz, mert $F(1)=8$. Tegyük fel, hogy $F(k)$ osztható 8-cal. Ekkor elég igazolni, hogy $F(k+1)-F(k)$ is osztható vele, mert ebből már következik az állítás.

$$F(k+1)-F(k)=(5^{k+1}+2\cdot 3^k+1)-(5^k+2\cdot 3^{k-1}+1)=$$
$$=4(5^k+3^{k-1}).$$

Két páratlan szám összege páros, tehát az utóbbi valóban osztható $4 \cdot 2 = 8$-cal *(10. jegyzet)*.

72. *a)* Melyek az n összes olyan pozitív egész értékei, melyekre $2^n - 1$ osztható 7-tel?

b) Bizonyítsuk be, hogy $2^n + 1$ sohasem osztható 7-tel, bármilyen pozitív egész számot jelentsen is n.

I. megoldás

a) n helyére az első tíz természetes számot véve, $2^n - 1$ értéke

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023,$$

és ezek 7-tel osztva rendre a következő maradékot adják:

$$1, 3, 0, 1, 3, 0, 1, 3, 0, 1.$$

Nézzük meg, hogy a maradékoknak ez a periodikus ismétlődése folytatódik-e. Ha $n = 3k$, ahol k természetes szám, akkor

$$2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1^k = (8-1)A = 7A.$$

Itt A egész szám, mert bármely pozitív egész k kitevő esetén $a^k - b^k$ osztható $a - b$-vel.

$$n = 3k + 1 \qquad \text{és} \qquad n = 3k + 2$$

esetén pedig

$$2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{3k} - 1 = 2(2^{3k} - 1) + 1 = 2 \cdot 7 \cdot B + 1 = 7C + 1,$$

$$2^{3k+2} - 1 = 2^2 \cdot 2^{3k} - 1 = 4(2^{3k} - 1) + 3 = 4 \cdot 7 \cdot D + 3 = 7E + 3,$$

ahol B és D az első eset szerint egész számok, ezért C és E is egész számok. Ezzel bebizonyítottuk, hogy pozitív egész n esetén $2^n - 1$ akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha n osztható 3-mal.

b) $2^n + 1 = (2^n - 1) + 2$, így 7-tel való osztásnál a maradék az előzők szerint sohasem 0, ugyanis $n = 3k$ esetén a maradék 2, $n = 3k + 1$ esetén 3, $n = 3k + 2$ esetén pedig 5.

Az előző megoldás gondolatmenetét rövidebb formába önti a

II. megoldás

Az n pozitív egész szám mindig írható $n = 3k + r$ alakban ($k = 0, 1, 2, \ldots$, $r = 0, 1, 2$).

Ekkor $2^n = 2^{3k+r} = 2^r(2^{3k} - 1) + 2^r = 7 \cdot A + 2^r$, ahol A egész szám. r helyére 0-, 1-,

2-t behelyettesítve, láthatjuk, hogy 2^n-t 7-tel osztva, 1-, 2-, 4-et kapunk maradékul.

Ezután megfogalmazhatjuk eredményünket:

2^n-1 akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha $n=3k$ alakú, 2^n+1 pedig n semmilyen értéke mellett sem osztható 7-tel (*10. jegyzet*).

Megjegyzés

1. Eredményünket teljes indukcióval is igazolhatjuk.

2. Általánosítási lehetőség: a^n-1 mikor osztható a^k-1-gyel?

73. k-nak mely pozitív egész értékei mellett lesz az $N=3^{6n-1}-k\cdot 2^{3n-2}+1$ kifejezés n minden pozitív egész értékére osztható 7-tel?

Megoldás

Ha N minden n-re osztható 7-tel valamilyen k érték mellett, akkor n=1-re is osztható, tehát

$$3^5-2k+1=244-2k=2(122-k)=7m.$$

$(122-k)=7\cdot 18-(k+4)$ akkor osztható 7-tel, ha $k=7l+3$ alakú ($l=0$, 1, 2, ...).

N 7-tel való oszthatóságának szükséges feltétele tehát, hogy a k 7-tel osztva 3-at adjon maradékul.

Megmutatjuk, hogy ez elégséges is.

$$N=3^{6n-1}-k\cdot 2^{3n-2}+1=3^{6n-1}-k\cdot 2^{3n-2}+1-$$
$$-(3^5-2k+1)+(3^5-2k+1)=3^5[3^{6(n-1)}-1]-$$
$$-2k[2^{3(n-1)}-1]+(3^5-2k+1).$$

A jobb oldal első tagja osztható $3^6-1=26\cdot 28$-cal, tehát 7-tel is. A második tag osztható $2^3-1=7$-tel. N tehát akkor és csak akkor osztható minden n-re 7-tel, ha 3^5-2k+1 is osztható 7-tel. Ennek pedig az volt a feltétele, hogy k 7-tel osztva 3-at adjon maradékul.

Megjegyzés

A feladatot az n-re vonatkozó teljes indukcióval is megoldhatjuk.

74. Bizonyítsuk be, hogy ha 3^n+1 osztható 2^n-nel, akkor n csak 1 lehet.

Megoldás

Ha az $n=1, 2, 3, 4$ értékeket behelyettesítjük, megsejthetjük, hogy 3^n+1 már $2^3=8$-cal sem osztható. Ezt az állítást fogjuk bebizonyítani. Ebből már a feladat állítása is következik, hiszen ha $n\geqq 3$ mellett 3^n+1, osztható lenne 2^n-nel, akkor $2^3=8$-cal is osztható lenne. Az $n=2$ esetben $3^2+1=10$ sem osztható $2^2=4$-gyel, $n=1$-re viszont $3+1$ osztható 2-vel.

Vizsgáljuk a 3^n számokat a 8-cal való oszthatóság szempontjából. Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy a maradék 3 és 1. Feltéve, hogy $n\geqq 2$, érvényes

$$3^n=(8+1)\cdot 3^{(n-2)},$$

és ebből kiolvasható, hogy 3^n és 3^{n-2} 8-cal osztva ugyanazt a maradékot adja.

Tehát $3^1, 3^3, \ldots, 3^{2k+1}$ maradéka 3; $3^0, 3^2, \ldots, 3^{2k}, \ldots$ maradéka 1.

Ha tehát $n=2k+1$, 3^n+1 maradéka 4; ha $n=2k$, 3^n+1 maradéka 2. Beláttuk, hogy a maradék nem 0, 3^n+1 nem osztható 8-cal, s ezzel a feladatot is megoldottuk.

Megjegyzés

Ugyanezzel a gondolatmenettel több hasonló feladat is megoldható, például 5^n+1 nem osztható 8-cal. Készítsünk további hasonló jellegű feladatokat *(10. jegyzet)*.

75. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a természetes szám van, amely a következő tulajdonságú: bármilyen természetes számot jelöljön is n, a $z=n^4+a$ szám sohasem törzsszám.

Megoldás

Az a célunk, hogy a helyére olyan n-től független egész együtthatós polinomot írjunk, melyre z szorzattá alakítható.

$a=4b^4$ megfelelő, mert

$$z=n^4+a=n^4+4b^4=(n^2+2b^2)^2-4n^2b^2=(n^2+2b^2)^2-(2nb)^2=$$
$$=(n^2+2b^2+2nb)(n^2+2b^2-2nb)=[(n+b)^2+b^2][(n-b)^2+b^2].$$

Ha $b>1$ is természetes szám, akkor z mindkét tényezője 1-nél nagyobb természetes szám, hiszen b^2-nél nagyobbak a tényezők.

Ez azt jelenti, hogy $a=4b^4$ $(b=2, 3, 4, \ldots)$ végtelen sok olyan számot jelent, hogy tetszőleges n mellett

$$z=n^4+a \text{ összetett szám.}$$

Megjegyzés

Ez a feladat *Sophie Germain* francia matematikus, írónő (1776—1831) következő tételének általánosítása: n^4+4 semmilyen 1-nél nagyobb természetes számra nem lehet prímszám.

76. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amely a következő tulajdonságú: Az $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ halmaz úgy bontható fel két, közös elemet nem tartalmazó és nem üres részhalmazra, hogy az egyik részhalmaz elemeinek szorzata egyenlő a másik részhalmaz elemeinek szorzatával.

Több próbálkozás után kialakul a sejtés, hogy nincsen a feladat követelményeit kielégítő n egész szám, mégpedig azért nincs, mert — ha a számokat prímtényezők szorzataként írjuk fel — van olyan prímtényező, amelyik csak az egyik számban szerepel, a többiben nem fordul elő. Ez pedig — az egyértelmű prímfelbontás tétele szerint — kizárja a számok kívánt csoportosításának lehetőségét (8. jegyzet).

I. megoldás

Ha a feladat követelményeinek megfelelő csoportosítás lehetséges volna, akkor számok prímtényezős felbontásában 5-nél nagyobb prímek nem szerepelhetnek, hiszen 6 egymás után következő szám között ilyen prímtényező csak egyben fordulhatna elő. Az 5-ös tényező n-ben és $(n+5)$-ben szerepelne.

Az 1-nél nagyobb $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$ számokban csak a 2 és 3 szerepelhetne prímtényezőként. Két szomszédos szám viszont biztosan relatív prím, nem tartalmazhat közös prímtényezőket *(6. jegyzet)*.

Így az előbbi négy szám között két második szomszéd 2-nek hatványa lenne, és ugyancsak két második szomszéd 3-nak hatványa lenne. Ez viszont lehetetlen; ha egy szám 3-mal osztható, a nála kettővel nagyobb szám nem osztható 3-mal.

Az ellentmondás igazolja, hogy a feladatban megkívánt n egész nem létezik.

II. megoldás

Tegyük fel, hogy a hat számot a feladat kívánalmainak megfelelően két részre bontottuk. Osszuk el mindegyik számot 7-tel, és nézzük meg a maradékokat.

Tudjuk, hogy a számok szorzatának maradéka egyenlő a maradékok szorzatával, tehát a két rész elemeinek szorzata ugyanazt a maradékot adja. Jelöljük ezt x-szel. *Ha minden számot összeszorzunk, akkor ennek maradéka nyilván x^2 maradékával egyezik meg.*

A hat egymás után következő szám között csak egynek a maradéka lehetne 0, de akkor a részekre bontás nyilván nem lehetséges. Ezért a hat szám maradéka csak 1, 2, 3, 4, 5, 6 lehet, a maradékok szorzata 720, ez 7-tel osztva 6-ot ad

maradékul. A maradékok négyzetének maradéka pedig rendre 1, 4, 2, 2, 4, 1, a 6-os nem szerepel. Ellentmondásra jutottunk, a kívánt részekre bontás nem lehetséges.

Megjegyzés

1. A második megoldásnál a kongruenciák nyelvén azt használtuk fel, hogy tetszőleges p prímszámra $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$. Ez *Wilson* tétele. Felhasználtuk még, hogy az $x^2 \equiv -1 \pmod p$ egyenletnek nincs megoldása, ha $p=7$. Az utóbbi azonban nem minden p prímszámra igaz, pl. $4^2 \equiv -1 \pmod{17}$ *(11. jegyzet).*

2. A feladatot még jobban általánosíthatjuk, ha az első megoldás előtt vázolt tételt általánosan igazoljuk.

Tetszőlegesen megadva k darab egymás utáni számot, van olyan prímszám, amely közülük csak egynek osztója *(9. jegyzet).*

77. Legyen k, m és n három pozitív egész szám, $m+k+1$ az $(n+1)$-nél nagyobb törzsszám, továbbá $c_s=s(s+1)$, ahol $s=1, 2, \ldots$. Bizonyítsuk be, hogy a következő szorzat:

(1) $$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\ldots(c_{m+n}-c_k)$$

osztható az alábbi szorzattal:

(2) $$c_1c_2\ldots c_n.$$

Megoldás

Vizsgáljuk meg az (1) *szorzat egyik tényezőjét,* például a (c_a-c_b) kifejezést, ahol a feltétel szerint $c_a=a(a+1)$, $c_b=b(b+1)$. Így

$$\begin{aligned}c_a-c_b&=a(a+1)-b(b+1)=a^2+a-b^2-b=\\&=a^2-b^2+a-b=(a-b)(a+b)+a-b=\\&=(a-b)(a+b+1).\end{aligned}$$

Ezek szerint

$$(c_{m+1}-c_k)(c_{m+2}-c_k)\ldots(c_{m+n}-c_k)=$$
$$=[(m+1-k)(m+k+2)][(m+2-k)(m+k+3)]\ldots[(m+n-k)(m+k+n+1)].$$

Rendezzük át a jobb oldali szorzatot:

$$[(m-k+1)(m-k+2)\ldots(m-k+n)][(m+k+2)(m+k+3)\ldots(m+k+n+1)]=$$
$$=AB;$$

az
$$(m-k+1)(m-k+2)\ldots(m-k+n)=A,$$
$$(m+k+2)(m+k+3)\ldots(m+k+n+1)=B$$

jelölést alkalmaztuk.

Alakítsuk át a (2) szorzatot, és használjuk fel a definíció szerinti $c_s = s(s+1)$ összefüggést:

$$c_1 c_2 \ldots c_n = 1(1+1)2(2+1)\ldots n(n+1).$$

Ezt átalakítva:

$$[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n][2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)] = n!(n+1)! = CD,$$

ahol $C = n!$, $D = (n+1)!$.

Azt kell bebizonyítanunk, hogy AB osztható CD-vel. Felhasználjuk, hogy n darab egymás utáni természetes szám szorzata osztható n!-sal (9. jegyzet).

Ez belátható a binomiális együtthatók tulajdonsága alapján. Ha $k \geqq n$, $\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}$ egész szám. Az A osztható C-vel, $(m+k+1)B$ osztható D-vel.

Megmutatjuk, hogy B is osztható D-vel. Itt használjuk fel, hogy $m+k+1 > n+1$ és $m+k+1$ prímszám.

Tekintsük ugyanis az $\frac{(m+k+1)B}{1 \cdot 2 \cdot \ldots n(n+1)}$ egész számot. Az $m+k+1$ prímszám nagyobb a nevezőben levő tényezők mindegyikénél. Ez csak akkor lehetséges, ha a nevező B-nek osztója, különben ellentmondáshoz jutunk.

De akkor AB osztható CD-vel, és ezzel a feladatot megoldottuk.

78. Bizonyítsuk be, hogy bármely 7 egész szám közül kiválasztható 4, amelynek az összege osztható 4-gyel.

I. megoldás

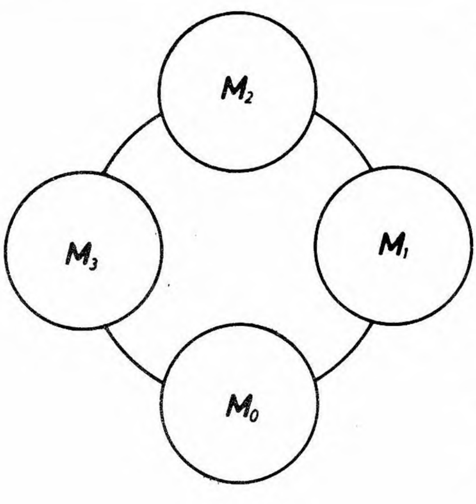
A hét számot 4 „skatulyába" osztjuk aszerint, hogy 4-gyel osztva őket a maradékuk 0, 1, 2 vagy 3.

E skatulyákat a továbbiakban M_0, M_1, M_2, M_3 jelöli. Célszerű, ha ezeket egy kör mentén felrajzoljuk *(12. ábra). Könnyen megállapíthatjuk, hogy a következő esetekben kiválasztható olyan négy szám, melyeknek összege osztható 4-gyel.*

a) Valamelyik skatulyában van 4 szám.

b) Valamelyik két szemköztes skatulyában van 2—2 szám.

c) Valamelyik skatulyában van 2 szám, a szomszédos skatulyákban van 1—1 szám. Az *a)* esetben ez nyilvánvaló, a *b)* és *c)* esetben elegendő, ha rámutatunk arra, hogy az azonos skatulyában levő két szám összege ugyanannyi maradékot ad, mint a másik két szám összege, négyen együtt tehát annyi



12. ábra

maradékot adnak, mintha egy skatulyából adtunk volna össze négy számot.

Most nézzük, hogyan helyezkedhet el a hét szám a 4 skatulyában.

(I.) Ha 1-nél több üres skatulya van, akkor feltétlenül lenne olyan skatulya, melyben négy szám lenne, az *a)* esethez jutunk.

(II.) Ha 1 üres skatulya van, és nincs háromnál több szám azonos skatulyában, akkor viszont *b)* vagy *c)* egyike (esetleg mindkettő) feltétlenül teljesül; mégpedig *b)* teljesül, ha az üressel szemközti skatulyában csak egy szám van, *c)* teljesül a többi esetben.

(III.) Ha nincs üres skatulya, akkor *c)* feltétlenül teljesül, hiszen valamelyik skatulyába két szám kerül.

II. megoldás

A feladat állítása a következő tétel speciális esete: Bármely $(2n-1)$ egész szám közül kiválasztható n, amelyeknek összege osztható n-nel.

Megoldásunkban megmutatjuk, hogy ez igaz, ha $n=2^k$ és k tetszőleges természetes szám. Ezzel feladatunk állítását is bebizonyítjuk, hiszen $k=2$ mellett $n=4$, és $n=4$ mellett a fenti tétel éppen feladatunk állítását mondja ki.

Ha $k=1$, $n=2$, akkor $2n-1=3$ szám közül valóban kiválasztható 2, amelyeknek az összege páros, hiszen 3 szám között vagy két páros, vagy két páratlan szám van: két páros vagy két páratlan szám összege pedig páros.

Megmutatjuk, hogy ha igaz a tétel valamely $n=m$ természetes számra, akkor igaz $n=2m$ mellett is. Legyen adva tehát $4m-1$ egész szám. Mivel $n=m$ mellett tételünk igaz, ezek közül kiválasztható m, amelyeknek összege osztható m-mel. Képezzünk ebből az m számból egy csoportot, melyet A_1 csoportnak nevezünk. Az A_1 csoport elemeinek összege tehát osztható m-mel, tehát $a_1 \cdot m$ alakú.

Hagyjuk el az A_1 csoport elemeit az eredeti $4m-1$ szám közül, marad $3m-1$ szám. Ezek közül ismét kiválaszthatunk m-et (A_2 csoport), melyek összege osztható m-mel, mondjuk $a_2 \cdot m$ alakú. Hagyjuk el az A_2 csoport elemeit is az eredeti számok közül, marad $2m-1$ szám. Ezek közül is kiválasztható m egész szám (A_3 csoport), melyek összege $a_3 \cdot m$.

Az a_1, a_2, a_3 egész számok közül — mivel a tétel $n=2$ mellett igaz — ki-

választható kettő, melyek összege páros. Ekkor a megfelelő két csoport elemeit egyesítve, $2m$ számot kapunk, melyek összege osztható $2m$-mel.

Mivel $n=2$ mellett a tétel igaz, ezért igaz $n=2\cdot 2=4$ mellett, sőt — teljes indukcióval — $n=2^k$ mellett is.

Megjegyzés

1. Hasonló módon mutatható meg, hogy ha igaz a tétel $n=p$ és $n=q$ mellett, akkor $n=p\cdot q$ mellett is igaz. A $2pq-1$ szám közül ugyanis kiválaszthatunk q számút, melyek összege q-val osztható. Alkossák ezek az A_1 csoportot, összegük legyen a_1q. A_1 elemeit elhagyva, a visszamaradókból hasonló módon képezhetjük az A_2, A_3, ..., A_{2p-1} csoportokat, melyek elemeinek összege rendre a_2q, a_3q, ..., $a_{2p-1}q$.

Az a_1, a_2, ..., a_{2p-1} egész számok közül pedig kiválaszthatunk p-számút, melyek összege osztható p-vel. A megfelelő csoportokban együtt $p\cdot q$ elem van, melyek összege osztható $p\cdot q$-val, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Elegendő tehát tételünket prímszámokra bizonyítani. Az első prímszámra, $n=2$-re már elvégeztük a bizonyítást, nem okoz gondot az $n=3$ eset sem, a további prímszámokra azonban egyre nehezebb lesz a bizonyítás.

Tételünk $(2n-1)$-nél kevesebb számra nem igaz.

Legyen ugyanis $(2n-2)$ szám közül $n-1$ osztható n-nel, és a többi n-nel osztva adjon 1 maradékot. Ezek közül nem választható ki n úgy, hogy összegük n-nel osztható legyen.

2. Mindezek alapján felvetődik a következő, nagyon nehéznek látszó kérdés. *Hány egész számot kell megadnunk, hogy közülük mindig kiválasztható legyen m szám úgy, hogy ezek összege osztható legyen n-nel.* A keresett, m-től és n-től függő számot jelöljük $f(m, n)$-nel. Az előbbi tételünk szerint $f(n, n)=2n-1$.

Igaz, hogy a feladat teljes általánosságban nagyon nehéznek látszik, m és n konkrét (kicsiny) értékei mellett $f(m, n)$ meghatározása több, szép középiskolai szintű feladatra vezet.

79. Legyen a és b egész szám. Bizonyítandó, hogy x^2+ax+b csak akkor állíthat elő végtelen sok x értékre négyzetszámot, ha a kifejezés egy elsőfokú polinom négyzete.

Megoldás

Legyenek x és y olyan egész számok, amelyekre

$$x^2+ax+b=y^2.$$

Ekkor

$$4x^2+4ax+4b=4y^2;$$
$$(2x+a)^2+4b-a^2=(2y)^2;$$
$$4b-a^2=(2y+2x+a)(2y-2x-a).$$

Ha $4b-a^2 \neq 0$, akkor csak véges sokféleképpen bontható két egész szám szorzatára, és egy-egy ilyen felbontás már egyértelműen meghatározza x-et és y-t. Ekkor tehát csak véges olyan sok x lehet, melyre x^2+ax+b négyzetszám. Ezek szerint csak $4b-a^2=0$ lehetséges.

Ha $4b-a^2=0$, akkor a páros és $4x^2+4ax+4b=(2x+a)^2$.

Tehát $x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$. Ez pedig minden egész x-re négyzetszámot állít elő.

Megjegyzés

1. *Pósa Lajos:* Megjegyzés egy versenyfeladathoz (Középiskolai Matematikai Lapok XX. 1960. 91—94. oldal) c. cikkében a következő formában általánosította a feladatot: *Ha egy n-edfokú egész együtthatós polinomban a legmagasabb fokú tag együtthatója* 1 *és a polinom értéke végtelen sok egész helyen egész szám n-edik hatványa, akkor a polinom egy egész együtthatós első fokú polinom n-edik hatványa (15. jegyzet).*

Bizonyításának gondolatmenete a következő:

a) A $g(x)\equiv c_0x^k+c_1x^{k-1}+\ldots+c_{k-1}x+c_k$ polinomhoz van olyan K pozitív szám, hogy $x>K$-ra $g(x)$ előjele c_0 előjelével egyezik meg.

b) $(x+d)^n=x^n+ndx^{n-1}+\ldots+d^n$.

c) Ha az $f(x)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ polinom nem $(x+d)^n$ alakú, és a_1 együtthatójára $d\leqq\frac{a_1}{n}<d+1$, akkor *a)* és *b)* alapján van olyan K pozitív szám, hogy $x>K$-ra

$$(x+d)^n<f(x)<(x+d+1)^n, \text{ vagy}$$
$$(x+d-1)^n<f(x)<(x+d)^n \text{ teljesül.}$$

Hasonló becslést adhatunk a negatív x-ekre is.

d) Ekkor azonban $f(x)$ legfeljebb egy $-K_0\leqq x\leqq K_0$ szakasz egész számaira — tehát véges sok egész x-re — lehet n-edik hatvány, hiszen a szakaszon kívüli egész x-ekre két szomszédos szám n-edik hatványa között van.

2. A fenti gondolatmenetet $n=2$-re alkalmazva, feladatunknak egy az elsőtől különböző, másik megoldásához jutunk.

80. Bizonyítsuk be, hogy ha az

(1) $$ax^2+bx+c=0$$

egyenlet valamennyi együtthatója páratlan szám, akkor az egyenlet gyökei nem racionálisak.

I. megoldás

Tegyük fel a bizonyítandó állítással ellentétben, hogy egy tovább már nem egyszerűsíthető $\frac{p}{q}$ racionális szám kielégíti (1)-et. *Be fogjuk látni, hogy feltevésünk ellentmondáshoz vezet.*

Feltevésünk szerint:

$$a\frac{p^2}{q^2}+b\frac{p}{q}+c=0.$$

Innen, q^2-tel szorozva:

(2) $$ap^2+bpq+cq^2=0.$$

1. Ha p és q is páratlan, akkor a bal oldal minden tagja páratlan, mert páratlan számok szorzata páratlan. Három páratlan szám összege páratlan, a jobb oldal viszont páros.

2. Ha p és q közül az egyik páros, a másik páratlan, akkor a bal oldalon két tag páros, egy páratlan. A bal oldal ebben az esetben is páratlan, mert két páros és egy páratlan szám összege páratlan.

3. Ha p és q is páros, akkor feltevésünkkel ellentétben a $\frac{p}{q}$ tört 2-vel egyszerűsíthető.

Tehát (2) nem teljesülhet, ezért nem létezik olyan $\frac{p}{q}$ tovább nem egyszerűsíthető racionális szám, ami gyöke lenne (1)-nek. Tehát (1)-nek nincs racionális gyöke.

II. megoldás (Útmutatás)

Az (1) *egyenlet gyökei csak akkor racionálisak, ha a D diszkrimináns négyzetszám. A $D=b^2-4ac$ viszont* 8-*cal osztva* 5 *maradékot ad, ez pedig a négyzetszámok maradékai között nem fordul elő.*

Megjegyzés

Az I. megoldás szellemében könnyen általánosíthatjuk feladatunkat:

Ha az $$a_0x^{2k}+a_1x^{2k-1}+\ldots+a_{2k-1}x+a_{2k}=0$$

egyenlet együtthatói páratlan számok, akkor az egyenletnek nincs racionális gyöke.

81. Egy egész együtthatós másodfokú egyenletben az ismeretlent tartalmazó két tag együtthatóinak összege páros, az ismeretlent nem tartalmazó tag pedig páratlan szám. Bizonyítandó, hogy az egyenletnek racionális gyöke csak olyan tört lehet, melynek legegyszerűbb alakjában a nevező páros szám.

Megoldás

Legyen a szóban forgó egyenlet

(1) $$ax^2+bx+c=0,$$

ahol $a+b$ páros, c páratlan.

$a+b$ csak úgy lehet páros, ha a és b paritása megegyezik. Az előző, **80.** feladatban láttuk, hogy ha (1)-ben minden együttható páratlan, akkor (1)-nek nincs racionális gyöke. Tegyük fel tehát, hogy a, b párosak, c páratlan és a $\frac{p}{q}$ tört kielégíti (1)-et, továbbá $\frac{p}{q}$ már nem egyszerűsíthető.

A $\frac{p}{q}$ gyököt (1)-be helyettesítve és q^2-tel szorozva,

$$ap^2+bpq+cq^2=0.$$

Itt a bal oldalon az első két tag a és b párossága miatt páros, kell, hogy cq^2 is páros legyen. Mivel c páratlan, cq^2 csak q párossága esetén lehet páros. Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés

1. A feladat feltételei mellett lehet racionális gyöke az egyenletnek. Például a $4x^2-16x+7=0$ egyenletnek a gyökei $\frac{1}{2}$ és $\frac{7}{2}$.

2. A feladat feltételei mellett nincs mindig racionális gyöke az egyenletnek.

82. Legyen n olyan természetes szám, amelyik nem köbe racionális számnak. Bizonyítsuk be, hogy
a) egyetlen olyan $x^3+ax^2+bx+c=0$ alakú racionális együtthatós egyenlet van, amelyiknek

$x_0=\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}$ gyöke;

b) ennek az egyenletnek nincs más valós gyöke.

Megoldás

Vezessük be az $\alpha=\sqrt[3]{n}$ jelölést. Ekkor α gyöke a következő egész együtthatós egyenletnek

(1) $$x^3-n=0.$$

Lényeges a következő segédtétel: α nem lehet gyöke 3-nál alacsonyabb fokú racionális együtthatós egyenletnek (20. jegyzet).

A segédtételt indirekt módon bizonyítjuk.

1. Ha α egy elsőfokú racionális együtthatós egyenletet elégítene ki, akkor α racionális lenne, s ez ellentmond az n-re vonatkozó föltevésnek.

2. Ha $p\neq 0$, q, r racionális együtthatók mellett teljesülne

(2) $$p\alpha^2+q\alpha+r=0,$$

akkor α-val szorozva, $\alpha^3=n$ figyelembevételével teljesülne

(3) $$q\alpha^2+r\alpha+pn=0.$$

Szorozzuk meg a (2) egyenletet q-val, a (3) egyenletet p-vel, majd vonjuk ki őket egymásból:

(4) $$\alpha(q^2-pr)+(rq-np^2)=0.$$

Ha $q^2-pr\neq 0$, akkor az 1. esethez, azaz ellentmondáshoz jutnánk. Ellenkező esetben a következő egyenletrendszer állna fenn:

(5) $$\begin{aligned} q^2&=pr\\ rq&=np^2. \end{aligned}$$

Az elsőt q-val, a másodikat p-vel szorozva, $n=\left(\frac{q}{p}\right)^3$-hoz jutunk, ami megint ellentmondás.

Elmondhatjuk tehát, hogy a (2) *összefüggés csak* $p=0$, $q=0$, $r=0$ *mellett teljesülhet.* Ezt fogjuk felhasználni.

a) *A tétel bizonyítása:* Előbbi jelölésünkkel:

$$x_0=\alpha+\alpha^2.$$

Hogyan válasszuk meg az a, b, c racionális számokat, hogy x_0 kielégítse az

(6) $$x^3+ax^2+bx+c=0$$

egyenletet?

Helyettesítsük be x_0 értékét, majd az $\alpha^3=n$ egyszerűsítés után rendezzünk az α hatványai szerint:

$$0=(\alpha+\alpha^2)^3+a(\alpha+\alpha^2)^2+b(\alpha+\alpha^2)+c=$$

$$(7) \qquad =n+3n\alpha+3n\alpha^2+n^2+a\alpha^2+2an+an\alpha+b\alpha+b\alpha^2+c=$$

$$=\alpha^2(3n+a+b)+\alpha(3n+an+b)+(n^2+2an+n+c).$$

α-ra másodfokú racionális együtthatós egyenletet kaptunk. Segédtételünk szerint teljesülnie kell a következő egyenletrendszernek:

$$(8) \qquad \begin{aligned} 0&=3n+a+b \\ 0&=3n+an+b \\ 0&=n^2+2an+n+c. \end{aligned}$$

(8) első két egyenletéből $a(n-1)=0$, s mivel $n\neq 1$ — hiszen n nem racionális szám köbe —, ezért az

$$(9) \qquad a=0, \quad b=-3n, \quad c=-n-n^2.$$

A keresett racionális együtthatós harmadfokú egyenlet:

$$(6') \qquad x^3-3nx-n-n^2=0.$$

A b) *tétel bizonyítása*

Az (1) egyenletnek α-n kívül még két komplex gyöke van

$$\beta=\sqrt[3]{n}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \gamma=\sqrt[3]{n}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy az

$$y_0=\beta+\beta^2 \quad \text{és} \quad z_0=\gamma+\gamma^2$$

egymástól különböző komplex számok kielégítik a (6') egyenletet, hiszen ha az előbbi helyettesítési gondolatmenetet α helyett β-val vagy γ-val végigkövetjük, nem változik az eredmény. Ugyanis α-ról csak azt használtuk fel, hogy kielégíti az (1) egyenletet, nála alacsonyabb fokú egyenletet viszont nem elégít ki. Ez pedig (1) bármely gyökére ugyanúgy bizonyítható.

(6')-nek viszont csak 3 gyöke lehet, azaz x_0, y_0, z_0 a három gyök, s ezek közül csak egy valós, a másik kettő komplex.

83. Mutassuk meg, hogy a

$$\sin x+\sin\left(x\sqrt{2}\right)$$

függvény nem periodikus. — (Periodikusnak mondjuk az f függvényt p periódussal, ha minden x-re $f(x+p)=f(x)$.)

Megoldás

Az állítást indirekt módon igazoljuk. A függvény zérushelyeit határozzuk meg, s megmutatjuk, hogy ezek nem lehetnek periodikus függvény zérushelyei.

A $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosságot felhasználva,

(1) $$\varphi(x)=\sin x+\sin\left(x\sqrt{2}\right)=2\sin\left(x\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)\cos\left(x\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right).$$

A zérushelyekre $x\frac{\sqrt{2}+1}{2}=m\pi$, vagy $x\frac{\sqrt{2}-1}{2}=(2n+1)\frac{\pi}{2}$; tehát

(2) $$x=m[2\pi(\sqrt{2}-1)],$$

(3) $$x=\pi(\sqrt{2}+1)+n[2\pi(\sqrt{2}+1)].$$

Tegyük fel, hogy a $\varphi(x)$ függvény periodikus, és p a periódus. Ez azt jelenti, hogy a függvény értelmezési tartományát, a számegyenest ,,feltekerhetjük'' egy p kerületű k körre, az egymást fedő pontokhoz ugyanaz a függvényérték tartozik.

Vizsgáljuk meg most már a (2) és (3) zérushelyeket a k kör kerületén. Világos, hogy a számegyenes tetszőleges p hosszúságú szakaszán véges sok zérushely van, tudniillik azok $2\pi(\sqrt{2}-1)$, ill. $2\pi(\sqrt{2}+1)$ közökben követik egymást. Így a k kör kerületén is véges sok zérushely van. Ezzel jutunk ellentmondásba a következőképpen.

Nézzük először a (2) zérushelyeket. Egy kezdőpontból mérjünk fel egymás után $2\pi(\sqrt{2}-1)$ hosszúságú íveket a p kerületű körre. Mivel e körön véges sok zérushely van, előbb-utóbb vissza kell jutnunk a kezdőpontba. Ha ez a lépésben b körülfutás után következik be, akkor $a[2\pi(\sqrt{2}-1)]=bp$. Tehát létezik olyan $\frac{a}{b}$ racionális szám, hogy

(4) $$p=\frac{a}{b}[2\pi(\sqrt{2}-1)].$$

Ugyanígy látható be a (3) zérushelyek vizsgálatánál, hogy létezik olyan $\frac{c}{d}$ racionális szám, melyre

(5) $$p=\frac{c}{d}[2\pi(\sqrt{2}+1)].$$

De akkor (4) és (5) egybevetésével

$$(6)\qquad \frac{ad}{bc}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2=3+2\sqrt{2};\quad \frac{1}{2}\left(\frac{ad}{bc}-3\right)=\sqrt{2}.$$

Ez viszont ellentmondás, mert racionális szám nem lehet irracionális számmal egyenlő. Ez az ellentmondás azt jelenti, hogy $\varphi(x)$ nem periodikus függvény.

Megjegyzés

1. Láthatjuk, hogy a feladatban $\sqrt{2}$ szerepét akármilyen irracionális szám betöltheti. Ha racionális számot írunk helyére, akkor már periodikus függvényt kapunk *(21. jegyzet)*.

2. Általánosabban felvetődik a kérdés: Milyen feltételek mellett, és hogyan készíthetünk periodikus függvényekből periodikus függvényt *(23. jegyzet)?*

3. Kérdés, hogyha például a $\sin x$ függvény helyett tetszőleges periodikus függvényt írunk, érvényes-e a feladat állítása? Az az érzésünk, hogy igen. Próbáljuk eldönteni a kérdést.

84. Három szomszédos egész szám köbének összege mikor osztható 18-cal?

Megoldás

Három szomszédos egész szám közül vagy a középső páros, vagy pedig a két szélső az. Az utóbbi esetben köbösszegük páratlan lenne. Legyen tehát a középső szám $2n$. Ekkor a köbösszeg a következő alakba írható:

$$\begin{aligned}(2n-1)^3+(2n)^3+(2n+1)^3&=24n^3+12n=12n(2n^2+1)=\\&=12n[3n^2-(n^2-1)]=36n^3-12(n-1)n(n+1).\end{aligned}$$

Három egymás utáni szám között mindig van páros és van 3-mal osztható, ezért szorzatuk mindig osztható 6-tal. A köbösszeg tehát osztható 36-tal. Ezzel a feladat állításánál valamivel többet bizonyítottunk be.

Megjegyzés

Bizonyítsuk be, hogy három szomszédos egész szám köbének összege mindig osztható 9-cel.

85. Keressünk olyan pozitív egész számot, amelynek utolsó jegye 2, és ha ezt a jegyet a szám végéről elhagyva az elejére írjuk, akkor a szám kétszeresét kapjuk.

I. megoldás

A keresett szám utolsó jegye 2, s ezért kétszerese 4-re végződik, tehát a keresett szám utolsó előtti jegye 4. Ennek kétszerese a szám kétszeresének utolsó előtti jegye, azaz a keresett számnak a végétől számított harmadik jegye 8. A szám kétszeresének a végétől számított harmadik jegye 6, mivel a 8 kétszerese 6-ra végződik. A keresett szám hátulról számított negyedik jegye tehát 6. Ezek szerint a szám kétszeresének a hátulról számított negyedik jegye 3, mert a 6 kétszereséhez a $2 \cdot 8$-nak 1-es maradékát is hozzá kell adnunk.

Az eljárást egészen addig folytatjuk, amíg a kétszeres számban először fordul elő a 2 úgy, hogy utána az 1 áll. (A keresett szám első jegye ugyanis 1, mert kétszerese 2-vel kezdődik.) Ekkor jutunk a feladat feltételeit kielégítő legkisebb számhoz: $A = 105\,263\,157\,894\,736\,842$.

Ha az 1 elé a 2 számjegyet írva folytatnánk tovább az eljárást, akkor újra az A jegyei ismétlődnének meg és újabb megoldásként kapnánk az $A \cdot 10^{18} + A$ számot. Hasonlóan ismételhetjük A jegyeit periodikusan akárhányszor, mindig megoldást kapunk, és eljárásunkból könnyen látszik, hogy csak ezek a megoldások lehetségesek.

A feladat összes megoldásai tehát az

$$A \cdot 10^{18k} + A \cdot 10^{18(k-1)} + \ldots + A \cdot 10^{18} + A = A \cdot \frac{10^{18(k+1)} - 1}{10^{18} - 1}$$

számok, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Megjegyzés

Kezdhettük volna a számjegyek megállapítását a szám elejéről is: A szám első jegye 1, mert kétszerese 2-vel kezdődik, utána csak 0 következhet, mert a kétszeresének első két jegye 21 stb.

II. megoldás

Legyen a keresett n jegyű szám x. Ekkor az utolsó jegyének (a 2-nek) elhagyásával keletkező szám $\frac{x-2}{10}$. Ha ez utóbbi elé 2-t írunk, akkor a $2 \cdot 10^{n-1} + \frac{x-2}{10}$ számhoz jutunk. A feltétel szerint

$$2x = 2 \cdot 10^{n-1} + \frac{x-2}{10}.$$

Innen

$$19x = 20 \cdot 10^{n-1} - 2,$$

és

$$x = 10^{n-1} + \frac{10^{n-1} - 2}{19}.$$

Itt az x csak akkor lehet pozitív egész szám, ha $10^{n-1} - 2$ osztható 19-cel. *A feladat tehát csak akkor oldható meg, ha az $\frac{1}{19}$ számot tizedes törtté alakítva, az osztási maradékok között a 2 előfordul.* Az előbbi feltétel teljesülése esetén, ha az $(n-1)$-edik 0 „levétele" után lépett fel a 2 maradék, akkor a tizedesvessző kitétele nélkül nyert hányadoshoz 10^{n-1}-t adva — a fentiek szerint —, a feltételnek megfelelő számot kapunk.

Az osztás során a 17-edik 0 levétele után lépett fel először a 2 maradék, és ekkor a hányados — a tizedesvessző kitétele nélkül — 5 263 157 894 736 842. A feladatnak tehát van megoldása:

$$105\,263\,157\,894\,736\,842.$$

Az osztást az első „2" maradék fellépése után folytatva, a hányados következő jegyéül és maradékul is 1-et kapunk, tehát innen ismétlődnek az eddig nyert maradékok és a hányadosban az eddig nyert jegyek. (A hányadosban először még egy 0 jegy következik.)

Akármeddig folytathatjuk tehát az osztást, az első „2"-től kezdve minden tizennyolcadik lépés újra „2" maradékhoz vezet. Ezek bármelyikénél megállhatunk.

Ezek szerint az első megoldásban nyert eredményekhez jutottunk.

86. Keressük meg azt a legkisebb x természetes számot, melynek a tízes számrendszerben felírt alakja 6-ra végződik, és ha ezt az utolsó 6-os számjegyet töröljük, de egyidejűleg a többi megmaradt számjegy elé egy 6-ost írunk, akkor x-nek négyszeresét kapjuk.

I. Megoldás

Az előző feladat után most már csak vázlatot adunk. $4x$ utolsó jegye 4-es, mert a szorzást szokásosan elkezdve a $4 \cdot 6 = 24$ egyesből 4 egyest írunk le. Továbbra is a $4x$-ben leírt számjegy mindig megadja x-nek eggyel magasabb helyi értékű számjegyét. Ezt addig mindenesetre folytatnunk kell, amíg $4x$-ben 6-os jegyet írunk le, és nincs átviendő maradék. Ekkor megkaptuk a legkisebb megfelelő x-et:

$$x = 1\ 5\ 3\ 8\ 4\ 6 \quad (\cdot 4)$$
$$4x = 6\ 1\ 5\ 3\ 8\ 4.$$

Az eljárást folytatva, a nyert hatjegyű szám ismétlődnék, tehát minden olyan $6k$ jeggyel írt számnak megvan a szóban forgó tulajdonsága, mely az 153 846 szám k-szor egymás után írásával áll elő.

Megjegyzés

Fordítva, osztással is megkaphatjuk x-et az alábbi séma szerint:

$$4x = 6\ 1\ 5\ 3\ 8\ 4 \quad (:4)$$
$$x = 1\ 5\ 3\ 8\ 4\ 6.$$

II. megoldás

Legyen x a keresett legkisebb szám, tegyük fel, hogy k jegyű. Az utolsó helyen álló 6-os elhagyásával az $(x-6)/10$ szám keletkezik, a 6-os eléje írásával pedig a $6 \cdot 10^{k-1}$-nel nagyobb szám. Így

$$6 \cdot 10^{k-1} + \frac{x-6}{10} = 4x,$$

amiből

$$2(10^k - 1) = 13x.$$

A 2-es tényező relatív prím a 13-hoz, ezért $10^k - 1$ osztható 13-mal. Ez először $k = 6$-ra teljesül:

$$999\,999 : 13 = 76\,923.$$

x pedig egyenlő a nyert hányados 2-szeresével: $x = 153\,846$.

87. Egy kétjegyű számhoz adjuk hozzá számjegyeinek összegét, majd az így nyert számhoz újra adjuk hozzá számjegyeinek összegét. Így olyan kétjegyű számhoz jutunk, melynek jegyei az eredeti szám jegyei fordított sorrendben. Melyik ez a szám?

Megoldás

Oszthatósági megfontolásokat és becsléseket végzünk.

Jelöljük a keresett $10x + y$ számból számjegyei hozzáadásával keletkező szám jegyeit a, b-vel:

(1) $$10x + y + x + y = 11x + 2y = 10a + b.$$

Feltevésünk szerint ehhez hozzáadva számjegyeit, a $10y+x$ számot kapjuk:

$$(2) \qquad 10a+b+a+b=11a+2b=10y+x.$$

A két összefüggésből x kiküszöbölésével:

$$11(11a+2b-10y)+2y=10a+b;$$
$$111a+21b=108y;$$
$$37a+7b=36y;$$
$$(3) \qquad y=a+\frac{a+7b}{36}.$$

Az y egész szám, ezért $a+7b$ osztható 36-tal. $a+7b>0$, mert a és b nem negatív egész számok; ha a is és b is 0 lenne, akkor $10a+b$ nem lehetne kétjegyű szám.

(3) alapján $y>a$. y számjegy, ezért $y\leqq 9$ egész szám, amiből $a\leqq 8$ következik. Becsléssel

$$0<a+7b\leqq 8+7\cdot 9=71<2\cdot 36.$$

Tehát $a+7b=36$. Innen $b=5-\frac{a-1}{7}$.

Mivel b egész szám, az $a-1$ 7-tel osztható. $a\leqq 8$, ezért csak az $a=1$ és $a=8$ jön számításba:

a	b	x	y
1	5	1	2
8	4	6	9

A feladat követelményeit csak a 12 és 69 számok elégíthetik ki. Valóban,

$$12+3=15, \quad 15+6=21;$$
$$69+15=84, \quad 84+12=96;$$

a 12 és 69 számok megoldásai a feladatnak.

88. Egy háromjegyű számot egy kétjegyűvel elosztva, hányadosul az osztó számjegyeinek összegét kapjuk, a maradék pedig az osztó jegyeinek felcserélésével keletkező szám. Ha ezt a maradékot szorozzuk a hányadossal és hozzáadjuk az osztót, a keletkező szám az osztandó jegyeiből áll, de fordított sorrendben. Mi az osztandó és az osztó?

Megoldás

Legyen a háromjegyű szám $100x+10y+z$, *a kétjegyű* $10u+v$ *alakú. Ekkor a feltételek:*

$$100x+10y+z=(10u+v)(u+v)+10v+u,$$

és

$$100z+10y+x=(10v+u)(u+v)+10u+v.$$

A maradék kisebb, mint az osztó, így $u>v$. *A két egyenlet különbsége:*

$$99(x-z)=9(u-v)(u+v)+9(v-u),$$

ahonnan

$$11(x-z)=(u-v)(u+v-1).$$

Vagy $u-v$, vagy pedig $u+v-1$ osztható 11-gyel. Az előbbi nem lehetséges, mert $u>v$ és $u-v<10$. Tekintettel arra, hogy $u+v-1<22$ és $u+v-1=0$ esetén $10u+v=10$ volna, ami nem megoldása a feladatnak, így

$$u+v-1=11, \quad \text{azaz} \quad u+v=12.$$

Ezt felhasználva az első egyenletben:

$$100x+10y+z=(10u+v)\cdot 12+10v+u=(9u+12)12+120-9u=264+99u.$$

Mivel $100x+10y+z<1000$, ezért $264+99u<1000$. Ebből

$$u<\frac{736}{99}=7\frac{43}{99}.$$

Innen az $u+v=12$ és az $u>v$ összefüggéseket figyelembe véve $u=7$, $v=5$ adódik. Behelyettesítve az egyenletekbe:

$$(10u+v)(u+v)+10v+u=75\cdot 12+57=957;$$
$$(10v+u)(u+v)+10u+v=57\cdot 12+75=759.$$

A kérdéses osztandó tehát 957, az osztó 75.

89. a és b két különböző természetes szám. Határozzuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre az

(1) $$ax+by=n$$

egyenletnek nincs megoldása nem negatív egész számokban.

Megoldás

Először azokat az n *természetes számokat adjuk meg, amelyekre* (1) *nem negatív egész* x *és* y *mellett teljesül (7. jegyzet).*

Tegyük fel, hogy az x_0, y_0 egy ilyen megoldás, azaz $n=ax_0+by_0$. Ha t tetszőleges egész szám, akkor viszont

(2) $$n=ax_0-tab+by_0+tab=a(x_0-tb)+b(y_0+ta),$$

tehát az

$$x_1=x_0-tb, \quad y_1=y_0+ta$$

egész számokra is teljesül (1). A t szám választható úgy, hogy teljesüljön

$$t\geqq 0; \quad 0\leqq x_1=x_0-tb\leqq b-1; \quad y_1=y_0+ta\geqq 0.$$

Ha tehát az $ax+by$ kifejezésbe az $x=0, 1, 2, \ldots, b-1$ értékeket és y helyére tetszőleges nem negatív egész számot helyettesítünk, akkor mindazokat az n természetes számokat megkapjuk, melyekre (1) *nem negatív egész x, y-ra teljesül. Azokra az n számokra, amelyek ezek között nem szerepelnek, nem oldható meg az* (1) *egyenlet, ezeket keressük.*

a) *Tegyük fel, hogy a és b relatív prímek.* A következő táblázatot készíthetjük:

$ax+by$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	...	$y=j$	...
$x=0$	0	b	$b\cdot 2$	...	bj	...
$x=1$	$a\cdot 1$	$a\cdot 1+b\cdot 1$	$a\cdot 1+b\cdot 2$	...	$a\cdot 1+bj$	...
$x=2$	$a\cdot 2$	$a\cdot 2+b\cdot 1$	$a\cdot 2+b\cdot 2$	...	$a\cdot 2+bj$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...
$x=b-1$	$a(b-1)$	$a(b-1)+b\cdot 1$	$a(b-1)+b\cdot 2$	...	$a(b-1)+bj$	

Egy-egy sorban b különbségű számtani sorozat áll, tehát bármely két szám különbsége osztható b-vel, és két ugyanabban a sorban álló szám b-vel osztva ugyanazt a maradékot adja.

Különböző sorban álló számok b-vel osztva különböző maradékot adnak. Ha a k_1-edik és k_2-edik sor számai b-vel osztva ugyanazt a maradékot adnák, akkor kezdő számaik különbsége, $(k_1-k_2)a$ osztható lenne b-vel. Az a és b relatív prímek. Ez csak úgy lenne lehetséges, ha (k_1-k_2) osztható b-vel *(8. jegyzet)*. De k_1 és k_2 b-nél kisebb nem negatív számok, ezért különbségük nem osztható b-vel.

Ha a sorokat balra folytatjuk, akkor bizonyos számú lépés után minden sorban csupa negatív szám áll, ezért minden sorban csak véges számú olyan

pozitív egész n szám van, amelyre (1)-nek nincs nem negatív egészekből álló megoldása. Ezek éppen az

...	$y=-j$	...	$y=-2$	$y=-1$	$ax+by$
...	$b(-j)$	...	$b(-2)$	$b(-1)$	$x=0$
...	$a+b(-j)$	...	$a+b(-2)$	$a+b(-1)$	$x=1$
...	$a\cdot 2+b(-j)$	...	$a\cdot 2+b(-2)$	$a\cdot 2+b(-1)$	$x=2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
...	$a(b-1)+b(-j)$	...	$a(b-1)+b(-2)$	$a(b-1)+b(-1)$	$x=b-1$

kiegészítő táblázatban fellépő pozitív egész számok.

Az előbbiek alapján világos, hogy a két táblázat egyesítésében minden egész szám csak egy sorban szerepelhet, és ott is csak egyszer. Sőt, minden egész szám szerepel. Legyen ugyanis n tetszés szerinti egész szám, és a k-adik sor számai b-vel osztva ugyanazt a maradékot adják, mint n, akkor $(n-ak)$ osztható b-vel. Létezik tehát olyan j egész szám, melyre $n-ak=bj$, innen $n=ak+bj$, így a k-adik sornak ka-tól számított j-edik száma — j előjelétől függően jobbra vagy balra — éppen n.

b) *Tegyük fel, hogy a és b nem relatív prímek, és legnagyobb közös osztójuk d.* Ekkor $a=a'd$ és $b=b'd$, ahol a' és b' relatív prímek, és $n=ax+by=d(a'x+b'y)$. *Látható, hogy ha n nem osztható d-vel, akkor* (1)*-nek nincs megoldása egész számokban, tehát minden d-vel nem osztható természetes szám megfelel a feladat követelményének.*

Ha $n=dn'$, akkor az $n=ax+by$ és $n'=a'x+b'y$ egyenletnek ugyanazok a gyökei. Ekkor az a)-ban követett gondolatmenet alapján az

...	$y=-j$	...	$y=-2$	$y=-1$	$a'x+b'y$
...	$b'(-j)$	...	$b'(-2)$	$b'(-1)$	$x=0$
...	$a'+b'(-j)$	...	$a'+b'(-2)$	$a'+b'(-1)$	$x=1$
...	$a'\cdot 2+b'(-j)$	...	$a'-2+b'(-2)$	$a'\cdot 2+b'(-1)$	$x=2$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
...	$a'(b'-1)+b'(-j)$	...	$a'(b'-1)+b'(-2)$	$a'(b'-1)+b'(-1)$	$x=b'-1$

táblázatban fellépő pozitív számok d-szeresei felelnek meg a feladat követelményeinek.

Megjegyzés

1. Vegyük észre, hogy az (1) egyenletet kielégítő $(x; y)$ koordinátájú pontok egyenesen vannak. Fogalmazzuk át a feladatot, és adjunk rá most már geometriai megoldást.

2. A *7. jegyzet*ben utalunk a feladat általánosítási lehetőségeire is.

90. Egy természetes szám hatodik hatványának számjegyei nagyság szerint rendezve a következők:

$$0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9.$$

Mi ez a szám?

Megoldás

Először a keresett számot korlátok közé szorítjuk. Ha létezik a feltételeknek megfelelő x szám, akkor hatodik hatványa 9-jegyű. A 9-jegyű számok felső korlátja 10^9.

$$x^6 < 10^9 \quad \text{alapján} \quad x < \sqrt{1000} < 32.$$

A számjegyek alapján $x^6 > 203\,447\,889$, tehát $x > 24$, mert $24^6 = [(3 \cdot 8)^3]^2 = 13\,824^2 < 14\,000^2 = 196\,000\,000$ és $196\,000\,000 < 203\,447\,889$. *Sikerült x-et* $24 < x < 32$ *korlátok közé szorítani.*

Vegyük észre, hogy a megadott számjegyek összege osztható 3-mal, vagyis x^6 is osztható 3-mal, tehát x is osztható 3-mal. A 24-nél nagyobb, 32-nél kisebb természetes számok közül csak 27 és 30 osztható 3-mal. 30 nem lehet a feladat megoldása, mert hatodik hatványa 6 db 0-ra végződik. Viszont $27^6 = 387\,420\,489$ éppen megfelelő, tehát $x = 27$ a keresett szám.

91. *a)* Keressünk meg minden olyan természetes számot, amelynek négyzetében mindegyik számjegy helyébe ugyanazzal a d pozitív számmal kisebb jegyet írva, a keresettnél d-vel kisebb természetes szám négyzetét kapjuk.

b) Hány megoldása van a feladatnak tetszés szerinti alapú számrendszerben?

Megoldás

a) *Legyen a keresett szám x, a nála d-vel kisebb szám y, és legyen x^2 számjegyeinek száma k. A feltételek algebrai megfogalmazása után először k-ra keresünk felső korlátot.*

Jelöljük a k darab 1-essel felírható számot C-*vel.* A feladat feltevései szerint:

(1) $x^2 - y^2 = d \cdot C$; (2) $x - y = d.$

(1) és (2) felhasználásával:

$$d\cdot C=x^2-y^2=(x-y)(x+y)=d(x+y).$$

Mivel $d>0$, ezért

(3) $$C=x+y.$$

Mivel $x>y$, ezért (3) alapján $2x>C$, azaz $4x^2>C^2$. C jegyeinek száma k, ezért $C\geqq 10^{k-1}$, azaz $C^2\geqq 10^{2k-2}$. Az x^2 jegyeinek száma k, ezért $x^2<10^k$, azaz $4x^2<4\cdot 10^k$.

Tehát

$$10^{2k-2}\leqq C^2<4x^2<4\cdot 10^k.$$

Az egyenlőtlenség két szélső tagjából $10^{k-2}<4$ következik, tehát $k\leqq 2$. Mivel $C=x+y>1$, ezért

$$k=2.$$

Tehát x^2 kétjegyű szám, $x+y=11$, így x és y egyjegyű számok. Figyelembe véve, hogy $x>y$, ezért $2\leqq y\leqq 5$.

y, x, d lehetséges értékei:

y	2	3	4	5
x	9	8	7	6
d	7	5	3	1
x^2	81	64	49	36
y^2	4	9	16	25

Az x lehetséges értékei közül csak 6 és 7 elégíti ki a feladat követelményeit.

b) *Legyen a számrendszer alapszáma a. Az előbbi megoldást követjük most is.*

Az (1), (2), (3) továbbra is érvényben marad, a több jegyű számokat természetesen az a alapú számrendszerben értve.

Érvényben marad az $a^{k-2}<4$ egyenlőtlenség is, és a $C=x+y>1$ miatt a $k>1$ változatlanul fennáll.

Most előzetes diszkusszió következik:

Ha $a=2$, akkor x^2 csak csupa 1-es jegyekből állhat, hiszen jegyeit csak így tudjuk csökkenteni természetes számmal (tudniillik $d=1$), s így csupa 0-ból álló számot, azaz 0-t kapunk.

$x=1$, $y=0$ megoldáshoz jutnánk, de a 0 nem természetes szám.

Ha $a=3$, akkor d csak 1 lehet. (2) és (3) alapján

$$x=\frac{C+d}{2}=\frac{C+1}{2},$$

amiből következik, hogy C csak páratlan szám lehet, s ezért páratlan számú jegye lehet. Mivel $k>1$ és a $3^{k-2}<4$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell, k csak 3 lehet. Ekkor $x=7$, de 7^2 a 3-alapú számrendszerben már több mint háromjegyű.

Minden $a\geqq 4$ alapszám esetében az $a^{k-2}<4$ és $k>1$ egyenlőtlenségek miatt

$$k=2.$$

Tehát $C=a+1$, vagyis

(3′) $$x+y=a+1.$$

Figyelembe véve, hogy x^2 kétjegyű: $x^2<a^2$, azaz $x<a$; $y<x$ miatt y szóba jövő értékei

$$y: 2, 3, 4, \ldots, a_0,$$

ahol a_0 az a legnagyobb egész szám, amelyre még $2a_0+1\leqq a+1$, azaz $2a_0\leqq a$. Szokásos jelölése: $a_0=\left[\frac{a}{2}\right]$. (A [ ] jelet ebben a megoldásban az előbbi értelemben használjuk.)

Minden ilyen y esetén $x=a+1-y$ és $d=x-y=a+1-2y$

kielégíti (1)-et és (2)-t, továbbá x^2 kétjegyű, hiszen $a>x>\frac{C}{2}>\frac{a}{2}$ miatt

$$a^2>x^2>\frac{a^2}{4}\geqq a.$$

Most már csak egy követelményt kell megnéznünk:

Az előbbi x, y, d számhármasok akkor megoldásai a feladatnak, ha x^2 mindkét számjegye külön-külön d-vel nagyobb y^2 megfelelő jegyénél.

Elegendő az 1 helyi értékű, második jegyeket vizsgálni. Ezt megkönnyíti a következő észrevétel: x^2 és $(y-1)^2$ második számjegye megegyezik, hiszen

$$x+y-1=a \text{ miatt } x^2-(y-1)^2=a(x-y+1).$$

Elegendő tehát, ha csak azoknak az y értékeknek a számát határozzuk meg, melyek négyzetének második jegye kisebb az $y-1$ szám négyzetének második jegyénél.

Ez csak úgy lehetséges, hogy $(y-1)^2$ első, a helyi értékű jegye kisebb y^2 első jegyénél, mégpedig pontosan 1-gyel; hiszen

$$y^2-(y-1)^2=2y-1<x+y-1=a.$$

Az előbbi becslésből az is kiderül, hogy az y: 2, 3, ..., a_0 számok négyzetében az egymás utániak kezdő, vagyis a helyiértékű jegyei legfeljebb 1-gyel különböznek. A $2^2=4$ szám $a=4$ esetén 1-gyel, $a>4$ esetén 0-val kezdődik.

Azok az y értékek felelnek meg, melyekre y^2 kezdő jegye 1-gyel nagyobb $(y-1)^2$ kezdő jegyénél. Ezek száma a_0^2 kezdő jegyével egyezik meg.

A feladatnak megfelelő y értékek (x, y, d értékrendszerek) száma egyenlő a_0^2 a helyi értékű számjegyével. Tehát a megoldások száma:

$$\left[\frac{1}{a}a_0^2\right]=\left[\frac{1}{a}\left[\frac{a}{2}\right]^2\right].$$

Ha $a=10$, akkor $a_0=5$, $a_0^2=25$, tehát 2 megoldás van, mint azt már láttuk.

Megjegyzés

A *b)* feladat nehézségét, de egyúttal szépségét is jellemzi az a tény, hogy a megoldások számát csupán a megoldások meghatározására vonatkozó utasításból határoztuk meg.

92. Melyek azok a háromjegyű természetes számok, amelyek egyenlők számjegyeik négyzetösszegének 11-szeresével?

Megoldás

N legyen egy keresett szám, jegyeit jelölje a, b, c; tehát

(1) $$N=100a+10b+c=11(a^2+b^2+c^2).$$

A bal oldalt $99a+11b+(a+c-b)$ alakban írva, osszuk az egyenletet 11-gyel:

(2) $$9a+b+\frac{a+c-b}{11}=a^2+b^2+c^2.$$

Eszerint $k=a+c-b$ osztható 11-gyel, mert a többi kifejezés egész szám.

Először k-t becsüljük.

A számjegyekre $1\leqq a\leqq 9$ és $0\leqq b$, $c\leqq 9$, ezért $k=a+c-b$ legnagyobb értéke $9+9-0=18$, k legkisebb értéke pedig $1+0-9=-8$. A k osztható 11-gyel, ezért k értéke csak 0 vagy 11 lehet.

a) *Ha* $k=0$, *vagyis* $b=a+c$,

akkor (2)-ből, b kiküszöbölésével, a-ra és c-re a következő kétismeretlenes diofantoszi egyenletet kapjuk:

$$2a^2+2ac+2c^2-10a-c=0.$$

Ezt a-ra átrendezve:

(3) $$2a^2+(2c-10)a+(2c^2-c)=0.$$

A diszkrimináns:

$$D=(2c-10)^2-8(2c^2-c)=4(-2c^2-8c+25).$$

$D=0$ a $c_1\approx-4{,}51$ és $c_2\approx 1{,}84$ helyen igaz. D a zérus helyei között pozitív. Így c-re csak a 0; 1 értékek jönnek szóba. $c=1$-gyel D nem teljes négyzet, tehát nem ad egész a-t; $c=0$-val pedig (3) így alakul:

$$2a^2-10a=0,$$

ahonnan $$a=5, \quad \text{vagy} \quad a=0.$$

De csak $a=5$ lehet kezdő számjegy, evvel $b=5$, és $N=550$. Ez megfelel (1)-nek.

b) $$k=1\text{-re} \quad b=a+c-11,$$

és az előzőkhöz hasonlóan (2)-be helyettesítve,

(4) $$2a^2+(2c-32)a+(2c^2-23c+131)=0;$$

$$D=4(-3c^2+14c-6).$$

D a $c_1\approx 0{,}48$ és $c_2\approx 4{,}19$ értékek között pozitív, de a közbeeső $c=1, 2, 3, 4$ egész értékek közül csak $c=3$ mellett teljes négyzet: evvel (4)-ből

$$2a^2-26a+80=0,$$

ahonnan a értéke 5 vagy 8. Azonban $a=5$ és $c=3$-mal: $b=-3$, ami nem számjegy.

Az $a=8$, $c=3$-mal adódó $b=0$-val: $N=803$, megfelel (1)-nek. Minden lehetőséget figyelembe véve, azt találtuk, hogy két olyan háromjegyű természetes szám van, mely jegyei négyzetösszegének 11-szeresével egyenlő, ezek: 550 és 803.

93. Egy matematikai tanulmányi versenyen három feladatot tűztek ki: A-t, B-t, és C-t. 25 olyan tanuló akadt, akiknek mindegyike megoldott legalább egy feladatot. Azok között a tanulók között, akik A-t nem tudták megoldani, kétszer annyian voltak olyanok, akik megoldották B-t, mint akik C-t oldották meg. Csak az A feladatot 1-gyel több tanuló oldotta meg, mint ahányan a többiek voltak,

akik szintén megoldották A-t. A csupán egy feladatot megoldó tanulók fele nem tudta megoldani A-t. Hány tanuló oldotta meg csak B-t?

Megoldás

Az A, B, C feladatok megoldóit egy-egy kör pontjai szemléltetik (13. ábra). A legalább egy feladatot megoldó versenyzőket az alábbi 5 csoportba soroljuk:

I. akik csak A-t oldották meg,

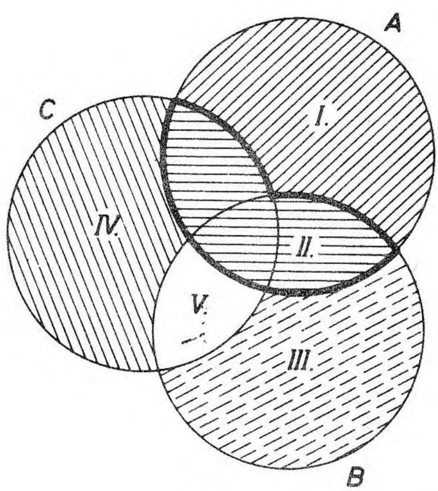
II. akik megoldották A-t és még legalább egy feladatot,

III. akik csak B-t oldották meg,

IV. akik csak C-t oldották meg,

V. akik B-t és C-t oldották meg.

Így mindegyikük szerepel valamelyik csoportban, de csak egyben.



13. ábra

Legyen a III., IV. és V. csoport tagjainak száma rendre b, c, d. Csak ezek nem tudták megoldani A-t. Közülük C-t megoldotta $c+d$, B-t pedig $b+d$. Az utóbbi szám 2-szerese az előbbinek:

$$b+d=2(c+d).$$

Innen

(1) $$d=b-2c,$$

és mivel ez a szám nem lehet negatív:

(2) $$b \geqq 2c.$$

Azok, akik csupán egy feladatot oldottak meg, az I., a III. és a IV. csoport tagjai. Közülük a III.-beliek és a IV.-beliek azok, akik A-t nem tudták megoldani. Számuk $b+c$, tehát a csupán egy feladatot megoldók száma $2(b+c)$, ennélfogva a csak A-t megoldók száma ugyancsak $b+c$. Így pedig a II. csoport tagjainak száma $b+c-1$.

Mármost az 5 csoport tagjainak együttes számából (1) figyelembevételével

$$(b+c)+(b+c-1)+b+c+(b-2c)=4b+c-1=25,$$

(3) $$4b+c=26, \quad \text{másképpen} \quad c=4(6-b)+2;$$

b és c nem negatív egész számok, ezért itt az utóbbi alakból

$$6 \leqq b \quad \text{és} \quad c \geqq 2.$$

Másrészt (2) alapján (3) első alakjából

$$8c + c \leqq 26 < 27, \quad c < 3, \quad \text{tehát} \quad c = 2, \quad \text{és} \quad b = 6.$$

Eszerint 6 olyan tanuló volt, aki csak a B feladatot oldotta meg. Az I., II., V. csoport tagjainak száma rendre 8, 7, 2.

94. Határozzuk meg az összes olyan x természetes számot, amelyre

(1) $$p(x) = x^2 - 10x - 22,$$

ahol $p(x)$ a tízes számrendszerben felírt x szám számjegyeinek szorzatát jelenti.

I. Megoldás

Vegyük észre, hogy x növekedésével (1) *jobb oldala „gyorsabban" növekszik, mint a bal oldal.*

Megmutatjuk, hogy x legfeljebb 2-jegyű lehet. Legyen ugyanis x n-jegyű, vagyis $10^{n-1} \leqq x < 10^n$; és tegyük fel, hogy $n > 2$. Becsüljük meg (1) bal oldalát felülről, a jobbot alulról:

$$9^n \geqq p(x) = x(x-10) - 22 \geqq 10^n(10^{n-2} - 1) - 22 > 10^n.$$

Ez pedig ellentmondás, tehát $x = 10a + b$.

(1) jobb és bal oldalának különbsége így írható:

$$100a(a-1) + 19ab + b^2 - 10b - 22 = 100a(a-1) + 19ab + (b-5)^2 - 47 = 0.$$

Itt csak $a = 1$ lehet, mert ha $a > 1$, akkor az első 3 tag összege már 100-nál nagyobb, $a = 0$ sem lehet, mert 47 nem négyzetszám.

Ha $a = 1$, (1)-ből a

$$b(b+9) = 22$$

egyenlet adódik, amelynek egyetlen pozitív egész megoldása $b = 2$.

Tehát a keresett szám $x = 12$.

II. megoldás

Először megmutatjuk, hogy $p(x) \leqq x$.

Ha x n-jegyű, akkor $x > 10^{n-1}A$, ahol A az x szám első jegye. A többi $(n-1)$

jegy szorzata legfeljebb 9^{n-1}. Emiatt

$$p(x) \leqq A \cdot 9^{n-1} \leqq 10^{n-1} A < x.$$

Az x szám tehát kielégíti a következő egyenlőtlenségeket:

(2) $\qquad x^2 - 10x - 22 \geqq 0,$

(3) $\qquad x^2 - 10x - 22 \leqq x.$

(2) pozitív megoldásai $x \geqq \frac{1}{2}\left(10 + \sqrt{188}\right) \approx 11{,}8;$

(3) pozitív megoldásai $0 < x \leqq \frac{1}{2}\left(11 + \sqrt{209}\right) \approx 12{,}7.$

$x = 12$ valóban megoldás.

4. Számsorozatok

95. Legyenek a és a nála nagyobb b pozitív egész számok. Számítsuk ki az a és b közé eső, 7 nevezőjű, nem egyszerűsíthető törtek összegét.

Megoldás

Az a és $a+1$ közé eső hat törtszám összege:

$$\left(a+\frac{1}{7}\right)+\left(a+\frac{2}{7}\right)+\ldots+\left(a+\frac{6}{7}\right)=6a+\frac{21}{7}=6a+3.$$

Minden következő számközben ez az összeg 6-tal növekszik, mivel az egyes törtszámok eggyel nőnek.

A kérdéses összeg tehát olyan számtani sorozatok összege, amelynek első tagja $6a+3$, különbsége 6, tagjainak száma $b-a$. Ennélfogva

$$S=\frac{1}{2}(b-a)[2(6a+3)+(b-a-1)6]=$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)(12a+6+6b-6a-6)=3(b^2-a^2).$$

Más megoldási lehetőség: Írjuk fel a kérdéses törtek összegét kétféleképpen:

$$S=\left(a+\frac{1}{7}\right)+\left(a+\frac{2}{7}\right)+\ldots+\left(a+\frac{6}{7}\right)+\left(a+\frac{8}{7}\right)+\ldots+\left(b-\frac{2}{7}\right)+\left(b-\frac{1}{7}\right),$$

$$S=\left(b-\frac{1}{7}\right)+\left(b-\frac{2}{7}\right)+\ldots+\left(b-\frac{6}{7}\right)+\left(b-\frac{8}{7}\right)+\ldots+\left(a+\frac{2}{7}\right)+\left(a+\frac{1}{7}\right),$$

majd adjuk össze a két egyenlőséget.

96. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ különböző elemekből álló számtani sorozat. Írjuk egyszerűbb alakba az

$$S_n=x^{a_2^2-a_1^2}+x^{a_3^2-a_2^2}+\ldots+x^{a_{n+1}^2-a_n^2}$$

összeget, ha $x\neq 1$.

Megoldás

Tekintettel arra, hogy

$$a_{i+1}^2-a_i^2=(a_{i+1}-a_i)(a_{i+1}+a_i)=d[2a_1+(2i-1)d]=$$
$$=2a_1d+(2i-1)d^2,$$

ahol d a megadott számtani sorozat különbsége és $i=1, 2, \ldots, n$, ezért a fenti kifejezés a következőképpen alakítható:

$$S_n=x^{2a_1d+d^2}+x^{2a_1d+3d^2}+\ldots+x^{2a_1d+(2n-1)d^2}=$$
$$=x^{2a_1d+d^2}[1+x^{2d^2}+x^{4d^2}+\ldots+x^{(2n-2)d^2}].$$

A zárójelben álló összeg egy n tagú, x^{2d^2} hányadosú mértani sorozat összege, s mivel a feltételek szerint $x\neq 1$ és $d\neq 0$, ezért

$$S_n=x^{2a_1d+d^2}\cdot\frac{x^{2nd^2}-1}{x^{2d^2}-1}.$$

97. Egy növekvő számtani sorozat elemei egész számok, és egyik eleme négyzetszám. Bizonyítsuk be, hogy akkor bármeddig folytatva a sorozatot, elemei közt újra és újra fordulnak elő négyzetszámok.

Megoldás

Legyen a^2 a sorozatban előforduló négyzetszám, $a\geqq 0$. A sorozat különbsége, d nyilván egész szám.

Azt állítjuk, hogy az $a+kd$ alakú számok négyzetei ($k=0, 1, 2, \ldots$) mind elemei a sorozatnak. Valóban

$$(a+kd)^2=a^2+(2ak+k^2d)d,$$

tehát ez a négyzetszám eleme a sorozatnak.

Megjegyzés

Általánosan igaz a következő: Ha egy növekvő számtani sorozat elemei egész számok, és egyik eleme teljes n-edik hatvány, akkor bármeddig folytatva a sorozatot, elemei közt újra és újra fordulnak elő teljes n-edik hatványok (n egynél nagyobb egész szám.) Igazoljuk ezt az állítást!

98. Öt egész szám számtani sorozatot alkot. Akár az első négy tag köbeinek összegét vesszük, akár az utolsó négy tag köbeinek összegét, mindkétszer a figyelembe vett tagok összege négyzetének 16-szorosát kapjuk. Határozzuk meg a számokat.

Megoldás

Jelöljük a számtani sorozat különbségét d-vel, a középső számot c-vel. A feltételek:

(1) $$(c-2d)^3+(c-d)^3+c^3+(c+d)^3=16\,[2(2c-d)]^2,$$

(2) $$(c-d)^3+c^3+(c+d)^3+(c+2d)^3=16\,[2(2c+d)]^2.$$

Az $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ azonosság alapján (1), illetve (2) bal oldalán kiemelhető $2(2c-d)$, illetve $2(2c+d)$. (1) és (2) 0-ra redukálva:

(3) $$2(2c-d)(c^2-cd+4d^2-64c+32d)=0,$$

(4) $$2(2c+d)(c^2+cd+4d^2-64c-32d)=0.$$

Ha $2c=d$, akkor (3) teljesül, és (4) így alakul:

(5) $$8c^2(19c-128)=0.$$

Ennek egész gyöke csak $c=0$, és ekkor $d=0$.

Ha $d=-2c$, akkor (4) teljesül, és (3) megy át (5)-be, tehát újabb megoldást nem kapunk.

Ha $d\neq \pm 2c$, akkor a következő egyenletrendszernek kell teljesülnie:

$$c^2-cd+4d^2-64c+32d=0$$

$$c^2+cd+4d^2-64c-32d=0.$$

Az egyenletek összegének fele:

(6) $$c^2+4d^2-64c=c(c-64)+4d^2=0.$$

Az egyenletek különbségének fele:

(7) $$cd-32d=(c-32)d=0.$$

A (7) egyenletből $c=32$, vagy $d=0$.

Ha $c=32$, *akkor a* (6) *egyenletből*

$$4d^2=32^2.$$

Innen

$$d=\pm 16.$$

Ha $d=0$, akkor a (6) egyenletből $c(c-64)=0$; innen

$$c=0 \quad \text{vagy} \quad c=64.$$

A talált $(c;\, d)$ *párok tehát:* $(0;\, 0)$; $(32;\, 16)$; $(32;\, -16)$ és $(64;\, 0)$. A nekik megfelelő sorozatok:

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0; \qquad 0,\ 16,\ 32,\ 48,\ 64;$$

$$64,\ 48,\ 32,\ 16,\ 0; \qquad 64,\ 64,\ 64,\ 64,\ 64.$$

Ezek kielégítik a feladat követelményeit.

99. Adva van valamely mértani sorozat első tagja, utolsó tagja és tagjainak száma. Mekkora tagjainak szorzata?

I. megoldás

A szokásos jelölésekkel keressük a

$$p_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot \ldots \cdot a_n \quad \text{szorzatot.}$$

Mivel

$$a_i=a_1q^{i-1} \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

ezért a

$$p_n=a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2\cdot a_1q^3\cdot \ldots \cdot a_1q^{n-1}=a_1^n\cdot q^{1+2+3+\ldots+(n-1)}.$$

A q kitevőjében szereplő számtani sorozat összege $\frac{(n-1)n}{2}$, tehát

$$p_n=a_1^n\cdot q^{\frac{(n-1)n}{2}}=(a_1^2\cdot q^{n-1})^{\frac{n}{2}}=(a_1\cdot a_1\cdot q^{n-1})^{\frac{n}{2}},$$

azaz

$$p_n=(a_1a_n)^{\frac{n}{2}}.$$

II. megoldás (Útmutatás)

Szorozzuk össze a $p_n = a_1(a_1 \cdot q)(a_1 \cdot q^2) \ldots (a_1 \cdot q^{n-1})$

és

$$p_n = a_n \cdot \left(\frac{a_n}{q}\right) \cdot \left(\frac{a_n}{q^2}\right) \cdot \ldots \left(\frac{a_n}{q^{n-1}}\right)$$

egyenlőségeket!

100. Két számtani sorozat első tagja megegyezik. Az első sorozat egyik tagjának a négyzete a másik ugyanannyiadik tagjának a négyzeténél 7-tel nagyobb, a megelőző tagok négyzetének a különbsége 343/64, a következő tagok négyzetének a különbsége pedig 567/64. Megállapítható-e ezekből az adatokból, hogy a sorozat hányadik tagjairól van szó? Megállapítható-e a sorozat valamilyen további adata?

Megoldás

Legyen a két sorozat közös első tagja $a_1 = A_1 = a$, a szomszédos tagok különbsége d, illetve D.

A feladat szerint az $(n+1)$*-edik tagok négyzetének különbsége* 7, *azaz*

$$a_{n+1}^2 - A_{n+1}^2 = (a+nd)^2 - (a+nD)^2 = 7,$$

átrendezve,

(1) $$2an(d-D) + n^2(d^2 - D^2) = 7.$$

A feladat további két állítása az előbbihez hasonló jellegű, csak az indexeket és a jobb oldalt kell alkalmasan változtatni:

(2) $$2a(n-1)(d-D) + (n-1)^2(d^2 - D^2) = \frac{343}{64},$$

(3) $$2a(n+1)(d-D) + (n+1)^2(d^2 - D^2) = \frac{567}{64}.$$

Ezek szerint az a, d, D, n ismeretlenekre 3 *egyenletünk van, semmi esetre sem határozhatjuk meg mindegyiküket.*

Képezzük (2) és (3) számtani közepét, majd vonjuk ki belőle (1)-et:

$$2an(d-D) + (n^2+1)(d^2 - D^2) = \frac{455}{64},$$

(4) $$d^2 - D^2 = \frac{7}{64}.$$

Ennek alapján (1) és (2) így alakul:

(5) $$2an(d-D)+\frac{7}{64}n^2=7,$$

$$2a(n-1)(d-D)+\frac{7}{64}(n-1)^2=\frac{343}{64}.$$

A $(d-D)$-re és n-re kaptunk egyenletrendszert. Az előbbi $(n-1)$-szereséből kivonva az utóbbi n-szeresét, n-re egyismeretlenes egyenletet kapunk:

$$\frac{7}{64}[n^2(n-1)-(n-1)^2n]=7(n-1)-\frac{343}{64}n.$$

Ebből

(6) $$n^2-16n+64=(n-8)^2=0, \quad n=8.$$

(6) alapján (5)-ből

$$a(d-D)=0.$$

$d-D\neq 0$, különben a két sorozat bármely két megegyező sorszámú tagja egyeznék, ami az adott különbségek miatt lehetetlen. Ezért

(7) $$a=0.$$

Eredményeinket a (4), (6), (7) *összefüggések tartalmazzák. Az* $a_n=(n-1)d$ *és* $A_n=(n-1)D$ *sorozatokra a* (4) *és* (6) *feltételek mellett valóban teljesülnek a feladat* (1), (2), (3) *kikötései.*

Eszerint a feladat első kérdésére választ adhatunk, elsőként a sorozatok 9. *tagjait, majd a* 8. *és* 10. *tagpárokat hasonlították össze.*

101. Legyen x_1 pozitív, 1-nél kisebb szám. Ebből kiindulva képezzük az

(1) $$x_{k+1}=x_k-x_k^2 \quad (k=1, 2, \ldots)$$

előírással meghatározott sorozatot. Mutassuk meg, hogy n bármekkora,

(2) $$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<1.$$

Megoldás

(1) átrendezésével $x_k^2=x_k-x_{k+1}$. Írjuk ezt fel $k=1, 2, \ldots, n$-re.

$$x_1^2=x_1-x_2,$$

$$x_2^2=x_2-x_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n^2 = x_n - x_{n+1},$$

majd adjuk össze a felírt egyenleteket:

(3) $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_1 - x_{n+1} < x_1 < 1.$$

Ugyanis a sorozat minden eleme, így x_{n+1} is pozitív. Valóban $0 < x_1 < 1$ miatt $x_2 = x_1(1 - x_1)$ is 0 és 1 között van, és lépésről lépésre látható ugyanez a sorozat többi elemeire is.

Megjegyzés

Az előző gondolatmenetből látható, hogy x_n alulról korlátos, fogyó sorozat. A sorozatnak tehát van határértéke a valós számok körében *(2. jegyzet)*. A határértéket x-szel jelölve, (1) alapján fennáll az $x = x - x^2$ egyenlet, tehát $x = 0$. (3) alapján most már az is látható, hogy az

$$s_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

sorozat határértéke $\lim s_n = x_1$.

102. Az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ valós számokból álló sorozat eleget tesz az

(1) $$1 = a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots$$

egyenlőtlenségláncnak. Ezután a $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

(2) $$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Bizonyítsuk be, hogy

(I.) a $0 \leqq b_n < 2$ egyenlőtlenségpár n minden értékére fennáll;

(II.) bármely adott és a $0 \leqq c < 2$ egyenlőtlenségpárt kielégítő c valós szám esetén létezik olyan, az (1) egyenlőtlenségláncnak eleget tevő $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat, hogy a belőle képezett b_n számok közül végtelen sok nagyobb c-nél.

I. Megoldás

Először a feladat első részét bizonyítjuk.

(2′) $$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k \sqrt{a_k}},$$

így (1) *miatt* $0 \leqq b_n$ *nyilvánvalóan teljesül, az összeg egyetlen tagja sem negatív.*

A $b_n < 2$ *egyenlőtlenség bizonyításánál is* (1)*-et használjuk fel,* b_n*-et ügyesen*

növeljük: először az összeg tagjainak nevezőjét csökkentjük, majd a tagok számlálóját növeljük (vagy nem változtatjuk).

$$\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}} \leqq \frac{a_k-a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_{k-1}}} = \frac{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k-1}}}\right) \leqq$$

$$\leqq 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right),$$

ezért

(3) $$b_n \leqq \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right) = 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) < 2,$$

hiszen az összegezésnél a közbülső tagok rendre kiesnek, és $\frac{1}{\sqrt{a_n}} > 0$.

A feladat második részére is válaszolhatunk a fenti becslési módszerrel: csak most b_n-et alulról kell becsülni. Ehhez persze az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sorozatot alkalmasan kell megválasztanunk.

Először tegyük fel, hogy teljesül rá

(1′) $$0 < d = a_1-a_0 = a_2-a_1 = \ldots = a_k-a_{k-1} = a_{k+1}-a_k = \ldots,$$

azaz $$a_n = 1+nd.$$

Majd később d-t c-től függően alkalmasan fogjuk megválasztani.

Most következik az alsó becslés:

$$\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k\sqrt{a_k}} > \frac{a_{k+1}-a_k}{a_k\sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{\sqrt{a_k}\sqrt{a_{k+1}}}\right) > 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}-\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}}\right),$$

ezért

(3′) $$b_n > \sum_{k=1}^{n} 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_k}}-\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right).$$

Legyen most már megadva a c szám, melyre $0 \leqq c < 2$. Ha $c=0$, akkor (3′) és (1′) alapján minden $b_n > 0$, feltesszük tehát, hogy $c > 0$. *Válasszuk meg* (1′)*-ben d-t úgy, hogy teljesüljön:*

(4) $$\frac{2}{\sqrt{a_1}} > c, \quad \text{azaz} \quad \frac{2}{\sqrt{a_1}} = c+\varepsilon, \quad \text{ahol} \quad \varepsilon > 0.$$

Ez egyenértékű az $1 < a_1 \leqq \left(\frac{2}{c}\right)^2$ egyenlőtlenséggel, tehát (4) teljesül, ha

$$(4') \qquad 0 < d < \left(\frac{2}{c}\right)^2 - 1,$$

és (4)-ből

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{1+d}} - c$$

is kifejezhető. Viszont (1′) alapján az előbbi ε-hoz végtelen sok olyan n index van, hogy

$$(5) \qquad \frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} = \frac{2}{\sqrt{1+(n+1)d}} < \varepsilon,$$

ha ugyanis — n-re megoldva az (5) egyenlőtlenséget —

$$(5') \qquad n > \frac{1}{d}\left[\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1 - d\right].$$

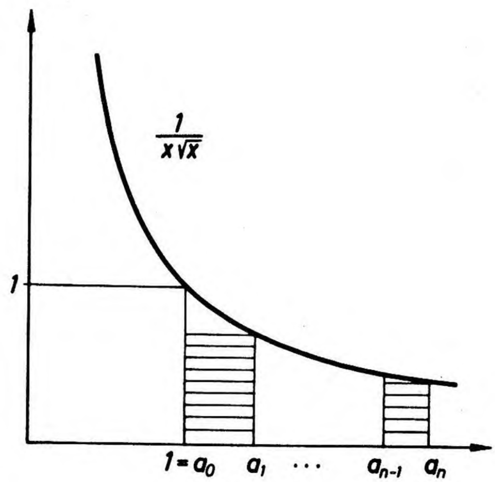
Ezzel a feladat második részét is megoldottuk, hiszen az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat (1′)- *és* (4′)-*beli megválasztása mellett, az* (5′)-*ben meghatározott végtelen sok indexre*

$$b_n > (c+\varepsilon) - \varepsilon = c.$$

II. megoldás

A feladatot általánosabban oldjuk meg, s rámutatunk eredetére is. Észrevehetjük ugyanis a (2′) *képletből, hogy* b_n *az* $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ *függvény* $a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *abszcisszákhoz tartozó beírt téglalapjainak területösszege, integrálközelítő összeg (14. ábra).*

Tekintsük általánosabban az $f(x) = \frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}}$ *függvényt* (feladatunkban speciálisan $m=2$), *ahol* $m > 0$ *tetszőleges pozitív valós szám.*



14. ábra

(6) $$b_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})\frac{1}{a_k^{1+\frac{1}{m}}},$$

az (1) feltételek mellett éppen az

(7) $$\int_1^a \frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}}\,dx \quad \text{integrál}$$

$$a_0=1,\ a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n=a$$

osztópontokhoz tartozó közelítő összege, hiszen a $0<x<\infty$ tartományban

$$f(x)=\frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}}$$

szigorúan fogyó pozitív értékű folytonos függvény.

$f(x)$ primitív függvényei $F(x)=\dfrac{-m}{x^{\frac{1}{m}}}+c$ alakban írhatók. Valóban $F'(x)=$ $=f(x)=\dfrac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}}$. Alkalmazzuk a *Newton—Leibniz*-szabályt:

$$\int_1^a \frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}}\,dx=\left[\frac{-m}{x^{\frac{1}{m}}}\right]_1^a=m\left(1-\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}\right).$$

Tehát

$$0\leqq b_n\leqq m\left(1-\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}\right)<m.$$

(Az egyenlőségjelek csak $1=a_0=a_1=a_2=a$ mellett érvényesek.)

Vegyük észre, hogy ha $a\to\infty$, akkor az integrál alulról konvergál m-hez. Ennek alapján a feladat második kérdésére is könnyen válaszolhatunk.

Ha $0\leqq c<m$, akkor van olyan a szám, hogy

$$\int_1^a \frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}}\,dx=m\left(1-\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}\right)>c,$$

azaz

$$m\left(1-\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}\right)=c+\varepsilon \quad (\varepsilon>0),$$

ha ugyanis

$$a>\left(\frac{m}{m-c}\right)^m$$

Tudjuk viszont, hogy a (7) integrál tetszőleges pontossággal megközelíthető alsó közelítő összeggel, van tehát olyan n_0 index és $1=a_0 \leqq a_1 \leqq \ldots \leqq a_{n_0}=a$ felosztás, hogy a hozzá tartozó

$$b_{n_0}=\sum_{k=1}^{n_0}(a_k-a_{k-1})\frac{1}{a_k^{1+\frac{1}{m}}}$$

közelítő összegre

$$b_{n_0} \geqq \left(\int_1^a \frac{1}{x^{1+\frac{1}{m}}}\,\mathrm{d}x\right)-\varepsilon,$$

azaz

$$b_{n_0} \geqq m\left(1-\frac{1}{a^{\frac{1}{m}}}\right)-\varepsilon=c.$$

Ha tehát az előbbi $1=a_0 \leqq a_1 \leqq \ldots \leqq a_{n_0}=a$ osztópontokhoz még további $a=a_{n_0} \leqq a_{n_0+1} \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots$ osztópontokat iktatunk be, akkor — végtelen sok n-re —

$$b_n>c.$$

Megjegyzés

1. A feladat második felére megfelelő $a_k=\left(\frac{1}{q}\right)^{mk}$ mértani sorozat segítségével ($q<1$) is válaszolhatunk. Ekkor b_n képletébe helyettesítve

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}(1-q^m)q^k=\frac{q}{1-q}(1-q^m)(1-q^n).$$

Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy adott $0<c<m$ számhoz van olyan $0<q<1$ hányados és n_0 index, hogy $n>n_0$ mellett teljesül

$$c<b_n<m.$$

2. Meg kell állapítanunk, hogy a fenti két megoldás — $m=2$ mellett — nem különbözik lényegesen. A *Newton—Leibniz*-szabály ugyanis az ún. *Lagrange-féle középértéktételből* következik, s az első megoldás becslése (sőt a megjegyzésben szereplő állítás bizonyítása is) ezt ragadja meg speciális esetben *(25. jegyzet)*.

A tétel így szól:

Ha $F(x)$ az $[a, b]$ szakaszon folytonos, a szakasz belsejében differenciálható függvény: $F'(x) \equiv f(x)$, akkor az $[a, b]$ szakasz belsejében van olyan ξ hely, hogy

$$F(b) - F(a) = f(\xi)(b-a).$$

Esetünkben $F(x) = -mx^{-\frac{1}{m}}$, $F'(x) \equiv f(x) = x^{-1-\frac{1}{m}}$ $0 < x$ mellett értelmezett, differenciálható függvények. $f(x)$ szigorúan fogyó, ezért $1 \leqq a_{k-1} \leqq \xi_k \leqq a_k$ mellett

$$f(a_k)(a_k - a_{k-1}) \leqq f(\xi_k)(a_k - a_{k-1}) \leqq f(a_{k-1})(a_k - a_{k-1}).$$

A középértéktétel alkalmazásánál tehát írható a következő egyenlőtlenség ($a_{k-1} \leqq a_k$ mellett)

$$f(a_k)(a_k - a_{k-1}) \leqq F(a_k) - F(a_{k-1}) \leqq f(a_{k-1})(a_k - a_{k-1}),$$

$$(a_k - a_{k-1})a_k^{-1-\frac{1}{m}} \leqq m\left(a_{k-1}^{-\frac{1}{m}} - a_k^{-\frac{1}{m}}\right) \leqq (a_k - a_{k-1})a_{k-1}^{-1-\frac{1}{m}}.$$

Ebből az $m=2$ mellett az első megoldás mindkét becslése s a *Newton—Leibniz*-szabály alkalmazhatósága egyaránt kiolvasható.

3. Az $\int\limits_1^\infty x^{-1-\frac{1}{m}}\,dx = \lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_1^a x^{-1-\frac{1}{m}}\,dx = m$ definiálja a bal oldali ún. *improprius integrált.*

Az $\int\limits_1^\infty x^\alpha\,dx$ improprius integrál akkor és csak akkor értelmes, ha $-1 > \alpha$; értéke

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{\alpha+1}(a^{\alpha+1} - 1) = -\frac{1}{\alpha+1}.$$

Határátmenettel más típusú integrálok is definiálhatók.

103. Tekintsük a következő $\{c_n\}$ sorozatot

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
c_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_8 \\
c_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 \\
&\vdots \\
c_n &= a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n \\
&\vdots
\end{aligned}
,
$$

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_8$ olyan valós számokat jelentenek, melyek nem mind egyenlők nullával.

Tudjuk, hogy a $\{c_n\}$ sorozat végtelen sok tagja nullával egyenlő. Állapítsuk meg az összes olyan n számot, melyre $c_n = 0$.

Megoldás

Vizsgáljuk meg az (1) *alatti* $\{c_n\}$ *sorozatot. A feltétel szerint* a_i*-k olyan valós számokat jelentenek, melyek nem mind egyenlők nullával. Ezek szerint*

$$\max |a_i| > 0.$$

Két részre bontjuk a megoldást:

a) ha n páros,

b) ha n páratlan.

Vizsgáljuk meg a két esetet külön-külön.

a) *Ha n páros, akkor* $c_n = 0$ *nem lehetséges.*

$$n = 2k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

ekkor

$$c_{2k} = a_1^{2k} + a_2^{2k} + \ldots + a_8^{2k}.$$

$$c_{2k} = (a_1^k)^2 + (a_2^k)^2 + \ldots + (a_8^k)^2.$$

$c_{2k} > 0$, hiszen az összeg tagjai négyzetszámok, ezekről tudjuk, hogy nem negatívak, és van az a_i-k között legalább egy, melyre $|a_i| > 0$.

b) *Ha n páratlan, a feltételeknek megfelelő sorozatot kapunk, ha a* 8 *szám* 4 *olyan számpárból áll, ahol az egy párban levő számok összege* 0. *Megmutatjuk, hogy csak ebben az esetben kapunk megfelelő* c_n *sorozatot, máskülönben nem lenne végtelen sok tagja nulla. Ehhez* c_n*-et alulról becsüljük meg:*

$$n = 2k + 1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$c_{2k+1} = a_1^{2k+1} + \ldots + a_8^{2k+1}.$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a_1 maximális abszolút értékű.

$$c_{2k+1}=a_1^{2k+1}\left[1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}+\ldots+\left(\frac{a_8}{a_1}\right)^{2k+1}\right].$$

Vegyük a kifejezés abszolút értékét:

$$(2)\qquad c_{2k+1}=|a_1^{2k+1}|\cdot\left|1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}+\ldots+\left(\frac{a_8}{a_1}\right)^{2k+1}\right|.$$

Feltehetjük, hogy az a_2 szám az a_1-gyel ellentétes előjelű számok közül maximális abszolút értékű. Van a_1-gyel ellentétes előjelű szám, hiszen különben $|c_{2k+1}|>0$ lenne.

Az $|a_1|\geqq|a_2|$ nyilván fennáll; és

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\leqq\left(\frac{a_i}{a_1}\right),\quad \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}\leqq\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{2k+1}\quad (i=3, 4, \ldots, 8).$$

Ezért, ha

$\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{2k+1}$ helyébe $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}$-ent írunk a (2) kifejezésbe, a jobb oldal nem növekszik:

$$(3)\qquad |c_{2k+1}|\geqq|a_1^{2k+1}|\cdot\left|1+7\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}\right|>0$$

teljesül, hacsak

$$1+7\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}>0.$$

Ha $|a_1|>|a_2|$, vagyis $0>\frac{a_2}{a_1}>-1$, a fenti feltétel már akkor teljesül, ha

$$\frac{1}{7}>\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1},$$

azaz

$$2k+1>\frac{\lg\frac{1}{7}}{\lg\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)}.$$

Ez azt jelentené, hogy az előbbi $2k+1$ számokra — (3) miatt — $|c_{2k+1}|>0$, és a $\{c_n\}$ sorozatnak nem lenne végtelen sok nullával egyenlő tagja.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a_1 maximális abszolút értékű.

$$c_{2k+1}=a_1^{2k+1}\left[1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}+\ldots+\left(\frac{a_8}{a_1}\right)^{2k+1}\right].$$

Vegyük a kifejezés abszolút értékét:

$$(2)\qquad c_{2k+1}=|a_1^{2k+1}|\cdot\left|1+\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}+\ldots+\left(\frac{a_8}{a_1}\right)^{2k+1}\right|.$$

Feltehetjük, hogy az a_2 szám az a_1-gyel ellentétes előjelű számok közül maximális abszolút értékű. Van a_1-gyel ellentétes előjelű szám, hiszen különben $|c_{2k+1}|>0$ lenne.

Az $|a_1|\geqq|a_2|$ nyilván fennáll; és

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)\leqq\left(\frac{a_i}{a_1}\right),\quad\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}\leqq\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{2k+1}\qquad(i=3,4,\ldots,8).$$

Ezért, ha

$\left(\frac{a_i}{a_1}\right)^{2k+1}$ helyébe $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}$-ent írunk a (2) kifejezésbe, a jobb oldal nem növekszik:

$$(3)\qquad |c_{2k+1}|\geqq|a_1^{2k+1}|\cdot\left|1+7\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}\right|>0$$

teljesül, hacsak

$$1+7\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1}>0.$$

Ha $|a_1|>|a_2|$, vagyis $0>\frac{a_2}{a_1}>-1$, a fenti feltétel már akkor teljesül, ha

$$\frac{1}{7}>\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)^{2k+1},$$

azaz

$$2k+1>\frac{\lg\frac{1}{7}}{\lg\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)}.$$

Ez azt jelentené, hogy az előbbi $2k+1$ számokra — (3) miatt — $|c_{2k+1}|>0$, és a $\{c_n\}$ sorozatnak nem lenne végtelen sok nullával egyenlő tagja.

Az $|a_1| > |a_2|$ feltétel tehát ellentmondáshoz vezet, ezért $a_1+a_2=0$ és $a_1^{2k+1}+a_2^{2k+1}=0$.

Ha már $a_3=a_4=\ldots=a_8=0$, akkor $c_{2k+1}=0$.

Ha van közöttük nullától különböző, akkor az előbbi gondolatmenethez hasonlóan található közöttük olyan a_r és a_s, hogy $a_r+a_s=0$. És így tovább.

Végül is a 8 szám 4 párba szedhető úgy, hogy az egy párban levő számok összege nulla. (A nullával egyező számok között ez a párosítás nyilvánvalóan lehetséges.) Az a_i számokat így választva, $c_{2k+1}=0$ teljesül ($k=0, 1, 2, \ldots$), vagyis a c_n sorozatnak végtelen sok tagja nullával egyenlő. Tehát az $n=2k+1$ alakú (páratlan) számokra, és csak ezekre teljesül — a feladat feltételei mellett — $c_n=0$.

104. Egy osztály tanulói között diót osztottak szét. Az első tanuló kapott a számú diót és még a megmaradó diók 30-ad részét, a második tanuló $2a$ diót és a még megmaradó diók 30-ad részét; a harmadik tanuló $3a$ diót és a még megmaradó diók 30-ad részét és így tovább. Bizonyítsuk be, hogy ha az első két tanuló egyenlő számú diót kapott, akkor valamennyien ugyanannyi diót kaptak. Mekkora ez esetben az osztály létszáma?

I. megoldás

Ha a diók száma d, akkor az első tanuló

$$a+\frac{d-a}{30}=\frac{d}{30}+\frac{29}{30}a \tag{1}$$

diót kap, a második pedig

$$2a+\frac{d-\frac{d}{30}-\frac{29}{30}a-2a}{30}=\frac{29}{30^2}d+\left(2\cdot\frac{29}{30}-\frac{29}{30^2}\right)a=$$

$$=\frac{29}{30^2}d+\frac{29\cdot 59}{30^2}a$$

diót. A feltétel szerint

$$\frac{d}{30}+\frac{29}{30}a=\frac{29}{30^2}d+\frac{29\cdot 59}{30^2}a, \tag{2}$$

innen pedig $$d=29^2a.$$

(1)-be helyettesítve, az első két tanuló egyenként $29a$ diót kapott.

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy a többi diáknak is ugyanennyi dió jut. Tegyük fel, hogy $k-1$ tanulóról már beláttuk, hogy nekik egyenként $29a$ dió

jutott ($k \geqq 2$). Ezután

$$d-(k-1)29a=29^2a-(k-1)29a=29(30-k)a$$

dió maradt, a k-adik tanulónak tehát

$$ka+\frac{29(30-k)a-ka}{30}=29a$$

dió jut. Tehát valóban minden diák $29a$ diót kapott.

Ilyen módon 29^2a dióból 29 tanuló kaphat egyenként $29a$ diót, tehát 29-en vannak az osztályban.

Megjegyzés

Ha a feladatot általánosítjuk, a maradéknak nem a 30-ad részét, hanem a b-ed részét ($b>1$) vesszük, akkor kezdetben $d=(b-1)^2a$ diónak kellett lenni ahhoz, hogy az első két diák egyenlő számú diót kapjon. Ez esetben $b-1$ diák kaphat egyenként $(b-1)a$ számú diót.

II. megoldás

Az előbb általánosított feladatot oldjuk meg.

Tegyük fel, hogy a k-adik tanulónak c_k dió jutott, és a megmaradó diók száma d_k ($d_0=d$).

Tehát

$$d_{k-1}=c_k+d_k \quad (k=1, 2, \ldots)$$

és

$$c_1=a+\frac{d-a}{b} \quad \text{(jelen feladatban } b=30\text{)},$$

$$c_2=2a+\frac{d_1-2a}{b}=\frac{d_1}{b}+2\,\frac{b-1}{b}\,a.$$

Általában

$$c_k=ka+\frac{d_{k-1}-ka}{b}=\frac{d_{k-1}}{b}+k\,\frac{b-1}{b}\,a.$$

Vizsgáljuk meg a $D_k=c_{k+1}-c_k$ különbséget:

$$D_k=\frac{d_k-d_{k-1}}{b}+\frac{b-1}{b}\,a=\frac{b-1}{b}\,a-\frac{c_k}{b}.$$

És végül

$$D_{k+1}-D_k=-\frac{c_{k+1}-c_k}{b}=-\frac{D_k}{b},$$

azaz

$$D_{k+1}=\frac{b-1}{b}D_k.$$

Ennélfogva a D_k különbségek mértani sorozatot alkotnak. Ennek hányadosa

$\frac{b-1}{b}>0$, mert $b>1$.

Ez azt jelenti, hogy az egymás utáni diákoknak jutó diómennyiség vagy állandóan csökken, vagy nő, vagy mindannyian ugyanannyi diót kapnak.

Tehát, ha van két diák, akik egyenlő mennyiségű diót kaptak, akkor mindenkinek ugyanannyi dió jutott.

Az egymás utáni diómennyiségek D_1 előjelétől függően nőnek vagy csökkennek.

Mivel

$$D_1=\frac{b-1}{b}a-\frac{c_1}{b}=\frac{(b-1)b}{b^2}a-\frac{d}{b^2}-\frac{b-1}{b^2}a=$$

$$=\frac{(b-1)^2a-d}{b^2},$$

ezért $d<(b-1)^2a$ esetén nőnek, $d>(b-1)^2a$ esetén csökkennek, és $d=(b-1)^2a$ esetén egyenlők az egymás utáni diómennyiségek. A k-adik tanulónak

$$c_k=c_1+D_1+D_2+\ldots+D_{k-1}=\frac{d}{b}+\frac{b-1}{b}a+D_1\left[1+\frac{b-1}{b}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\left(\frac{b-1}{b}\right)^{k-2}\right]=\frac{d}{b}+\frac{b-1}{b}a+\frac{(b-1)^2a-d}{b^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{b-1}{b}\right)^{k-1}}{\frac{1}{b}}=$$

$$=(b-1)a-\frac{(b-1)^2a-d}{b-1}\cdot\left(\frac{b-1}{b}\right)^k$$

dió jut.

105. Egy n ($n>1$) napig tartó sportversenyen összesen m darab érmet osztottak ki. Első nap 1 érem és a megmaradó érmék 1/7-ed része került kiosztásra, a másodikon 2 érem és a még fennmaradók 1/7-ed része és így tovább. Végül az n-edik, azaz utolsó napon kiosztották a még visszamaradt, pontosan n darab érmet. Hány napig tartott a sportverseny, és hány érmet osztottak ki összesen?

Megoldás

Vizsgáljuk meg a maradékokat.

Az első nap után $(m-1)\frac{6}{7}$ érem, a második nap után $\left[(m-1)\frac{6}{7}-2\right]\frac{6}{7}$, a harmadik nap után $\left\{\left[(m-1)\frac{6}{7}-2\right]\frac{6}{7}-3\right\}\frac{6}{7}$ érem maradt és így tovább. Az $(n-1)$-edik nap után n érem maradt, tehát:

(1) $$\left\{\left[(m-1)\frac{6}{7}-2\right]\frac{6}{7}\ldots-(n-1)\right\}\frac{6}{7}=n.$$

Az így kapott egyenletet alakítsuk át:

$$m\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-1\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}-2\left(\frac{6}{7}\right)^{n-2}-\ldots-(n-1)\left(\frac{6}{7}\right)=n,$$

az egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$-nel, és rendezzük az egyenleteket m-re:

$$m-1-2\left(\frac{7}{6}\right)-3\left(\frac{7}{6}\right)^{2}-\ldots-(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}=n\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1},$$

$$m=1+2\left(\frac{7}{6}\right)+3\left(\frac{7}{6}\right)^{2}+\ldots+(n-1)\left(\frac{7}{6}\right)^{n-2}+n\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}.$$

Láthatjuk, hogy a jobb oldalon az $1+2x+3x^2+\ldots+n\cdot x^{n-1}=f(x)$ *függvény* $x=\frac{7}{6}$ *helyen vett értéke áll. Az* $f(x)$ *függvényt egyszerűbben állítjuk elő* $(x\neq 1$ mellett).

A mértani sorozat összegképletét alkalmazva:

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{x^n-1}{x-1},\quad \text{ha } x\neq 1$$

$$x+x^2+\ldots+x^{n-1}=x\cdot\frac{x^{n-1}-1}{x-1}=\frac{x^n-x}{x-1}$$

$$x^2+\ldots+x^{n-1}=x^2\cdot\frac{x^{n-2}-1}{x-1}=\frac{x^n-x^2}{x-1}$$

$$x^{n-1}=x^{n-1}\frac{x-1}{x-1}=\frac{x^n-x^{n-1}}{x-1}.$$

Adjuk össze a fenti egyenlőségeket, a jobb oldalon végezzük el a lehetséges

kiemeléseket:

$$f(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{1}{x-1}\left(nx^n-\frac{x^n-1}{x-1}\right).$$

A jobb oldalt alakítsuk tovább:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}\left(\frac{nx^{n+1}-nx^n-x^n+1}{x-1}\right)=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Most már behelyettesítjük az $x=\frac{7}{6}$ értéket.

$$m=\frac{n\left(\frac{7}{6}\right)^{n+1}-(n+1)\left(\frac{7}{6}\right)^n+1}{\left(\frac{7}{6}-1\right)^2}=\frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}+36.$$

Az m egész szám, ezért $\frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}$-nek is egész számnak kell lennie. Mivel 7 és 6 relatív prímek, ez csak úgy lehetséges, ha $\frac{n-6}{6^{n-1}}$ is egész szám.

Megmutatjuk, hogy $n=6$, $m=36$.

Először teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden n természetes számra

(2) $$n-6<6^{n-1}.$$

$n=1$-re $-5<1$ valóban teljesül.

Ha $n=k$-ra $k-6<6^{k-1}$ fennáll, mindkét oldalt 6-tal szorozva

$$6k-6<6^{(k+1)-1}.$$

Mivel $(k+1)-6<6k-6$, ha $k\geqq 1$, ezért méginkább

$$(k+1)-6<6^{(k+1)-1}.$$

Ezzel (2)-t bebizonyítottuk. $\frac{n-6}{6^{n-1}}$ csak akkor lehet egész szám, ha $n=6$ és $m=36$.

Ezek az értékek valóban megfelelnek a feladat feltételeinek. Az első nap után 30 érem marad, a második nap után 24, majd 18, 12, s az ötödik nap után 6 érem marad, melyeket a hatodik napon osztanak ki.

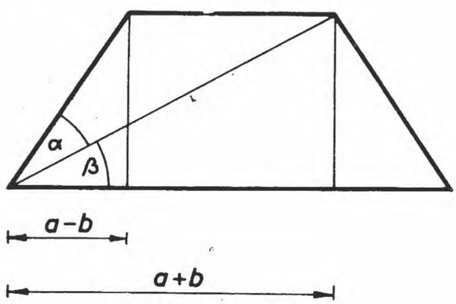
5. Síkgeometriai számítások, bizonyítások

106. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak a hossza 15,3 és 25,2 cm. A hosszabbik párhuzamos oldal végpontjaiból a rövidebbik olyan szög alatt látszik, amelynek tangense 0,75. Számítsuk ki a trapéz területét.

I. megoldás

A trapéz magasságát fogjuk kiszámítani.

Legyen a hosszabbik párhuzamos oldal hossza $2a$, a rövidebbé $2b$, a magasság m, az adott tangensérték t *(15. ábra)*. A hosszabbik párhuzamos oldal végpontjából a rövidebb α szög alatt, a szemközti szár pedig β szög alatt látszik. Mivel a rövidebb párhuzamos oldal végpontjából húzott magasság a szemközti oldalt $a-b$ és $a+b$ hosszúságú darabokra osztja, felírhatjuk a következőket:



15. ábra

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{m}{a-b}\,; \quad \operatorname{tg}\beta=\frac{m}{a+b}.$$

Behelyettesítve a

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

kifejezésbe, az

$$\frac{m}{a-b}=\frac{t+\dfrac{m}{a+b}}{1-\dfrac{tm}{a+b}}$$

egyenletet kapjuk.

Rendezve:

$$m(a+b-tm)=(a-b)[t(a+b)+m],$$

(1) $$tm^2-2bm+t(a^2-b^2)=0.$$

Tehát

$$m=\frac{b}{t}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{t}\right)^2-(a^2-b^2)}.$$

Az adatokat behelyettesítve:

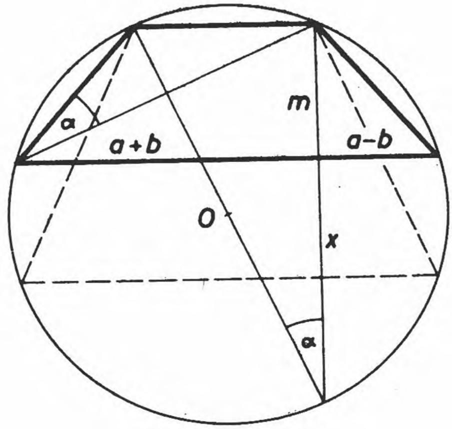
$$\frac{b}{t}=10{,}2; \quad a^2-b^2=(a+b)(a-b)=20{,}25\cdot 4{,}95\approx 100{,}24;$$

$$\sqrt{\left(\frac{b}{t}\right)^2-(a^2-b^2)}=1{,}95.$$

Eredményünk:

$m_1\approx 8{,}25$ cm és a terület $T_1\approx 167{,}1$ cm^2,
$m_2\approx 12{,}15$ cm $T_2\approx 246{,}0$ cm^2.

Fokozatosan visszafelé haladva beláthatjuk, hogy mindkét előbbi megoldáshoz létezik megfelelő trapéz.



16. ábra

II. megoldás

Hosszabbítsuk meg a trapéz magasságát a köré írható körig (16. ábra). Jelöljük a meghosszabbítást x-szel. A meghosszabbítás végpontjából a 2b hosszúságú oldal szintén α szög alatt látszik.

Felírhatjuk, hogy

$$t=\operatorname{tg}\alpha=\frac{2b}{m+x}, \text{ ebből } m+x=\frac{2b}{t}.$$

Tudjuk, hogy a körben az egy ponton áthaladó húrok metszeteinek szorzata megegyezik:

$$mx=(a+b)(a-b).$$

Ezért m és x a következő másodfokú egyenlet gyökei:

$$(2) \qquad y^2-\frac{2b}{t}y+a^2-b^2=0.$$

Ez — az ismeretlen jelölésétől eltekintve — megegyezik az első megoldásban nyert (1) egyenlettel, és így ugyanazokat az eredményeket kapjuk. A *16. ábrá*ról világos, hogy két megfelelő trapéz létezik, ha a (2) egyenletnek két gyöke van, mert m és x szerepe szimmetrikus.

Más megoldási lehetőség (16. ábra)

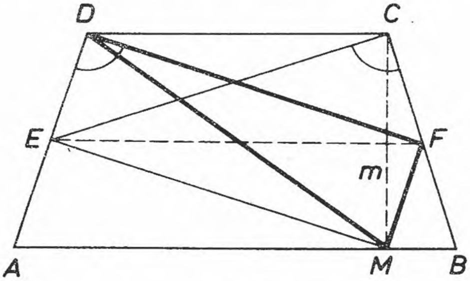
tg α és b ismeretében könnyen kifejezhetjük a szimmetrikus trapéz köré írt kör sugarát, majd az O középpontnak az alapoktól mért távolságát.

107. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b, egyik szára felezőpontjának a másik szárra való vetülete ennek a szárnak egyik végpontjába esik. Számítsuk ki a trapéz területét!

Megoldás

Egy téglalap egyik oldalának felezőpontjából a vele szemközti oldalra bocsátott merőleges felezi a szemközti oldalt, ezért nem metszheti azt végpontban. Szimmetrikus trapézunk tehát nem lehet téglalap.

A továbbiakban feltehetjük, hogy $a>b$ és $AB=a$, $CD=b$ *(17. ábra). Mivel a-t és b-t ismerjük, a trapéz területének kiszámításához elég, ha az m magasságot meghatározzuk.* A trapéz szimmetriája folytán CEF és DFE derékszögű háromszögek egybevágók. Tükrözzük a CEF háromszöget EF-re. C tükörképe egyben C AB-re eső M vetülete. A $DEMF$ négyszög paralelogramma, mert szemben fekvő oldalai egyenlők; téglalap, mert D-nél levő szöge derékszög. Mivel a téglalap átlói egyenlők:



17. ábra

$$DM=EF=\frac{a+b}{2}.$$

A CDM derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel

$$m^2=CM^2=DM^2-CD^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-b^2=\frac{(a+3b)(a-b)}{4},$$

$$m=\frac{\sqrt{(a+3b)(a-b)}}{2}.$$

A trapéz területe:

$$t=\frac{(a+b)\sqrt{(a+3b)(a-b)}}{4}.$$

108. Egy téglalap mindegyik oldalára mint alapra rajzoljunk kifelé olyan téglalapot, amelynek magassága az alap n-ed része. Egyenlő kerületű téglalapokból kiindulva megválasztható-e n értéke úgy, hogy az 5 téglalapból álló idom területe mindig ugyanakkora legyen?

Megoldás

Jelöljük a téglalap oldalait a-val, illetve b-vel. Az 5 téglalapból képzett idom területe:

$$T=ab+\frac{2a^2}{n}+\frac{2b^2}{n}.$$

Ezt a kifejezést átalakítjuk úgy, hogy az $a+b=$állandó *feltételt felhasználhassuk:*

$$T=ab+\frac{2a^2}{n}+\frac{4ab}{n}+\frac{2b^2}{n}-\frac{4ab}{n}=\frac{2(a+b)^2}{n}+ab\left(1-\frac{4}{n}\right).$$

Itt a jobb oldal első tagja nem függ a téglalap alakjától, mert $a+b$, azaz a kerület fele mindig ugyanakkora. A jobb oldal második tagja viszont akkor és csak akkor nem függ külön az a és b oldaltól, ha $1-\frac{4}{n}=0$, azaz $n=4$.

Ekkor a T értéke $\frac{(a+b)^2}{2}$.

Megjegyzés

Általánosítható a feladat tetszőleges α szögű paralelogrammára is. Fogalmazzuk meg az általánosítást, és végezzük el a bizonyítást.

109. Legyen az $ABCD$ konvex négyszög AB és CD oldalának felezőpontja E és F, az AF és DE metszéspontja G, a BF és CE metszéspontja H. Bizonyítandó, hogy az AGD és BHC háromszögek területének összege egyenlő az $EHFG$ négyszög területével.

Megoldás

Jelöljük az idomok területét ugyanúgy, mint magukat az idomokat, és jelöljük a szakaszok hosszát ugyanúgy, mint magukat a szakaszokat *(18. ábra)*.

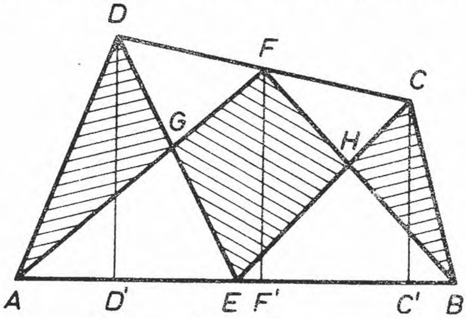
Az idomokat az AEG és EBH háromszögekkel egészítjük ki:

$$AGD=AED-AEG,$$
$$BHC=EBC-EBH.$$

Ezeket összeadva:

$$AGD+BHC=AED+EBC-(AEG+EBH).$$

Másrészt: $$HEFG=ABF-(AEG+EBH).$$



18. ábra

A két összefüggés alapján nyilvánvaló, hogy $AGD + BHC = EHFG$ akkor és csak akkor teljesülhet, ha $AED + EBC = ABF$, ezért elég az utóbbit belátni.

Az E az AB felezési pontja, ezért az $AE = EB = \frac{1}{2} AB$. Jelölje D', F', C' a D, F, C pontok merőleges vetületét AB-re. DD', FF', CC' merőlegesek AB-re, így egymással párhuzamosak. F a CD felezési pontja, ezért FF' a $DD'C'C$ trapéz középvonala. A trapéz középvonalának hossza a vele párhuzamos oldalak számtani közepe, tehát $FF' = \frac{1}{2}(DD' + CC')$,

$$AED + EBC = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot DD' + \frac{1}{2} \cdot EB \cdot CC' = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot DD' +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} CC' = \frac{1}{2} \cdot AB \left(\frac{1}{2} DD' + \frac{1}{2} CC' \right) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot FF' = ABF.$$

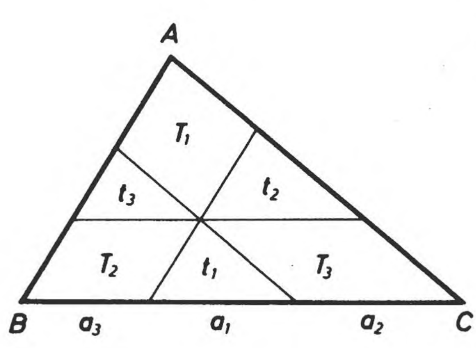
Ezzel a feladatot megoldottuk.

110. Egy háromszög belsejében felvett tetszőleges ponton át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket húzunk. Ezek az egyenesek a háromszög területét hat részre osztják. Mekkora az adott háromszög területe, ha adva van a keletkezett 3 háromszög területe: t_1, t_2, t_3?

I. megoldás

Jelöljük a keletkezett háromszögeknek az adott háromszög a oldalával párhuzamos oldalait megfelelően a_1, a_2, a_3-mal *(19. ábra)*, a háromszög területét T-vel.

A szögek egyenlősége miatt a részháromszögek az eredeti háromszöghöz is hasonlók. Így — figyelembe véve, hogy a hasonló háromszögek területei úgy aránylanak egymáshoz, mint a megfelelő oldalak négyzetei — *azt kapjuk, hogy*



19. ábra

$$\sqrt{t_1} : \sqrt{T} = a_1 : (a_1 + a_2 + a_3),$$

$$\sqrt{t_2} : \sqrt{T} = a_2 : (a_1 + a_2 + a_3),$$

$$\sqrt{t_3} : \sqrt{T} = a_3 : (a_1 + a_2 + a_3).$$

Innen

$$\frac{\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}}{\sqrt{T}}=\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+a_3}=1,$$

azaz

$$T=\left(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\right)^2.$$

II. megoldás (Útmutatás)

Igazoljuk, hogy $T_1=2\sqrt{t_2\cdot t_3}$, s hasonló állítások igazak T_2 és T_3-ra is *(19. ábra)*.

111. Bizonyítsuk be, hogy a hegyesszögű háromszög területe egyenlő a köréje írható kör sugarának és a magasságvonalak talppontjai által meghatározott háromszög fél kerületének szorzatával.

I. megoldás

Az ABC háromszög AA_1, BB_1, CC_1 magasságvonalai éppen az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszög szögfelezői (20. ábra).

Ennek igazolására elegendő, ha megemlítjük, hogy Thalész-tétele miatt például ABA_1B_1 és AC_1A_1C is húrnégyszög, ezért az $A\sphericalangle$-gel szemközti külső szögek egyenlők az $A\sphericalangle$-gel, tehát egymással is *(34. jegyzet)*.

Az előbbi észrevétel szerint, ha a C_1 pontot tükrözzük az AC, majd a BC oldalra, a C_1', illetve C_1'' tükörképek éppen az A_1B_1 szakasz meghosszabbításaira esnek. Teljesülnek a következő egyenlőségek:

$$m_c=CC_1=CC_1'=CC_1'',$$

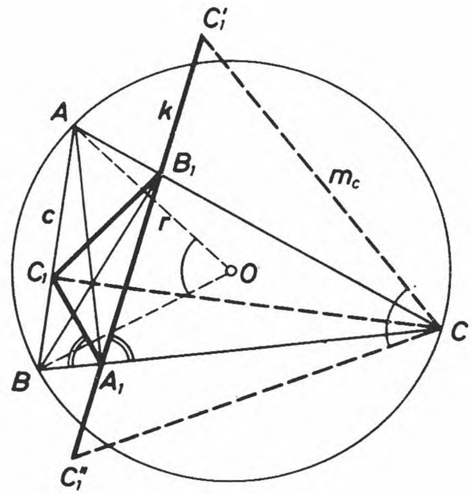
$$C_1'C_1''=C_1'B_1+B_1A_1+A_1C_1''=$$

$$=C_1B_1+B_1A_1+A_1C_1=k,$$

ahol k a talpponti háromszög kerülete; és ugyancsak a tükörképek egybevágóságából

$$C_1'CC_1''\sphericalangle=2\cdot ACC_1\sphericalangle+$$

$$+2\cdot C_1CB\sphericalangle=2\cdot ACB\sphericalangle.$$



20. ábra

A középponti szög kétszerese az ugyanazon íven nyugvó kerületi szögnek, ezért $C_1'CC_1''\sphericalangle = AOB\sphericalangle$.

Ez azt jelenti, hogy a $C_1'C_1''C$ és ABO egyenlő szárú háromszögek hasonlók, megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$k : c = m_c : r, \quad \text{azaz} \quad cm_c = kr.$$

Az ABC háromszög területe:

$$t = 1/2 \cdot cm_c = 1/2 \cdot kr.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

II. megoldás (Útmutatás)

Az ABC háromszög és az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszög adatai kifejezhetők a körülírt kör r sugarával, valamint ABC α, β, γ szögeivel.

Például az AOB háromszögből *(20. ábra)* $c = 2r \sin \gamma$ stb. Végül

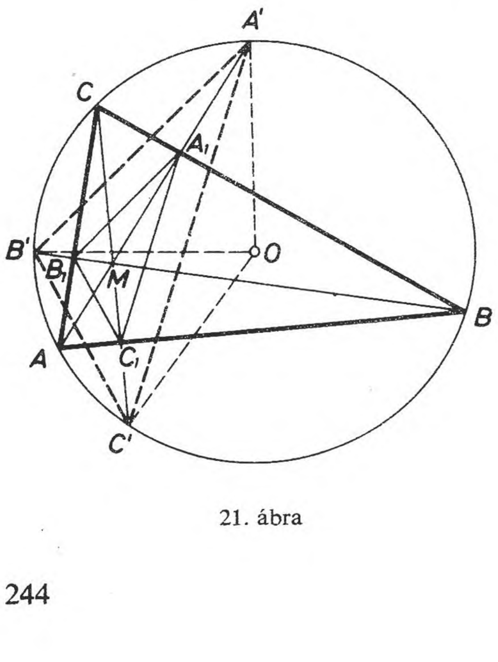
$$t = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Például ABC és A_1B_1C háromszögek hasonlóságából:

$$A_1B_1 : c = A_1C : b = \cos \gamma;$$
$$A_1B_1 = c \cos \gamma = 2r \sin \gamma \cos \gamma = r \sin 2\gamma.$$

Bizonyítandó tehát a következő összefüggés:

$$2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{2} r^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$



21. ábra

III. megoldás

Ismeretes, hogy a háromszög M magasságpontjának az oldalakra, azaz az A_1, B_1, C_1 magasságtalppontokra való A', B', C' tükörképei az ABC háromszög körülírt körén vannak. Így az $A'B'C'$ háromszög az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögnek az M középpontból 2-szeresre nagyított képe.

Hegyesszögű háromszögben M belső pont, ezért tükörképei az A-t, B-t, C-t nem tartalmazó BC, CA, AB ívre esnek *(21. ábra)*.

Az $AC'BA'CB'$ konvex hatszög területe kétszerese az ABC háromszög t területének, mert az ABC', BCA' és CAB' háromszögek tükörképei — *ABM, BCM* és *CAM* — éppen kitöltik az ABC háromszöget.

Az $AC'BA'CB'$ hatszög A, B, C csúcsokba befutó oldalpárjai egyenlők, mert pl. $CA'=CM=CB'$. A körülírt kör OA', OB', OC' sugaraival tehát három deltoidra bomlik, ezért *területét a deltoidok területének összegeként is előállíthatjuk:*

$$2t=\frac{OA\cdot B'C'}{2}+\frac{OB\cdot C'A'}{2}+\frac{OC\cdot A'B'}{2}=r\cdot B_1C_1+r\cdot C_1A_1+r\cdot A_1B_1=$$

$$=r(B_1C_1+C_1A_1+A_1B_1).$$

Ebből:

$$t=r\cdot\frac{1}{2}(B_1C_1+C_1A_1+A_1B_1),$$

a bizonyítandó állítást nyertük.

112. A háromszög oldalait belülről érintő körhöz az a, b, c oldalakkal párhuzamosan húzott érintőknek a háromszög belsejében levő szakaszai legyenek rendre a_1, b_1, c_1.

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=1.$$

I. megoldás

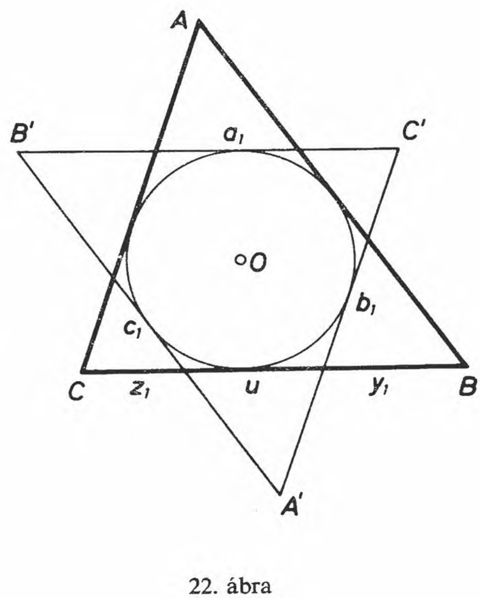
Az a_1, b_1, c_1 egyenesek azt az $A'B'C'$ háromszöget határozzák meg, amely ABC-ből a beírt kör O középpontjára való tükrözéssel keletkezett (22. ábra).

Ennél a tükrözésnél az a_1 és u szakasz egymásnak felel meg, tehát $u=a_1$. Másrészt a párhuzamosok által lemetszett háromszögek hasonlóságából

$$\frac{z_1}{a}=\frac{c_1}{c},\qquad \frac{y_1}{a}=\frac{b_1}{b};$$

azaz

$$z_1=\frac{ac_1}{c},\qquad y_1=\frac{ab_1}{b}.$$



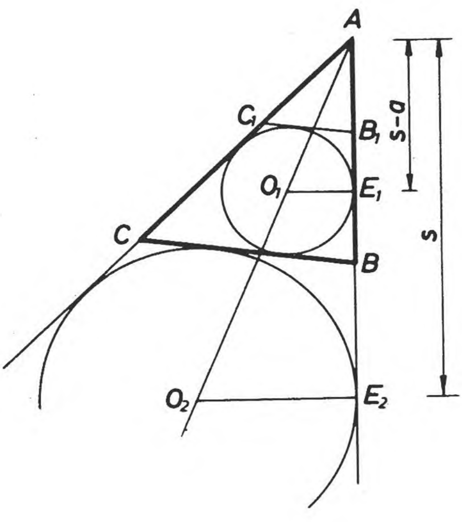
22. ábra

Viszont

$$a=z_1+u+y_1=\frac{ac_1}{c}+a_1+\frac{ab_1}{b}, \text{ innen } \frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=1.$$

II. megoldás

Az a_1 által levágott AB_1C_1 háromszög hozzáírt köre az ABC beírt körével azonos (23. ábra). Az a hasonlóság, amely az AB_1C_1 háromszöget az ABC háromszögbe viszi, az előbbi háromszög a_1 oldalához hozzáírt kört az ABC a oldalához hozzáírt körbe viszi. Így *(54. jegyzet)*



23. ábra

$$\frac{a_1}{a}=\frac{AE_1}{AE_2}=\frac{s-a}{s},$$

ahol

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Hasonlóan igazolható:

$$\frac{b_1}{b}=\frac{s-b}{s}, \quad \frac{c_1}{c}=\frac{s-c}{s}.$$

Ezeket összeadva:

$$\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=\frac{s-a}{s}+\frac{s-b}{s}+\frac{s-c}{s}=$$

$$=\frac{3s-(a+b+c)}{s}=1,$$

s ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés

Tekintsünk két párhuzamos szakaszt egyező vagy ellenkező előjelűnek aszerint, hogy a két szakasz kezdőpontjától a végpont felé mutató irány megegyezik, vagy ellentétes. Legyen most egy ABC háromszögnek valamely, a síkjában fekvő P pontjára vonatkozó tükörképe $A'B'C'$. Jelölje $A'B'$ metszéspontját BC-vel és CA-val C_1, illetve C_2; $B'C'$ metszéspontját CA-val és AB-vel A_2, illetve A_3; végül $C'A'$ met-

széspontját BA-val, illetve BC-vel B_3, illetve B_1. Ekkor

$$\frac{A_2A_3}{CB}+\frac{B_3B_1}{AC}+\frac{C_1C_2}{BA}=1.$$

(Feladatunkban mindhárom arányszám pozitív, és P szerepét O tölti be.)

Oldjuk meg ezt az általánosabb feladatot!

113. Jelentse a, b, c az ABC háromszög oldalainak hosszát. Húzzuk meg az ABC háromszögbe írt körnek az oldalakkal párhuzamos érintőit. Ezek az érintők az ABC háromszögből három újabb háromszöget vágnak le; az utóbbiak mindegyikében ismét megrajzoljuk a beírt kört. Számítsuk ki a négy beírt kör területének összegét.

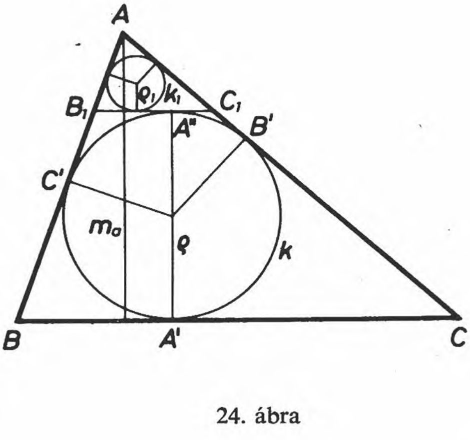
Megoldás

Ismeretes, hogy a háromszögbe írt k kör ϱ sugara egyenlő a $\frac{t}{s}$ hányadossal, ahol t a terület, s pedig a kerület fele *(54. jegyzet). Az a oldallal párhuzamos érintő által lemetszett H_1 háromszög hasonló az eredeti H háromszöghöz, tehát a beírt k_1 kör ϱ_1 sugara ugyanannyiad része ϱ-nak, mint H_1 valamelyik hosszmérete H megfelelő méretének.* Célszerű az a oldalra merőleges m_{a1} és m_a magasságok arányát vennünk, mert $m_{a1}=m_a-2\varrho$ *(24. ábra)*.

Másrészt $\quad m_a=\frac{2t}{a}$,

így $\quad m_{a1}=\frac{2t-2a\varrho}{a}$,

és $\quad \varrho_1=\frac{t-a\varrho}{t}\cdot\varrho=\varrho-\frac{\varrho^2}{t}a.$



24. ábra

Itt a helyébe b-t, majd c-t írva a b, illetve a c oldallal párhuzamos érintő által lemetszett háromszögbe írt kör ϱ_2, illetve ϱ_3 sugarát kapjuk. A négy kör területének összege kiemeléssel, a négyzetek kifejtésében a hasonló szerkezetű tagokat mindjárt egybefogva, további alakítással, végül mindent az oldalakkal kifejezve a következő:

$$\pi(\varrho^2+\varrho_1^2+\varrho_2^2+\varrho_3^2)=\pi\left[4\varrho^2-\frac{2\varrho^3}{t}(a+b+c)+\frac{\varrho^4}{t^2}(a^2+b^2+c^2)\right]=$$

$$=\frac{\pi\varrho^4}{t^2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{\pi t^2}{s^4}(a^2+b^2+c^2)=$$

$$=\frac{\pi(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^3}.$$

(Ugyanis $\varrho=\frac{t}{s}$ miatt a szögletes zárójel első két tagjának összege 0.)

Megjegyzés

A $\frac{\varrho_1}{\varrho}$ arányt az AB_1C_1 és ABC háromszögek kerületeinek arányával is kiszámíthatjuk. AB_1C_1 kerülete$=AC'+AB'=2(s-a)$ *(24. ábra).* Tehát $\varrho_1=\varrho\frac{s-a}{s}$. A további lépések az előző megoldáshoz hasonlók.

114. Egy háromszög oldalai a, b és c, területe t, továbbá fennáll a következő összefüggés:

(1) $$(a+b+c)(a+b-c)=4t.$$

Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű.

I. megoldás

A háromszög c oldalával szemközti szögét γ-val jelöljük. Megmutatjuk, hogy $\gamma=90°$.

Ismeretes, hogy $t=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. (1) *bal oldala a cosinustétel,* $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, *felhasználásával átalakítható:*

$$(a+b+c)(a+b-c)=a^2+b^2+2ab-c^2=2ab(1+\cos\gamma).$$

(1) a következő összefüggéssel ekvivalens:

(2) $$1+\cos\gamma=\sin\gamma.$$

Ezt az egyenletet kell megoldanunk $0°<\gamma<180°$ feltétel mellett.

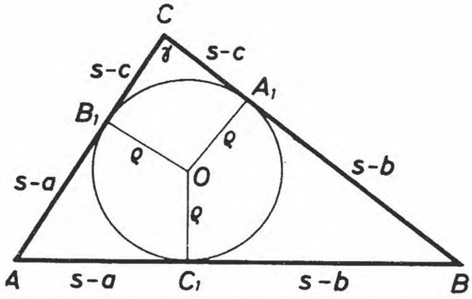
$\sin\gamma-\cos\gamma=\sqrt{2}\sin(\gamma-45°)$ helyességéről könnyen meggyőződhetünk. Tehát (2) ekvivalens a

$$\sin(\gamma-45°)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

egyenlettel. Láthatjuk, hogy egyedül $\gamma=90°$ felel meg a feltételeknek.

II. megoldás

Az $a+b+c=2s$ jelölést bevezetve $t=s\varrho$, ahol ϱ a háromszögbe írt kör sugara *(25. ábra)*, és $(a+b+c)(a+b-c)=$ $=4s(s-c)$. (1) tehát egyenértékű a következővel:



25. ábra

(3) $$s-c=\varrho.$$

Tudjuk, hogy a C csúcsból a beírt körhöz húzott érintőszakaszokra $CA_1=$ $=CB_1=s-c$ *(54. jegyzet)*.

(3)-ból következik, hogy a CB_1OA_1 derékszögű deltoid rombusz is, tehát négyzet. Ha pedig $\gamma=90°$, akkor teljesül (3) és (1).

115. Legyen M az ABC háromszög AB oldalának valamely belső pontja. Jelölje r_1, r_2 és r rendre az AMC, BMC, ill. ABC háromszögbe írható kör sugarát, továbbá ϱ_1 az AMC háromszög AM oldalához, ϱ_2 a BMC háromszög BM oldalához, végül ϱ az ABC háromszög AB oldalához tartozó hozzáírt kör sugarát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor fennáll az

(1) $$\frac{r_1}{\varrho_1}\cdot\frac{r_2}{\varrho_2}=\frac{r}{\varrho}$$

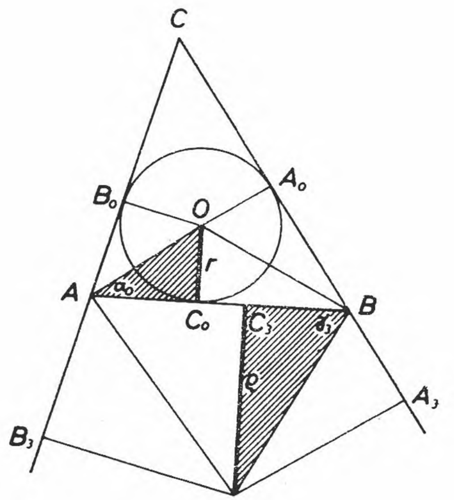
egyenlőség.

Megoldás

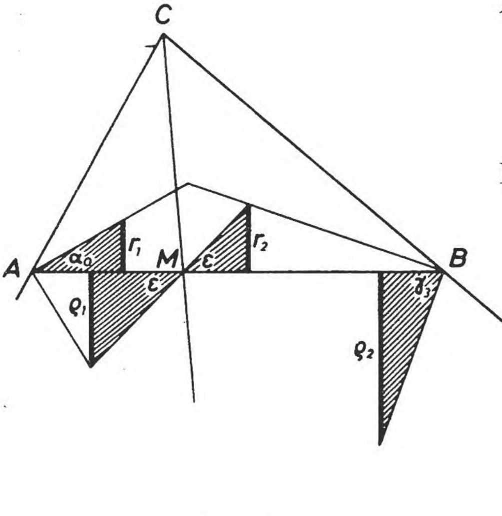
Az ABC háromszög beírt körének érintési pontjait A_0, B_0, C_0, az $AB=c$ oldalhoz írt kör érintési pontjait A_3, B_3, C_3 jelölje a *26/a ábra* szerint.

Tudjuk (54. jegyzet), hogy $AC_0=BC_3=\frac{1}{2}(b+c-a)=(s-a)$, *ezzel a beírt és hozzáírt kör sugarának arányát igen szerencsés módon csupán szögekkel fejezhetjük ki:*

$$\frac{r}{\varrho}=\frac{(s-a)\operatorname{tg}\alpha_0}{(s-a)\operatorname{tg}\gamma_3}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\operatorname{tg}\gamma_3}.$$



26/a ábra



26/*b* ábra

Ezt alkalmazzuk az *AMC*, *MBC* és *ABC* háromszögekre *(26/b ábra)*:

$$\frac{r_1}{\varrho_1}\cdot\frac{r_2}{\varrho_2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\operatorname{tg}\varepsilon}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\gamma_3}=\frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\operatorname{tg}\gamma_3}=\frac{r}{\varrho}.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés

A feladat természetesen másféleképpen is megoldható, de sokkal hosszadalmasabban. Itt azt a megoldást mutattuk be, amely rámutat a feladat készítőjének furfangjára.

116. Az AB szakasz mint átmérő fölé rajzoltuk a k félkört. Legyen C a k-nak A-tól és B-től különböző, tetszőleges pontja, D pedig a C-től AB-re bocsátott merőleges talppontja. Tekintsük a következő három kört (k_1-et, k_2-t és k_3-at), amelyeknek AB közös érintője, k_1 az ABC háromszögbe írt kör, míg k_2 és k_3 mindegyike érinti a CD szakaszt is, a k félkört is. Bizonyítsuk be, hogy k_1-nek, k_2-nek és k_3-nak van még egy közös érintője!

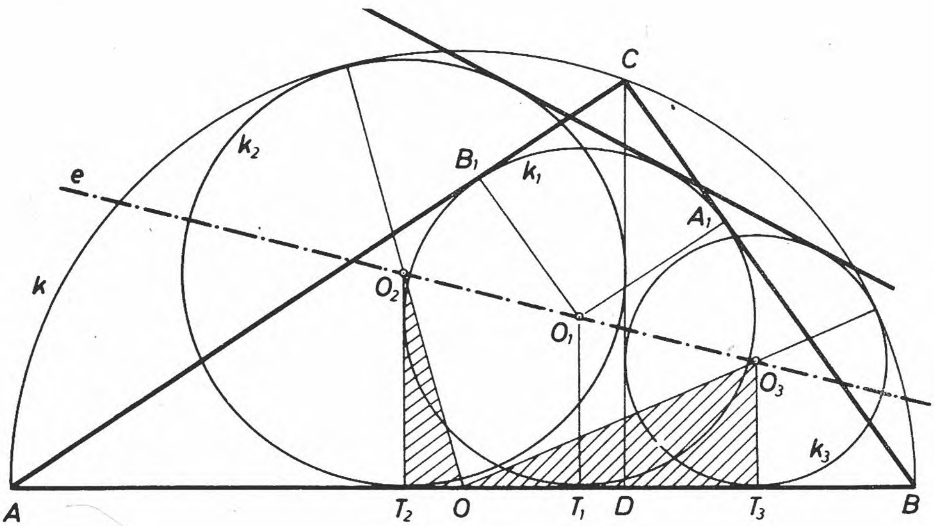
Megoldás

Elég belátnunk, hogy a k_1, k_2, k_3 kör O_1, O_2, O_3 középpontja egy e egyenesen van. Ez az egyenes ugyanis közös szimmetriatengelyük, tehát az AB közös érintő e-re vonatkozó tükörképe szintén érinti mindhárom kört.

Legyen a k_i kör középpontja O_i, sugara r_i, AB-n levő érintési pontja T_i ($i=1, 2, 3$), *a k félkör középpontja O, átmérője c. Azt fogjuk bebizonyítani, hogy O_1 az O_2O_3 szakasz felezőpontja, vagyis hogy*

(1) $$r_1=\frac{1}{2}(r_2+r_3),$$ (2) $$T_2T_1=\frac{1}{2}T_2T_3.$$

Feltehetjük, hogy — a *27. ábra* szerint — $CB \leqq CA$, ezért D az OB szakaszon van, és legyen $OD=d$; továbbá k_2 a CDA, k_3 a CDB derékszög tartományában van.



27. ábra

k_2 érinti a CD szakaszt, ezért $T_2D = r_2$; érinti k-t, ezért $OO_2 = \frac{c}{2} - r_2$. Az OO_2T_2 derékszögű háromszögben $OT_2 = |\, d - r_2 \,|$, és így

$$(d-r_2)^2 + r_2^2 = \left(\frac{c}{2} - r_2\right)^2, \quad r_2^2 - (2d-c)r_2 - \left(\frac{c^2}{4} - d^2\right) = 0.$$

Mivel $d < \frac{c}{2}$, az egyenlet egyetlen pozitív gyöke:

$$r_2 = d - \frac{c}{2} + \sqrt{c\left(\frac{c}{2} - d\right)},$$

és itt a gyökjel alatt $AB(OB - OD) = AB \cdot DB = BC^2$ áll, hiszen ABC derékszögű háromszög. Tehát

(3) $$r_2 = d - \frac{c}{2} + BC = BC - BD.$$

Hasonlóan az OO_3T_3 derékszögű háromszögben $OO_3 = \frac{c}{2} - r_3$, $OT_3 = d + r_3$, Pitagorasz tétele alapján $r_3^2 + (2d+c)r_3 - \left(\frac{c^2}{4} - d^2\right) = 0$, ennek pozitív gyöke

(4) $$r_3 = -d - \frac{c}{2} + \sqrt{c\left(\frac{c}{2} + d\right)} = -AD + AC.$$

Tehát

$$\frac{r_2+r_3}{2}=\frac{BC+AC-AB}{2}=r_1,$$

ami könnyen adódik az ABC háromszögből, a k_1 körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségéből. Ezzel (1)-et beláttuk.

k_1 érintőszakaszainak egyenlőségéből az is adódik, hogy

$$BT_1=BA_1=BC-CA_1=BC-r_1.$$

Felhasználva (1)-et és (3)-at

$$T_2T_1=T_2B-T_1B=(r_2+DB)-(BC-r_1)=r_1=$$
$$=\frac{r_2+r_3}{2}=\frac{T_2D+DT_3}{2}=\frac{T_2T_3}{2}.$$

Ezzel a (2) állítást és így a feladat állítását is bebizonyítottuk.

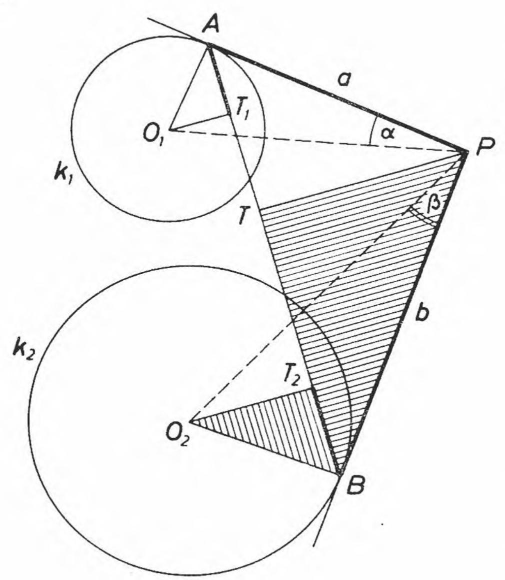
117. Jelölje f az a és b félegyenesek alkotta szög felezőjét. Egy az a és f félegyeneseket érintő k_1 kör a-t az A pontban, egy a b és f félegyeneseket érintő k_2 kör b-t a B pontban érinti. Igazoljuk, hogy az AB egyenes a k_1 és k_2 körökből egyenlő húrokat metsz ki.

118. Egy P pontból két körhöz egy-egy érintőt húztunk. Bizonyítsuk be, hogy ha az érintési pontokat összekötő egyenesből a két kör egyenlő hosszú húrokat metsz ki, akkor a P pontból a körök egyenlő szögekben látszanak.

Megoldás

A fenti két feladat állításait egyszerre fogjuk bizonyítani. Előbb azonban egyöntetű formában fogalmazzuk meg ezeket, és mindjárt bevezetjük a megoldásban szereplő jelöléseket is (28. ábra).

Az O_1 középpontú, r_1 sugarú k_1 körhöz és az O_2 középpontú, r_2 sugarú k_2 körhöz egy P pontból egy-egy érintőt húzunk. Az érintési pon-



28. ábra

tok A, illetve B. Feltesszük, hogy A, B, P nincsenek egy egyenesen. Legyen az érintőszakaszok hossza $PA=a$, illetve $PB=b$. Vezessük be az

$$APO_1\sphericalangle=\alpha,\quad BPO_2\sphericalangle=\beta$$

szögjelöléseket. (P-ből a k_1 kör 2α, a k_2 kör 2β szögben látszik.)

Az O_1, O_2 és P pontból bocsássunk merőlegest az AB egyenesre, a talppontok rendre T_1, T_2 és T. Vezessük még be az

$$AT_1=p,\quad BT_2=q,\quad PT=t$$

jelöléseket (az AB egyenes k_1-ből $2p$, k_2-ből $2q$ hosszúságú húrokat metsz ki).

a) *Állítás* (a **117.** feladat kissé általánosabban):

Ha $\alpha=\beta$, akkor $p=q$.

b) *Állítás* (a **118.** feladat):

Ha $p=q$, akkor $\alpha=\beta$.

Következzék a bizonyítás. Az AT_1O_1 és PTA derékszögű háromszögek hason lók, mert például $O_1AT_1\sphericalangle=APT\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek. Ezért $p:t=r_1:a$. Viszont az O_1AP derékszögű háromszögben

(1) $$\operatorname{tg}\alpha=r_1:a=p:t.$$

Hasonlóan kapjuk a BT_2O_2, PTB, illetve O_2BP háromszögekből, hogy

(2) $$\operatorname{tg}\beta=r_2:b=q:t.$$

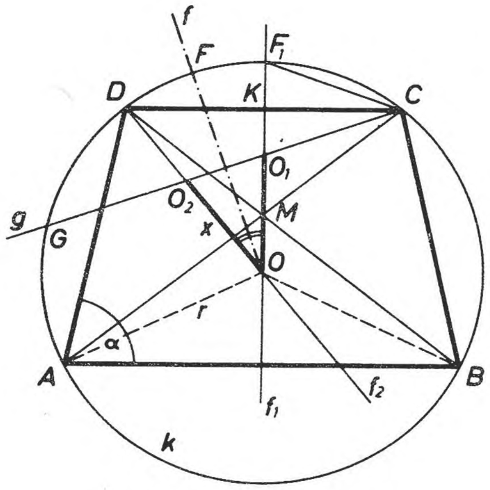
(1) és (2) összevetéséből kiolvashatjuk mindkét állításunkat.

Előfordulhat, hogy például O_1 egybeesik T_1-gyel, és ezzel együtt T az A-val, de (1) akkor is igaz. A bizonyítás többi része változatlan.

119. Az $ABCD$ szimmetrikus trapézban $AB \parallel CD$, az átlók metszéspontja M, és $AB>CD=AD$. Tekintsük a CDM és CDA háromszög beírt körét. Bizonyítsuk be, hogy ennek a két körnek a középpontja egyenlő távolságra van a trapéz köré írható kör középpontjától. Fejezzük ki ezt a távolságot a körülírt kör sugarával és a BAD szöggel.

Megoldás

a) Legyen a CDM és CDA háromszög beírt körének középpontja O_1, illetve O_2, a trapéz köré írt k kör középpontja O. A trapéz f_1 szimmetriatengelye O-n és O_1-en is áthalad. Mivel $AD=CD$, az $OD=f_2$ egyenes szimmetriatengelye a CDA háromszögnek, azért f_2 áthalad O_2-n is *(29. ábra)*.



29. ábra

Elegendő megmutatnunk, hogy az O_1O_2O háromszög O_1O_2 oldala merőleges O-nál levő szögének f szögfelezőjére. Ekkor a szimmetriából következik, hogy $OO_1 = OO_2$.

Az $O_1O_2 = g$ egyenes a CDM és CDA háromszögek közös ACD szögének szögfelezője, emiatt g és k G metszéspontja felezi a C-t nem tartalmazó AD ívet.

Messe továbbá az A-t nem tartalmazó CD ívet f_1 F_1-ben, f pedig F-ben. A szimmetriából következik, hogy az említett CD ív részeire: $\overset{\frown}{CF_1} = \overset{\frown}{F_1D}$, $\overset{\frown}{F_1F} = \overset{\frown}{DF}$. Továbbá $AD = CD$ miatt, a hozzájuk tartozó ívek fele is egyenlő: $\overset{\frown}{CF_1} = \overset{\frown}{GD}$. Az előbbi kettőt összeadva $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{GF}$, vagyis F felezi a CG ívet, tehát $f \perp g$. Ezt akartuk bizonyítani.

b) Legyen $OO_1 = OO_2 = x$, $OA = r$, $BAD\sphericalangle = \alpha$, és a CD oldal felezőpontja K. Ekkor az *a)* részben említettek szerint $DOK\sphericalangle = 1/4 \cdot DOB\sphericalangle = 1/2 \cdot \alpha$, másrészt, mivel $F_1CD\sphericalangle = DCG\sphericalangle = 1/2 \cdot F_1CO_1\sphericalangle$, azért K az $O_1F_1 = r - x$ szakaszt is felezi.

A DOK derékszögű háromszögből kifejezzük a keresett x-et:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos DOK\sphericalangle = \frac{OK}{OD} = \frac{OO_1 + O_1K}{OD} = \frac{1}{r}\left[x + \frac{1}{2}(r - x)\right] =$$

$$= \frac{x + r}{2r},$$

és innen

$$x = r\left(2\cos\frac{\alpha}{2} - 1\right).$$

Megjegyzés

Megállapíthatjuk, hogy az $AB > CD$ összefüggést nem használtuk fel a bizonyítás egyik részében sem. A C-t tartalmazó AOB szögtartomány mértékszáma

$$3\alpha < 360°, \text{ ezért } \frac{\alpha}{2} < 60°, \ 2\cos\frac{\alpha}{2} - 1 > 0.$$

120. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b, magassága m.

a) Szerkesszük meg a trapéz szimmetriatengelyének azt a P pontját, amelyből a szárak derékszög alatt láthatók.

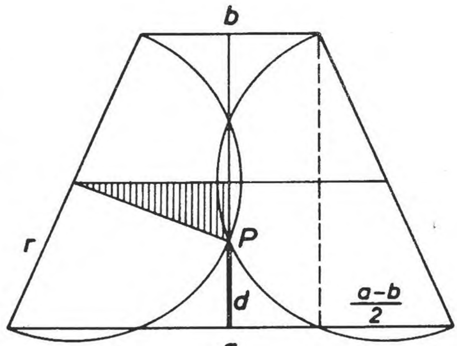
b) Számítsuk ki P távolságát az egyik párhuzamos oldaltól.

c) Mi a P pont létezésének feltétele?

Megoldás

a) *Mindegyik szár csak a föléje írt Thalész-kör pontjaiból látható derékszög alatt, ezért P csak e két kör közös pontjai közül választható.* A szimmetria miatt elegendő a szimmetriatengely és az egyik Thalész-kör metszéspontját keresni. Jelöljük a kör sugarát (a trapéz szárának felét) r-rel *(30. ábra)*. A két kör középpontját összekötő egyenes a trapéz középvonala, emiatt merőleges a szimmetriatengelyre és felezi azt.

b) Ha két különböző pont felel meg a feltételnek, akkor ezek a középvonalra szimmetrikusan helyezkednek el. Elegendő tehát, ha csak az egyiknek a középvonaltól mért távolságát számítjuk ki. Ez a szakasz befogója egy derékszögű háromszögnek, melynek átfogója r, másik befogója pedig a középvonal fele. A szakasz hossza tehát:



30. ábra

$$\sqrt{r^2-\left(\frac{a+b}{4}\right)^2}.$$

A sugarat a *30. ábrán látható derékszögű háromszögből határozhatjuk meg.* Ebben a háromszögben az átfogó hossza $2r$, a befogóké m és $\frac{a-b}{2}$, tehát

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

A P középvonaltól mért távolsága:

$$\sqrt{\frac{m^2}{4}+\left(\frac{a-b}{4}\right)^2-\left(\frac{a+b}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{m^2-ab}{4}}.$$

P-nek a hozzá közelebbi alaptól mért távolsága:

$$d=\frac{m}{2}-\sqrt{\frac{m^2-ab}{4}}.$$

c) A megoldás létezésének feltétele:

$$m^2 \geqq ab.$$

Ha az egyenlőségjel érvényes, akkor a $d=\frac{m}{2}$ értéket kapjuk. Ekkor a Thalész-kör érinti a szimmetriatengelyt.

121. Egy 2 méter átmérőjű, kör alakú biliárdasztal O középpontjától $\frac{1}{2}$ méterre fekvő P pontban van egy biliárdgolyó. A golyót úgy kell ellökni, hogy kétszeri visszaverődés után ismét P-n haladjon át. Mekkora szöget zár be ez esetben az ellökés iránya a PO iránnyal?

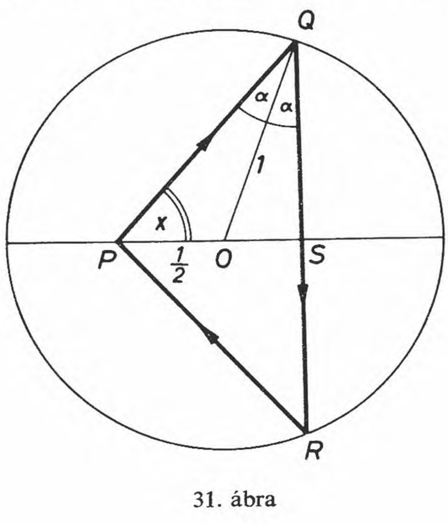
Megoldás

A visszaverődés törvénye miatt az ütközések a 31. ábra szerint játszódnak le. PQR szimmetrikus háromszög.

OQ felezi a PQS szöget. Alkalmazzuk az OPQ háromszögre a sinustételt:

$$\sin x : \sin \alpha = 1 : \frac{1}{2}.$$

Másrészt a PQS derékszögű háromszögben



31. ábra

$$\sin x = \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

A kettőt összevetve:

$$2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha - 1 = 0.$$

Innen csak

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0{,}366$$

jön számításba. Így $\alpha \approx 21{,}5°$ (tompaszögű megoldásnak most nincs értelme). A keresett $QPO\sphericalangle = x$ szögre pedig

$$x = 90° - 2\alpha \approx 47{,}0°.$$

Megjegyzés

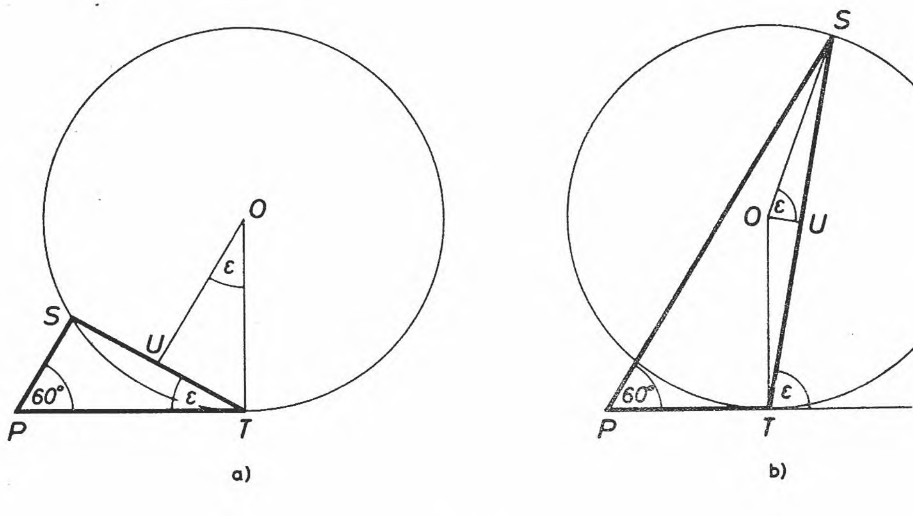
1. Feladatunk az *Alhazen*-féle biliárdfeladat speciális esete [3].
2. Ha a golyót a PO egyenes mentén lökjük el, akkor tetszőleges számú visszaverődés után áthalad a P ponton.

122. A PTS háromszög P-nél levő szöge 60°. Fejezzük ki annak a körnek a sugarát PT-vel és PS-sel, amely a T pontban érinti a PT egyenest és átmegy az S ponton.

Megoldás

Legyen a szóban forgó kör középpontja O, sugara r, az ST húr (O-tól különböző) felezési pontja U. Ekkor a $TOU\sphericalangle$ és $PTS\sphericalangle$ merőleges szárúak, így sinusuk megegyezik.

Az OTU derékszögű háromszögben (32/a, b ábra)



32. ábra

$$OT = r = \frac{TU}{\sin TOU\sphericalangle} = \frac{ST}{2\sin PTS\sphericalangle} = \frac{ST}{2\sin\varepsilon}.$$

A PTS háromszögben a sinustétel alapján

$$\sin PTS\sphericalangle = \frac{PS}{ST}\cdot\sin SPT\sphericalangle = \frac{PS}{ST}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A két eredményt összehasonlítva,

$$r=\frac{ST^2}{\sqrt{3}\cdot PS},$$

és ez a cosinustétel alkalmazásával így is írható:

$$r=\frac{PT^2+PS^2-PT\cdot PS}{\sqrt{3}\cdot PS}.$$

Ha ST felezési pontja $\bar{O}$, akkor a PTS derékszögű háromszögből $r=\frac{PT\cdot\sqrt{3}}{2}$. (Ez $PS=2PT$ figyelembevételével összhangban van az előzőleg kapott eredménnyel.)

123. Egy háromszög egyik szöge $\alpha=43°$. Határozzuk meg a háromszög szögeit, ha a háromszög t területére fennáll a

(1) $$2t=ab\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

összefüggés.

Megoldás

A 33. ábra szerinti betűzéssel helyettesítsük az (1) *összefüggésbe a következőket:*

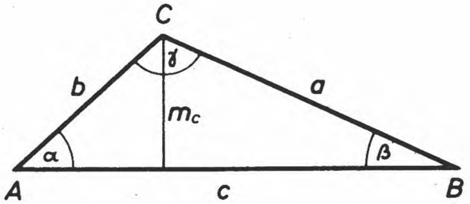
$$\sin\alpha=\frac{m_c}{b},\quad \sin\beta=\frac{m_c}{b},\quad 2t=cm_c,$$

majd emeljük négyzetre:

$$c^2m_c^2=a^2b^2\left(\frac{m_c^2}{a^2}+\frac{m_c^2}{b^2}+\frac{m_c^2}{ab}\right)=(a^2+b^2+ab)m_c^2.$$

Innen, mivel $m_c\neq 0$ $(\alpha=43°)$, azért

$$c^2=a^2+b^2+ab.$$



33. ábra

Hasonlítsuk össze ezt a c-re felírt cosinustétellel:

$$\cos\gamma=-\frac{1}{2},\quad \text{tehát } \gamma=120°.$$

Így a háromszög szögei: $\alpha=43°$, $\beta=17°$, $\gamma=120°$.

Könnyű belátni, hogy $\gamma=120°$ esetén az (1) összefüggés valóban teljesül.

Más megoldási lehetőség

Használjuk fel a $2t=ab\sin\gamma$ összefüggést.

124. Az ABC derékszögű háromszög $BC=a$ átfogóját n számú egyenlő szakaszra osztjuk, ahol n tetszés szerinti páratlan természetes szám. Jelöljük h-val az átfogóhoz tartozó magasságot, továbbá α-val azt a szöget, amely alatt az átfogó felezőpontját tartalmazó szakasz látszik az A csúcsból. Bizonyítsuk be, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

Megoldás

A semmitmondó $n=1$ esetet figyelmen kívül hagyjuk, mert ekkor $\alpha=90°$, és így sem $\operatorname{tg}\alpha$, sem a jobb oldalon álló hányados nincs értelmezve.

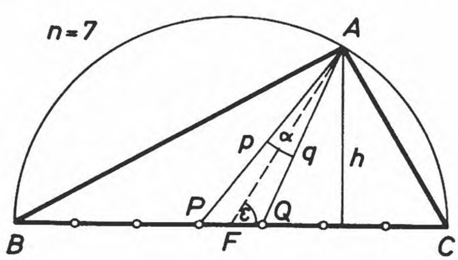
Legyen az átfogónak az F felezőpontot tartalmazó szakasza PQ úgy, hogy a pontok sorrendje az átfogón B, P, F, Q, C. Legyen $AP=p$, és $AQ=q$ *(34. ábra)*.

A $PQ=\frac{a}{n}$, *és az* APQ *háromszögnek a* PQ *alaphoz tartozó magassága* h, *ezért e háromszög területét kétféleképpen kifejezve,*

$$\frac{a}{n}\cdot\frac{h}{2}=\frac{pq}{2}\sin\alpha,$$

és innen

$$\sin\alpha=\frac{ah}{npq}.$$



34. ábra

Másrészt a cosinustétellel:

$$\cos\alpha=\frac{p^2+q^2-\frac{a^2}{n^2}}{2pq},$$

és így

(1) $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2ah}{n\left(p^2+q^2-\frac{a^2}{n^2}\right)}.$$

A p^2+q^2 összeget kifejezhetjük az adatokkal. F a részekre osztott BC átfogó középső PQ szakaszát is felezi, tehát

$$PF=FQ=\frac{a}{2n},\quad \text{másrészt}\quad AF=\frac{a}{2}.$$

Legyen $AFQ\sphericalangle=\varepsilon$, ekkor az $AFP\sphericalangle=180°-\varepsilon$.
Az APF és AQF háromszögekből cosinustétellel *(43. jegyzet)*:

$$p^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2n}\right)^2+2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2n}\cos\varepsilon,$$

$$q^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2n}\right)^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2n}\cos\varepsilon,$$

tehát

$$p^2+q^2=2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2n}\right)^2\right]=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2n^2}=\frac{(n^2+1)a^2}{2n^2}.$$

Ezt (1)-be helyettesítve:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2ah}{\dfrac{(n^2+1)a^2}{2n}-\dfrac{a^2}{n}}=\frac{4nh}{(n^2-1)a}.$$

Ezt kellett bizonyítani.

Megjegyzés

Látható, hogy ha P és Q tükrösek F-re, valamint $\dfrac{BC}{PQ}=n$, ahol n 1-től különböző pozitív szám (nem biztos, hogy egész), akkor teljesül a feladat állítása.

125. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan háromszög van, amelyben az oldalak mérőszámai egymást követő természetes számok, azonkívül az egyik szög kétszer akkora, mint ennek a háromszögnek egy másik szöge.

I. megoldás

A szögekre vonatkozó összefüggés alapján keressünk kapcsolatot az oldalak között. Megmutatjuk, hogy ha $\gamma=2\alpha$ (35. ábra), akkor

(1) $$c^2=a(a+b).$$

Legyen az ABC háromszög C-ből induló szögfelezője CD. A szögfelező osztásaránya alapján

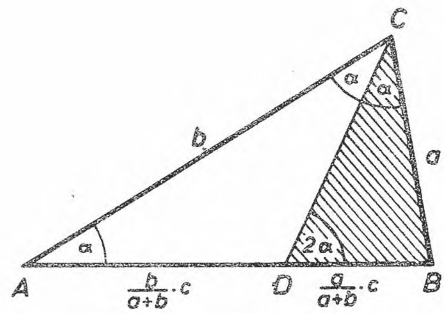
(2) $$DB=\frac{a}{a+b}\cdot c,\quad AD=\frac{a}{a+b}\cdot c.$$

$\gamma=2\alpha$ miatt az ACD háromszög egyenlő szárú, és D-nél levő külső szöge

$$CDB\sphericalangle=2\alpha=ACB\sphericalangle.$$

Így két-két szögük megegyezése miatt ACB és CDB hasonló háromszögek:

$CB : AB=DB : CB$, és (2) felhasználásával $a : c=\left(\frac{a}{a+b}\cdot c\right) : a$. Ebből pedig (1)-hez jutunk.



35. ábra

Most használjuk fel a további feltételeket.
$c>a$ miatt csak $c=a+1$, vagy $c=a+2$ lehetséges.

Ha $c=a+1$, (1) alapján

$$b=\frac{c^2-a^2}{a}=\frac{2a+1}{a}=2+\frac{1}{a},$$

és ez csak $a=1$ mellett egész. Ekkor azonban $c=2$ és $b=3$, a háromszög-egyenlőtlenség nem teljesül.

Ha $c=a+2$, $b=a+1$, akkor

$$(a+2)^2=a(2a+1),\quad a^2-3a-4=(a+1)(a-4)=0.$$

Ennek pozitív gyöke $a=4$, és a feladat egyetlen megoldása:

$$a=4,\quad b=5,\quad c=6.$$

II. megoldás

Ha $\gamma=2\alpha$, alkalmazzuk az a, c oldalpárra a sinustételt, majd az a oldalra a cosinustételt:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}.$$

Ebből ismét (1)-hez jutunk, majd az 1. megoldás szerint haladhatunk tovább.

Megjegyzés

Megmutathatjuk, hogy ha (1) fennáll, akkor $\gamma=2\alpha$ is igaz.

126. Jelölje valamely ABC háromszögben α, β, illetve γ rendre a CAB, ABC, illetve BCA szög mérőszámát, továbbá a, illetve b a BC, illetve CA oldal hosszúságát.

Bizonyítsuk be, hogy ha

(1) $$a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a \operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta),$$

akkor az ABC háromszög egyenlő szárú.

I. Megoldás

Sem α, sem β nem derékszög, különben a föltevésnek nem volna értelme; továbbá $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}>0$, hiszen $\frac{\gamma}{2}$ hegyesszög. Így (1) *mindkét oldalát szorozva* $\cos\alpha\cos\beta\cos\frac{\gamma}{2}$*-vel, és tagjait a és b szerint rendezve, az* (1)*-gyel ekvivalens*

$$a\cos\beta\left(\cos\alpha\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\alpha\sin\frac{\gamma}{2}\right)+b\cos\alpha\left(\cos\beta\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\beta\sin\frac{\gamma}{2}\right)=0$$

egyenlőséget kapjuk.

A zárójelekre az addíciótételt alkalmazva látjuk, hogy egyik a másiknak (-1)-szerese, hiszen bennük $\alpha+\frac{\gamma}{2}$ és $\beta+\frac{\gamma}{2}$ cosinusa áll, és e két szög egymás kiegészítő szöge.

A feltétel így alakul:

$$\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)(a\cos\beta-b\cos\alpha)=0.$$

Tehát a

(2) $$\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)=0$$

és

(3) $$a\cos\beta=b\cos\alpha$$

egyenlőségek közül legalább az egyik teljesül.

Mármost (2)-ből $\alpha+\frac{\gamma}{2}$ derékszög, így $\beta+\frac{\gamma}{2}$ is az, tehát (2) csak $\alpha=\beta$ esetén teljesül.

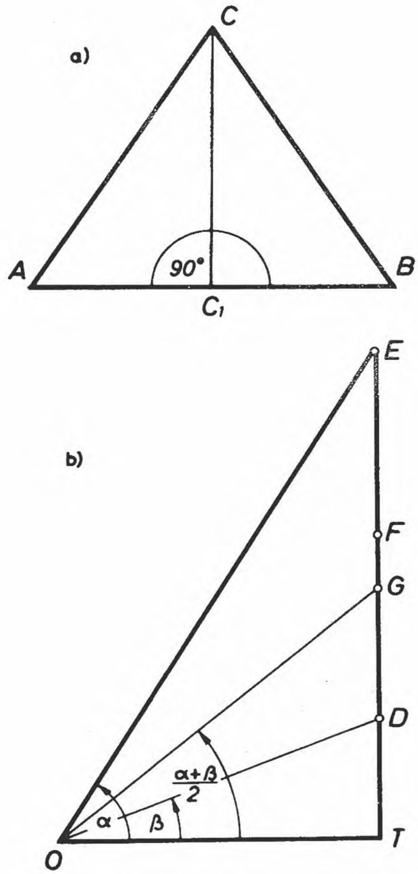
(3) két oldala pedig a háromszög C-ből húzott magassága C_1 talppontjának B-től, illetve A-tól vett távolsága *(36/a ábra)*, s mivel a $BC_1=AC_1$, ezért az ABC háromszög egyenlő szárú.

Megjegyzés

A (3)-ból a sinustétel alkalmazásával is haladhatunk tovább:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$\sin(\alpha-\beta)=0,\ \alpha=\beta.$$



36. ábra

II. megoldás

Az (1) szimmetriája miatt választhatjuk a betűzést úgy, hogy $\alpha \geqq \beta$ azaz $a \geqq b$ legyen. Nem lehet α tompaszög, különben $90° > 180° - \alpha = \beta + \gamma > \beta$ miatt $|\operatorname{tg}\alpha| > \operatorname{tg}\beta$ és $|a \operatorname{tg}\alpha| > b \operatorname{tg}\alpha$, így (1) jobb oldala negatív lenne, holott bal oldala pozitív. Derékszög sem lehet α, mert akkor a jobb oldalnak nem lenne értelme.

Megmutatjuk, hogy a $90° > \alpha > \beta$ *föltevést* (1)*-hez csatolva ellentmondásra jutunk.* Ekkor $a > b$, $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$, így $(a-b)(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) > 0$-ból kifejtéssel

$$a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta > a \operatorname{tg}\beta + b \operatorname{tg}\alpha$$

teljesül. Mindkét oldalhoz $(a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta)$-t adva, a jobb oldal szorzattá alakítható:

$$2(a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta) > (a+b)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta).$$

Osszuk el az egyenlőtlenséget $2 \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$ -lel, így

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a \operatorname{tg}\alpha + b \operatorname{tg}\beta) > (a+b)\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2 \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Figyelembe vesszük az (1) feltételt.

Tehát a

(4) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}>\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Megmutatjuk, hogy ez nem igaz.

Mérjük fel egy T csúcsú derékszög egyik szárára a $TO=1$ szakaszt, majd az OT egyenes ugyanazon partjára a $TOD\sphericalangle=\beta$, $TOE\sphericalangle=\alpha$ és $TOG\sphericalangle=\frac{\alpha+\beta}{2}$ szöget, ahol D, E, G rendre az új szár metszéspontja a derékszög másik szárával *(36/b ábra)*. Mivel $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ugyancsak hegyesszög, (4) szerint

$$TG>\frac{TE+TD}{2}=TF,$$
$$DG>DF,$$

ahol F a DE szakasz felezőpontja. Ez azonban lehetetlen, mert az ODE háromszögben, az $ODE\sphericalangle>90°$ miatt, $OE>OD$, és OG felezi a DOE szöget, így

$$\frac{DG}{GE}=\frac{OD}{OE}<1,\quad DG<GE,\quad DG<\frac{DE}{2}=DF.$$

Ezt akartuk bizonyítani. Eszerint (1) csak $\alpha=\beta$ esetén teljesülhet. Ekkor viszont teljesül is, hiszen így $\frac{\gamma}{2}$ pótszöge α-nak és β-nak, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ reciproka $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$-nak.

Megjegyzés

A II. megoldásban bebizonyítottuk, hogy ha α, β hegyesszögek, akkor

(5) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\leqq\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}.$$

Tehát a $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban a $\operatorname{tg}(x)$ függvényre a *Jensen*-tétel *(24. jegyzet)* alapján

(6) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}{n}\leqq\frac{\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2+\ldots+\operatorname{tg}\alpha_n}{n},$$

ahol $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, n természetes szám. Az egyenlőség (5)-ben $\alpha=\beta$, (6)-ban $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n$ mellett teljesül.

127. Bizonyítsuk be, hogy ha egy négyszög két szemben fekvő oldalának felezőpontjait összekötő szakasz egyenlő a másik két oldal számtani közepével, akkor a négyszög trapéz.

Megoldás

Az $ABCD$ négyszög AD és BC oldalának felezőpontjai E és F. *Feltevésünk szerint* $EF=\frac{1}{2}(AB+DC)$. *Be fogjuk látni, hogy* AB *és* CD *párhuzamosak.*

Jelöljük az AC *átló felezőpontját* G*-vel (37. ábra).* GE az ACD háromszög CD-vel párhuzamos középvonala; ezért

$$GE=\frac{1}{2}CD.$$

GF az ABC háromszög AB-vel párhuzamos középvonala, így

$$GF=\frac{1}{2}AB.$$

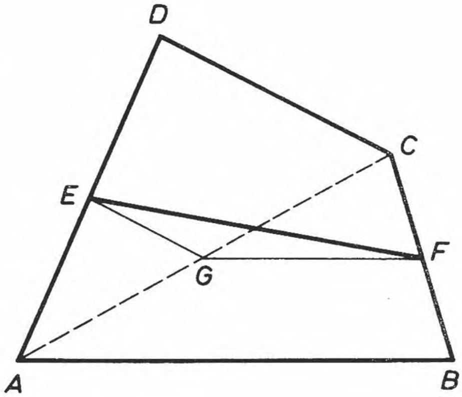
Tehát

$$GE+GF=\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}AB.$$

Ezt az

$$EF=\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}AB$$

feltevéssel összevetve, $GE+GF=EF$ következik. Ez csak úgy lehet, ha E, G, F egy egyenesre illeszkednek: $CD \parallel EF \parallel AB$, vagyis az $ABCD$ négyszög trapéz.



37. ábra

Más megoldási lehetőség

Tükrözzük a négyszöget az F pontra *(28. jegyzet).*

Megjegyzés

Ebből a megoldásból kiolvasható, hogy az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ vektorokkal az $\overrightarrow{EF}$ vektor könnyen kifejezhető: $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$ *(43. jegyzet).*

128. Bizonyítandó, hogy bármely konvex négyszögnek van olyan csúcsa, melyből induló oldalakat paralelogrammává egészítve ki, e paralelogrammát a négyszög tartalmazza.

I. megoldás

Paralelogrammákra nincs mit bizonyítanunk. Ha a négyszög trapéz, akkor a rövidebb párhuzamos oldal egyik végpontjából párhuzamost húzva a másik végpontból induló oldallal, a feltételnek megfelelő paralelogrammához jutunk. *Az általános négyszög esetét a trapézra fogjuk visszavezetni.* Ha ugyanis a négyszögből olyan trapézt tudunk kivágni, melynek rövidebb párhuzamos oldala és az ezzel szomszédos egyik oldala egybeesik egy-egy négyszögoldallal, akkor ez a két oldal kiegészíthető a kívánt paralelogrammává.

Tekintsük a négyszög egyik szemközti oldalpárjának metszéspontját, majd válasszuk ki a négyszög másik két oldala közül azt, amelynek végpontjai e metszésponthoz közelebb esnek. Ha a négyszög negyedik oldalának a szemközti oldalhoz közelebb eső végpontjából párhuzamost húzunk a szemközti oldallal, akkor a fenti tulajdonsággal rendelkező trapézhoz jutunk.

II. megoldás

Azt fogjuk bizonyítani, hogy a négyszögnek van két olyan szomszédos oldala, amelyeket paralelogrammává kiegészítő párhuzamosok a négyszög belseje felé haladnak. Ha egy oldalt tekintünk, és egyik végpontjából párhuzamost húzunk a másik végpontjából induló oldallal, ez a párhuzamos akkor és csak akkor halad a négyszög belseje felé, ha a kiszemelt oldalon fekvő szögek összege legalább 180°.

Mivel a négyszög szögeinek összege 360°, ezért egy szemközti oldalpárból az egyik oldal melletti szögek összege legalább 180°. Ha mindkét szemközti oldalpárból kiválasztjuk az előbbi tulajdonsággal rendelkező oldalt, akkor nyilván szomszédos oldalpárhoz jutunk. Ezek a szomszédos oldalak a fentiek szerint kiegészíthetők a feltételnek megfelelő paralelogrammává.

Újabb megoldási lehetőségek

1. Határozzuk meg a négyszög (nem trapéz) szemközti éleinek metszéspontjait, majd ezek segítségével a megfelelő négyszögcsúcsot.

2. Bizonyítsuk be, hogy a négyszögnek van olyan csúcsa, amit ha egy átlót felező pontra tükrözünk, a tükörkép a négyszög belsejébe esik. *(28. jegyzet).*

Megjegyzés

1. A fenti feladat nevezetes segédtétel az ún. *rácsgeometriában* ([4], [7], [8]). Segítségével például könnyen igazolható, hogy *egy paralelogrammarácsban nincs szabályos rácsötszög és nincs 6-nál nagyobb csúcsszámú szabályos rács-n-szög sem.*

Ha ugyanis lenne ilyen, akkor ennek minden csúcsát a szomszédos csúcsokat összekötő szakasz felezőpontjára tükrözve, a tükörképek az eredeti által tartalmazott szabályos rács-n-szög csúcsai lennének. Az eljárást folytatva, egy pontra zsugorodó rácssokszögek szorzatát nyernénk, ez viszont ellentmondáshoz vezet.

Ugyancsak feladatunkból következik az az észrevétel, hogy nincs négynél nagyobb oldalszámú üres konvex rácssokszög.

2. Az 1964. évi *Schweitzer Miklós* matematikai emlékverseny 4. feladata volt a mi feladatunk következő általánosítása:

Bizonyítsuk be, hogy ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sorrendben egy K zárt konvex n-szög csúcsai, akkor legalább $n-3$ A_i szögpontra teljesül az, hogy A_i-t az $A_{i-1}A_{i+1}$ szakasz felezéspontjára tükrözve, a tükörképet K tartalmazza ($A_{n+1}=A_1$, $A_0\equiv A_n$).

129. Az ABC egyenlő oldalú háromszög A csúcsának a BC oldalra vonatkozó tükörképe körül a B csúcson átmenő kört rajzolunk. Igazoljuk, hogy a kör tetszés szerinti P pontját A-val, B-vel és C-vel összekötve, e három szakaszból derékszögű háromszög szerkeszthető.

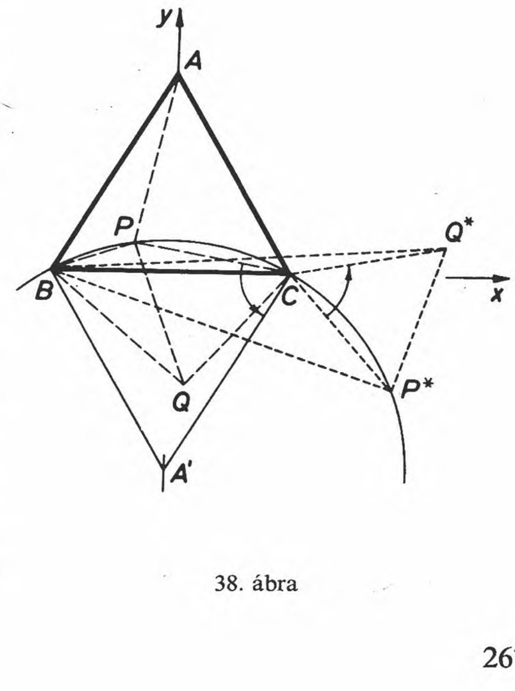
I. megoldás

Válasszuk a betűzést úgy, hogy az ABC szabályos háromszöget és a P pontot C körül pozitív irányban 60°-kal elforgatva, A képe B-be, B képe A'-be kerüljön, a P pont képét Q jelölje (28. jegyzet).

Állítjuk, hogy a $H\equiv BPQ$ háromszög megfelel a feladat állításának (38. ábra).

A H háromszög egyik oldala PB, továbbá $QB=PA$, végül $PQ=PC$, mert 60°-os elforgatást végeztünk, CPQ is szabályos háromszög.

Másrészt a QPB szög derékszög, mert egyenlő a $BPC\sphericalangle$ és a $QPC\sphericalangle=60°$ különbségével, illetve összegével aszerint, hogy P-t a kör kisebb, illetve nagyobb BC ívén vettük fel. A BPC kerületi szög mértékszáma az



38. ábra

első esetben $+150°$, a másodikban (a *38. ábrán* P^*, ill. Q^*) $30°$, hiszen a $CA'B$ középponti szög $60°$. Ha azonban P-ként a B vagy C csúcsot választjuk, a három szakasz egyike zérus, a további kettő pedig egyenlő, így H egyenesszakasszá fajul.

II. megoldás

Helyezzünk az ábrára koordináta-rendszert, vegyük x, y tengelynek a BC egyenest, illetve a BC szakasz felező merőlegesét — a *38. ábra* szerint irányítva —, a BC oldal felét válasszuk egységnek. Ekkor az adott pontok koordinátái:

$A(0, \sqrt{3})$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, a kör középpontja $A'(0, -\sqrt{3})$ a kör sugara 2, és így a $P(x, y)$ pont által befutott kör egyenlete

$$x^2+(y+\sqrt{3})^2-4=0. \tag{1}$$

A szóban forgó szakaszok négyzete rendre:

$$PA^2=x^2+(y-\sqrt{3})^2, \quad PB^2=(x+1)^2+y^2; \quad PC^2=(x-1)^2+y^2.$$

Ezekkel (1) szerint

$$PB^2+PC^2-PA^2=x^2+y^2+2\sqrt{3}\,y-1=x^2+(y+\sqrt{3})^2-4=0.$$

A Pitagorasz-tétel megfordítása alapján tehát a szakaszokból készített háromszög derékszögű (esetleg elfajul).

130. Egy $60°$-os szög egyik szárán elhelyezkedő A, illetve A_1 pontnak a szög csúcsától való távolsága p, illetve $2q$; a másik száron elhelyezkedő B, illetve B_1 pontnak a csúcstól való távolsága pedig q, illetve $2p$. Az A_1B_1 távolság felezőpontja C. Bizonyítandó, hogy az ABC háromszög szabályos.

I. Megoldás

Feltehetjük, hogy $q \leqq p$. *Mivel az* $O\sphericalangle 60°$ *és* $OA_1=2OB$, $OB_1=2OA$, *ezért* A_1OB *és* OB_1A *derékszögű háromszögek.* A és B rajta van az A_1B_1 szakasz fölé rajzolt, C középpontú Thalész-körön *(39/a ábra)*. Így $AC=CB$.

Másrészt az $OB_1A\sphericalangle = BB_1A\sphericalangle = 30°$, így az AB-hez tartozó középponti szög $ACB\sphericalangle = 60°$. Ez azt jelenti, hogy ABC szabályos háromszög.

A bizonyításnál kihasználtuk, hogy B az OB_1 szakasz belsejében van, azaz $q<2p$; ez előrebocsátott feltevésünk miatt teljesül.

II. megoldás

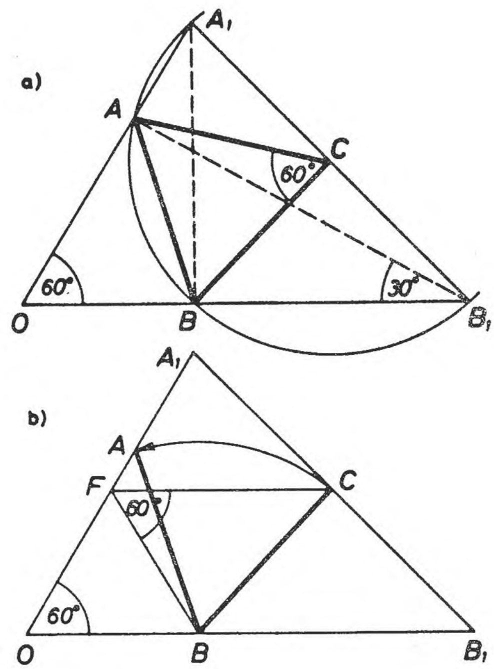
Az OA_1 *szakasz* F *felezőpontját tekintve (39/b ábra) az* FC *az* A_1OB_1 *három-*

szög középvonala, így $FC=\frac{1}{2}OB_1=$ $=OA$ *és* $FC \parallel OB_1$. *Másrészt* $OF=$ $=\frac{1}{2}OA_1=q=OB$, *így a* $CFB\sphericalangle=$ $=FBO\sphericalangle=60°$.

Ha tehát a BCF háromszöget B körül pozitív irányban elforgatjuk 60°-kal, akkor F éppen O-ba, C pedig az A pontba kerül. Ez viszont azt jelenti, hogy BC 60°-os elforgatással BA-ba megy át, tehát az ABC háromszög szabályos *(28. jegyzet)*.

Újabb megoldási lehetőség:

Legyen az OA_1 felezőpontja A_2, az OB_1 szakaszé B_2. Igazoljuk, hogy az ABC háromszög minden oldala A_2B_2 hosszúságú (pl. AA_2BB_2 szimmetrikus trapéz stb.).



39. ábra

III. megoldás

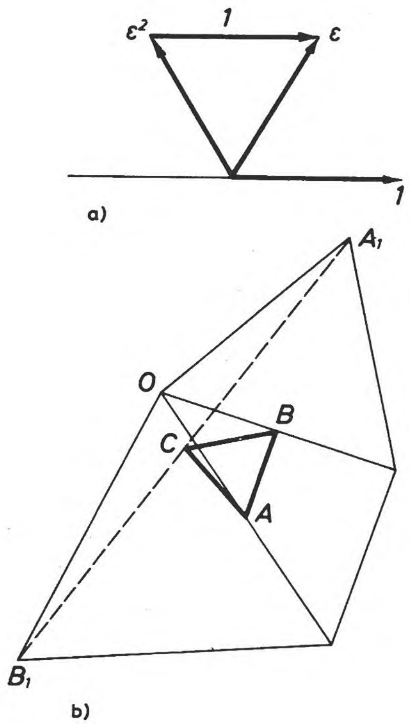
A komplex számsíkon oldjuk meg feladatunkat (50. jegyzet). Az O pontból az A, B, C, A_1, B_1 ponthoz vezető vektoroknak rendre az a, b, c, a_1, b_1 komplex számokat feleltetjük meg.

Legyen ε az egységnyi abszolút értékű $+60°$ argumentumú komplex szám, amelyre tehát $\varepsilon^2-\varepsilon+1=0$ *(40/a ábra)*.

Felírhatjuk, hogy $a=\frac{1}{2}b_1\varepsilon$, $a_1=2b\varepsilon$, $c=\frac{1}{2}(a_1+b_1)=b\varepsilon+\frac{1}{2}b_1$.

Azt kell igazolnunk, hogy pl. a $\overrightarrow{BC}$ 60°-os elforgatottja éppen $\overrightarrow{BA}$, azaz $(c-b)\varepsilon=(a-b)$. Valóban

$$(c-b)\varepsilon=\left[b(\varepsilon-1)+\frac{1}{2}b_1\right]\varepsilon=b(\varepsilon^2-\varepsilon)+\frac{1}{2}b_1\varepsilon=$$
$$=-b+\frac{1}{2}b_1\varepsilon=a-b.$$



40. ábra

Sőt, gondolatmenetünk változatlanul érvényes a *40/b ábrán* látható, feladatunknál általánosabb esetben is.

131. Rajzoljunk egy háromszög oldalai fölé kifelé négyzeteket. Bizonyítsuk be, hogy a négyzeteknek a háromszögcsúcsoktól különböző csúcsai olyan hatszöget határoznak meg, amelynek minden második oldala a háromszög egy-egy súlyvonalának kétszerese.

I. Megoldás

Jelölje a *B*-ből induló *AB*-re, illetve *BC*-re merőleges négyzetoldalakat *BD* és *BE* *(41. ábra). A BDE háromszöget B körül úgy forgatjuk el* 90°*-kal, hogy E a C pontba kerüljön. Ekkor a D elforgatottja az AB oldal meghosszabbítására eső* D_1 *pont lesz, melyre* $D_1B=BA$.

Ha meghúzzuk az *ABC* háromszög *BF* súlyvonalát, akkor ez az ACD_1 háromszög középvonala is. Ennélfogva az *ED*-vel egyenlő CD_1 szakasz a *BF* súlyvonal kétszerese, a feladat állításának megfelelően. Hasonlóan járhatunk el a hatszög másik két szóba jövő oldalával is.

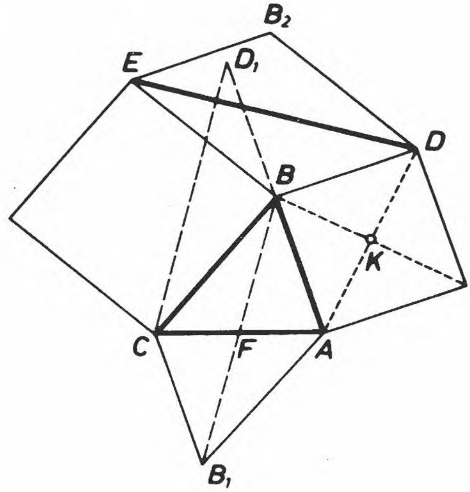
Megjegyzés

Mivel a *BF* és CD_1 szakaszok párhuzamosak, ezért *ED* merőleges a *BF* súlyvonalra.

II. megoldás

Egészítsük ki az *ABC* és *BDE* háromszögeket az $ABCB_1$, ill. BDB_2E paralelogrammával *(41. ábra). Bebizonyítjuk, hogy ez a két paralelogramma egybevágó.*

Forgassuk el ugyanis az $ABCB_1$ paralelogrammát az AB fölötti négyzet K középpontja körül 90°-kal úgy, hogy az AB szakasz a BD-be menjen át. Ekkor az AB_1 szakasz, amelyik párhuzamos és egyenlő BC-vel, az utóbbira merőleges BE négyzetoldalra kerül, tehát az $ABCB_1$ paralelogramma az előbbi forgatásnál a BDB_2E paralelogrammába kerül. BB_1 és DE egymásnak megfelelő átlók, ezért egyenlők és merőlegesek egymásra, tehát $ED=2\cdot BF$. Hasonló a bizonyítás a feladatban említett másik két hatszögoldal esetére is.



41. ábra

Megjegyzés

1. Az utóbbi megoldásban világos az ABC és DBE háromszögek teljesen szimmetrikus szerepe.

2. A feladat állítása igaz akkor is, ha az ABC háromszögek oldalaira „befelé" rajzolunk négyzeteket. (A hatszög ebben az esetben hurkolt hatszög lesz.) A bizonyításaink annyiban módosulnak, hogy a BDE háromszög helyébe annak a B pontra vonatkozó tükörképe lép *(28. jegyzet)*.

Más megoldási lehetőség:

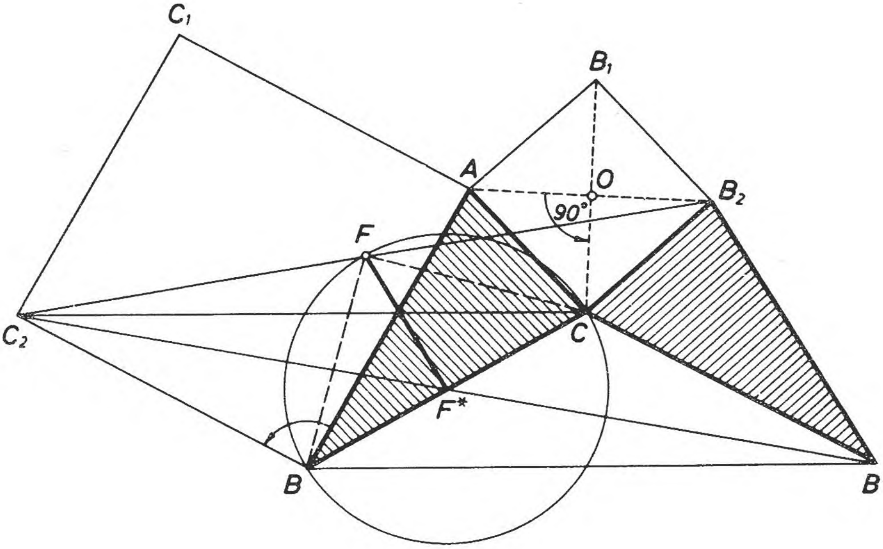
1. Forgassuk el az ABF és CBF háromszögeket B körül 90°-kal úgy, hogy az A pont D-be, C pedig E-be kerüljön.

2. Vektorokkal *(42., 50. jegyzet)*.

132. Az ABC háromszög AB és AC oldalai fölé (kifelé) az AC_1C_2B és AB_1B_2C négyzeteket rajzoljuk. Bizonyítandó, hogy a B_2C_2 szakasz felezőpontja a BC átmérőjű körön fekszik.

I. megoldás

Forgassuk el az ABC háromszöget az ACB_2B_1 négyzet O középpontja körül 90°-kal úgy, hogy A a C-be kerüljön (42. ábra). Ekkor C a B_2-be kerül, B elforgatott helyzete pedig legyen B'.



42. ábra

Ha az ABC háromszöget B körül forgatnánk ugyanilyen irányban 90°-kal, akkor a BA oldal BC_2-be menne át. *Ezek szerint $B'C$ és BC_2 párhuzamosak, egyenlők és egyező állásúak, a $B'CC_2B$ négyszög paralelogramma.*

$B'CC_2B$ BC átlójának F^* felezési pontja felezi a C_2B' átlót is. Jelöljük F-fel a B_2C_2 szakasz felezőpontját. *Ekkor F^*F a $C_2B'B_2$ háromszög $B'B_2$ oldalával párhuzamos középvonala, ezért F^*F párhuzamos $B'B_2$-vel, és fele akkora.* $B'B_2$ a BC oldal 90°-os elforgatottja, ezért $B'B_2 \perp BC$, és vele egyenlő. *Így F^*F merőleges BC-re és feleakkora.*

Ezek szerint B, C, F az F^* ponttól egyenlő távolságra vannak, s így F^* középpontú, BC átmérőjű körre illeszkednek. A bizonyítandó állítást ezzel igazoltuk.

II. megoldás

Vektorokkal bizonyítunk *(43. ábra)*. Vezessük be a $\overrightarrow{CB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BA}=\mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$ vektorokat *(42. jegyzet)*.

Legyen az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok pozitív irányú 90°-os elforgatottja rendre: $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$.

A BC oldal felezőpontját F^*-gal, a C_2B_2 szakasz felezőpontját F-fel, az FF^* vektort $\mathbf{x}$-szel jelöltük, továbbá $\overrightarrow{C_2F}=\overrightarrow{FB_2}=\mathbf{f}$.

Az a célunk, hogy belássuk az $|\mathbf{x}|=\frac{1}{2}|\mathbf{a}|$ egyenlőséget, mert ez biztosítja, hogy F illeszkedjék egy F középpontú BC átmérőjű körre.*

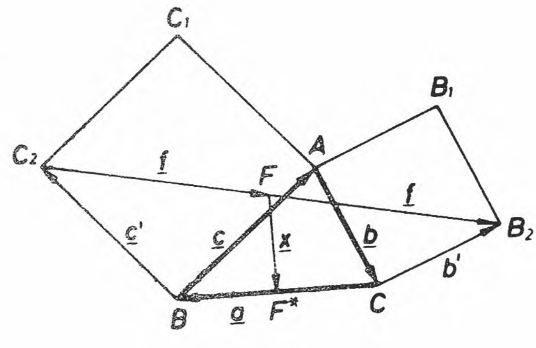
Az $\mathbf{x}$ vektort $\mathbf{b}'$-vel és $\mathbf{c}'$-vel fejezzük ki.

Az FF^*BC_2 négyszögből:

$$\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{c}'+\mathbf{f}=0.$$

Az FB_2CF^* négyszögből:

$$\mathbf{x}-\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}'-\mathbf{f}=0.$$



43. ábra

A vektoregyenletek összeadása után

$$(1) \qquad 2\mathbf{x}=-(\mathbf{b}'+\mathbf{c}').$$

Az ABC háromszögben

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0,$$

a 90°-os elforgatás után

$$\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{c}'=0$$

is teljesül.

Innen

$$(2) \qquad \mathbf{a}'=-(\mathbf{b}'+\mathbf{c}').$$

(1) és (2) alapján

$$(3) \qquad 2\mathbf{x}=\mathbf{a}'.$$

Mivel $\mathbf{a}'$ vektor az $\mathbf{a}$ 90°-os elforgatottja, $\mathbf{a}'\perp\mathbf{a}$ és $|\mathbf{a}'|=|\mathbf{a}|$. (3) alapján

$$|\mathbf{x}|=\frac{1}{2}|\mathbf{a}'|=\frac{1}{2}|\mathbf{a}|.$$

Ezzel állításunkat bizonyítottuk, sőt ennél több is kiolvasható a megoldásból.

III. megoldás

A *42. ábra* jelöléseihez kapcsolódunk. *Alkalmazzunk C középpontú pozitív irányú 90°-os elforgatást, majd B középpontú pozitív irányú 90°-os elforgatást.*

Az első transzformáció B_2-t A-ba, a második A-t C_2-be viszi. A két transzformáció egymás utáni végrehajtása tehát a B_2-t C_2-be viszi.

Tudjuk, hogy minden egybevágósági transzformáció legfeljebb 3 tengelyes tükrözés egymás utáni végrehajtásával helyettesíthető, speciálisan egy O középpontú α irányított szögű elforgatás helyettesíthető két tengelyes tükrözés egymásutánjával, ahol a t_1 és t_2 tengelyek O-ra illeszkednek, és a $(t_1t_2)\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, az irányítást is figyelembe véve (és az állítás megfordítása is igaz). *(28. jegyzet.)*

A C körüli $+90°$-os forgatás tehát helyettesíthető a BCF egyenlő szárú derékszögű háromszög CF és CB oldalára vonatkozó tükrözéssel (ebben a sorrendben), a B körüli $+90°$-os forgatás helyettesíthető a BC és BF tengelyekre vonatkozó tükrözésekkel.

A két forgatás egymásutánja tehát 4 tükrözéssel helyettesíthető: CF, CB, BC, BF a tengelyek. A középső két tükrözés ugyanarra a tengelyre történik, ezért helyben hagyást eredményez, a négy tükrözés kettővel egyenértékű: CF és BF a tengelyek. Mivel ezek merőlegesek egymásra, ez a két tükrözés F középpontú, 180°-os elforgatást eredményez.

Végül is azt kaptuk, hogy a C és B körüli $+90°$-os elforgatás egymásutánja — mely B_2-t C_2-be viszi — helyettesíthető F körüli 180°-os elforgatással, így F a B_2C_2 szakasz felezőpontja.

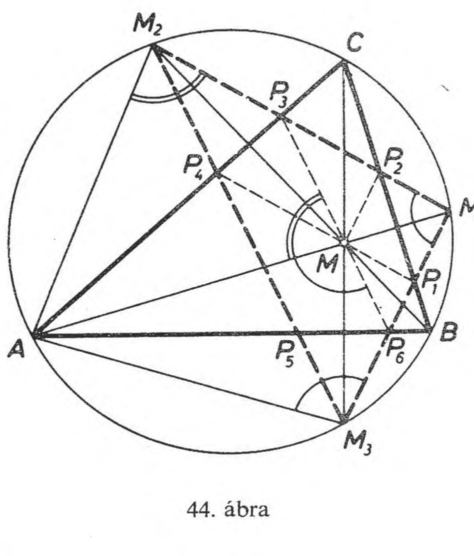
133. Legyenek valamely hegyesszögű háromszög M magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei rendre M_1, M_2, M_3. Bizonyítsuk be, hogy az $M_1M_2M_3$ háromszög és az adott háromszög oldalainak metszéspontjaiból alkotott konvex hatszög szemközti csúcsait összekötő átlók az M ponton mennek át.

I. megoldás

Ismeretes, hogy az M_1, M_2, M_3 *pontok rajta vannak a háromszög köré írt körön (44. ábra).*

Mivel $MCA\sphericalangle = MBA\sphericalangle$ (merőleges szárú hegyesszögek), *így* $\widehat{M_2A} = \widehat{AM_3}$. *Tehát az* M_1A *egyenes felezi az* $M_3M_1M_2$ *szöget.* Ugyanez igaz az M_2B és M_3C egyenesekre, ill. az $M_1M_2M_3$, $M_2M_3M_1$ szögekre.

Kössük össze az M pontot a keletkezett hatszög P_1, P_2, P_3 és P_4 csúcsaival. Az $MP_1M_1P_2$ négyszög rombusz, mert a tükrözés folytán — a fen-



44. ábra

tiek figyelembevételével — mindkét átló szögfelező, és merőleges egymásra. Ezért $P_1M \parallel M_1P_2$. Hasonlóan az $MP_4M_2P_3$ rombuszban $P_4M \parallel M_2P_3$.

Másrészt az M_1P_2 és M_2P_3 szakaszok az M_1M_2 szakasz részei, tehát $P_1M \parallel M_1M_2 \parallel MP_4$, és így P_1, M és P_4 egy egyenesen vannak. Hasonlóan bizonyítható, hogy P_2P_5 és P_3P_6 is átmegy az M ponton.

II. megoldás

Megmutatjuk, hogy a $P_3MP_6\sphericalangle = 180°$. A bizonyítást alkalmasan megváltoztatva, a $P_1MP_4\sphericalangle = 180°$, $P_2MP_3\sphericalangle = 180°$ állításokat nyerhetjük.

Kössük össze M-et a P_3 és P_6 csúcsokkal, továbbá A-t M_2 és M_3-mal *(44. ábra)*. Az M_3-nál jelölt egyíves szög tükrözés folytán egyenlő az M-nél levő egyíves szöggel. Hasonlóan egyenlők az ábrán jelölt kétíves szögek is. Az $M_2AM_3M_1$ húrnégyszög, és ebben $M_2\sphericalangle + M_3\sphericalangle = 180°$, tehát a $P_3MP_6\sphericalangle = 180°$.

134. Az $ABCD$ négyszög AB, BC, CD, DA oldalának a kezdőponthoz közelebbi harmadolópontja legyen rendre P, Q, R, S. Bizonyítsuk be, hogy az AC és BD átlók felezőpontját összekötő szakasz háromszor akkora, mint a PR és QS átlók felezőpontját összekötő szakasz.

Megoldás

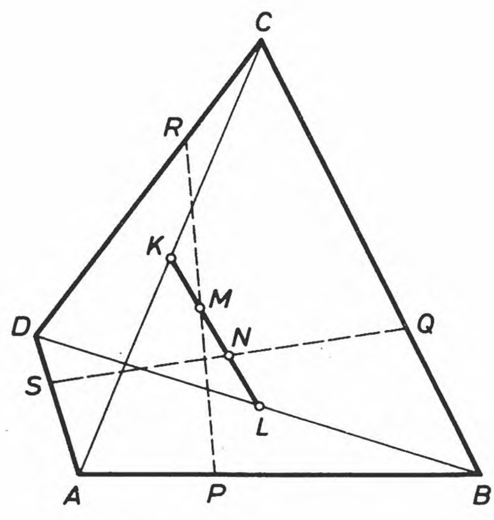
„Tipikus" vektoros feladattal állunk szemben, amelyet természetesen másféleképpen is megoldhatnánk (45. ábra), (42., 46. jegyzet).

Ha egy tetszőleges O pontból az A, B, C, D pontokba mutató vektorok rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, akkor a P, Q, R, S pontokba az O pontból a következő vektorok vezetnek:

$$\mathbf{p} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}, \quad \mathbf{q} = \frac{2}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c},$$

$$\mathbf{r} = \frac{2}{3}\mathbf{c} + \frac{1}{3}\mathbf{d}, \quad \mathbf{s} = \frac{2}{3}\mathbf{d} + \frac{1}{3}\mathbf{a}.$$

Jelölje AC, BD, PR, QS felezőpontját rendre K, L, M, N, az O-ból ezekbe mutató vektorok rendre



45. ábra

(1) $$\mathbf{k}=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{c},\quad \mathbf{l}=\frac{1}{2}\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{d};$$

(2) $$\mathbf{m}=\frac{1}{2}\mathbf{p}+\frac{1}{2}\mathbf{r}=\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{c})+\frac{1}{6}(\mathbf{b}+\mathbf{d}),$$

$$\mathbf{n}=\frac{1}{2}\mathbf{q}+\frac{1}{2}\mathbf{s}=\frac{1}{3}(\mathbf{b}+\mathbf{d})+\frac{1}{6}(\mathbf{a}+\mathbf{c}),$$

Ezek alapján

(3) $$\overrightarrow{LK}=\mathbf{k}-\mathbf{l}=\frac{1}{2}[(\mathbf{a}+\mathbf{c})-(\mathbf{b}+\mathbf{d})],$$

(4) $$\overrightarrow{NM}=\mathbf{m}-\mathbf{n}=\frac{1}{6}[(\mathbf{a}+\mathbf{c})-(\mathbf{b}+\mathbf{d})].$$

(3) és(4) alapján

$$3\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{LK}.$$

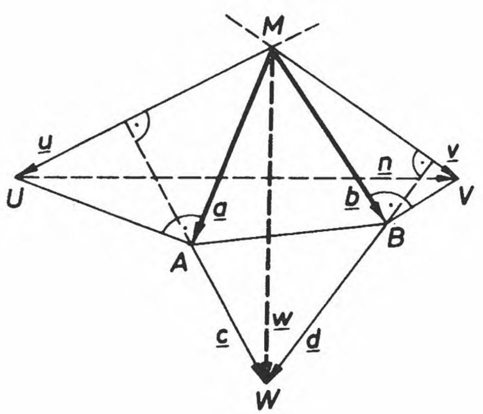
Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk. Sőt (1) és (2)-ből leolvasható, hogy

$$\mathbf{m}=\frac{2}{3}\mathbf{k}+\frac{1}{3}\mathbf{l},\quad \mathbf{n}=\frac{1}{3}\mathbf{k}+\frac{2}{3}\mathbf{l},$$

tehát M és N harmadolja a KL szakaszt.

A megoldás során sehol nem használtuk ki, hogy az $ABCD$ négyszög milyen, tehát lehet térbeli „torz" négyszög is.

135. Az MAB egyenlő szárú háromszög M csúcsán két egyenes megy át, u és v. Az A pontból u-ra, B-ből v-re bocsátott merőlegesek metszéspontja W. Az A-ból MA-ra bocsátott merőleges messe u-t U-ban, a B-ből MB-re állított merőleges messe v-t V-ben.
Bizonyítandó, hogy UV merőleges MW-re.



46. ábra

I. megoldás

A következő vektorokat vezetjük be: $\overrightarrow{MA}=\mathbf{a}$; $\overrightarrow{MB}=\mathbf{b}$; $\overrightarrow{AW}=\mathbf{c}$; $\overrightarrow{BW}=\mathbf{d}$; $\overrightarrow{MW}=\mathbf{w}$; $\overrightarrow{UV}=\mathbf{n}$; $\overrightarrow{MU}=\mathbf{u}$; $\overrightarrow{MV}=\mathbf{v}$ (46. ábra).

Azt kell belátnunk, hogy $\mathbf{w}\perp\mathbf{n}$. *Elég megmutatni, hogy skaláris szorzatuk zérus, vagyis* $\mathbf{wn}=0$ *(43. jegyzet).*

Tudjuk, hogy

$$\mathbf{w}=\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{d}; \qquad \mathbf{n}=\mathbf{v}-\mathbf{u}.$$

$$\mathbf{wn}=(\mathbf{a}+\mathbf{c})(\mathbf{v}-\mathbf{u})=(\mathbf{a}+\mathbf{c})\mathbf{v}-\mathbf{au}-\mathbf{cu}.$$

Mivel $\mathbf{c}\perp\mathbf{u}$, $\mathbf{cu}=0$, ezért

$$\mathbf{wn}=(\mathbf{a}+\mathbf{c})\mathbf{v}-\mathbf{au}=(\mathbf{b}+\mathbf{d})\mathbf{v}-\mathbf{au}=\mathbf{bv}+\mathbf{dv}-\mathbf{au}.$$

Mivel $\mathbf{v}\perp\mathbf{d}$, $\mathbf{dv}=0$, ezért

$$\mathbf{wn}=\mathbf{bv}-\mathbf{au}=\mathbf{b}[\mathbf{b}+(\mathbf{v}-\mathbf{b})]-\mathbf{a}[\mathbf{a}+(\mathbf{u}-\mathbf{a})]=\mathbf{b}^2-\mathbf{a}^2=0.$$

Ugyanis

$\mathbf{b}(\mathbf{v}-\mathbf{b})=0$, mert $(\mathbf{v}-\mathbf{b})\perp\mathbf{b}$;
$\mathbf{a}(\mathbf{u}-\mathbf{a})=0$, mert $(\mathbf{u}-\mathbf{a})\perp\mathbf{a}$, másrészt $MA=MB$.

II. megoldás

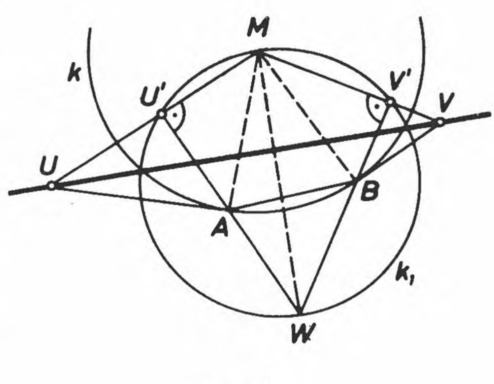
Az A pont u-ra merőleges vetületét U'-vel, a B pont v-re merőleges vetületét V'-vel jelöljük *(47. ábra). Vegyük észre, hogy az MUA és MVB derékszögű háromszögben*

$$MU\cdot MU'=MA^2=MB^2=MV\cdot MV'.$$

Tehát az M középpontú, $MA=MB$ sugarú körre történő inverziónál az U pontnak az U' pont, V-nek V' felel meg (52. jegyzet). Azt állítjuk, hogy az UV egyenes inverze az $MU'V'$ háromszög köré írt k_1 kör lesz (az M középpont kivételével).

Előbbi észrevételünk és az inverzió tulajdonságai miatt ehhez csak azt kell belátnunk, hogy M nem illeszkedik az UV egyenesre. Ez viszont következik abból, hogy egyrészt U és V az M-től különböznek, másrészt, ha M illeszkedne UV-re, akkor az u és v egyenes egybeesne, de akkor a W metszéspont nem jöhetne létre.

Az $MU'W$ és $MV'W$ háromszögek derékszögűek, így MW a k_1 kör átmérője. De akkor az MW egyenes k-nak és k_1-nek is szimmetriatengelye, tehát szimmetriatengelye k_1 k-ra vonatkozó inverzének, az UV egyenesnek. Ez csak úgy lehet, ha UV merőleges MW-re.



47. ábra

Megjegyzés

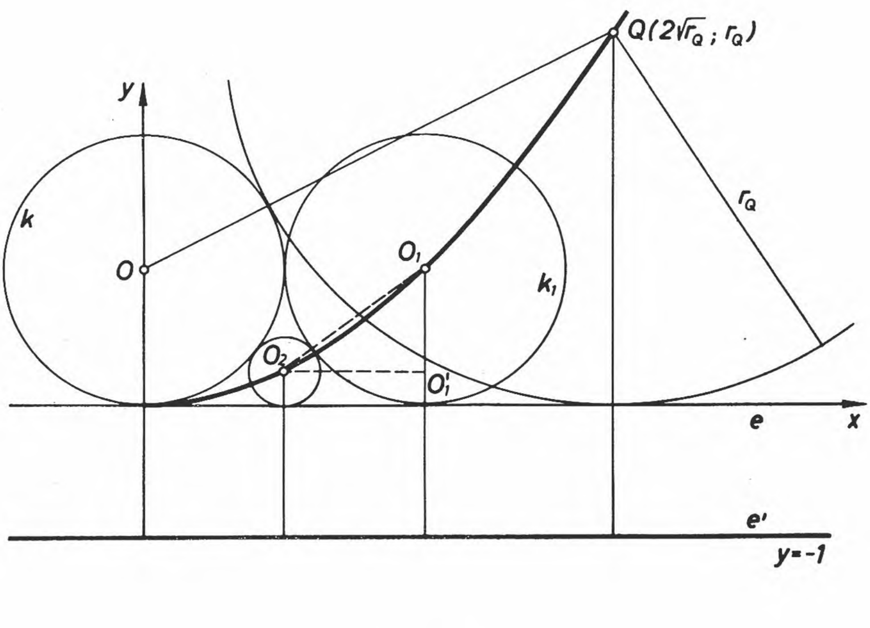
A második megoldás meglepő egyszerűen mutat rá a feladat lényegére és — talán — a feladatkitűző ötletére.

136. Adott a síkban két egységnyi sugarú, egymást érintő kör: k és k_1. Egyik közös külső érintőjük az e egyenes. Ezután rendre megrajzoljuk a $k_2, k_3, \ldots, k_n$ köröket úgy, hogy mindegyik érintse k-t, e-t és az 1-gyel kisebb sorszámú kört. Mekkora a k_n kör sugara?

I. megoldás

Jelölje $O, O_1, O_2, \ldots, O_n$ a $k, k_1, k_2, \ldots, k_n$ körök középpontjait, és $1=r=r_1$, $r_2, \ldots, r_n$ ezek sugarait. A feltételeknek eleget tevő $k_2, k_3, \ldots, k_n$ körök kívülről érintik a k kört és a náluk 1-gyel kisebb, ill. nagyobb sorszámú kört, és az e egyenes által határolt félsíkok közül az O-t is tartalmazóra illeszkednek *(48. ábra)*.

a) *Tekintsünk egy tetszőleges, k-t kívülről érintő, az e egyenes által határolt félsíkok közül az O-t tartalmazóra illeszkedő, e-t érintő,* r_Q *sugarú, Q középpontú kört.* Q távolsága O-tól $1+r_Q$, e-től r_Q. Ha e-t rá merőlegesen, O-tól



48. ábra

távolítva egységnyivel eltoljuk, Q ugyanakkora távolságra lesz az így kapott e' egyenestől, mint O-tól.

Tehát Q illeszkedik az O fókuszhoz és e' vezéregyeneshez tartozó parabolához. Válasszuk x-tengelynek e-t, y-tengelynek a parabola tengelyét úgy, hogy O koordinátái $(0; 1)$ legyenek. Ebben a koordináta-rendszerben a parabola egyenlete $4y=x^2$. Mivel Q-nak választhattuk volna az $O_1, O_2, \dots, O_n$ pontokat is, ezek is illeszkednek a $4y=x^2$ parabolára. Az $O_1\,(2; 1)$ pont pozitív abszcisszájú, így az O_i pont is pozitív abszcisszájú. *Az $O_1, O_2, \dots, O_n$ pontok tehát az $x=2\sqrt{y}$ félparabolára illeszkednek.*

b) *Megadjuk r_i és r_{i+1} kapcsolatát.* Az O_i pont koordinátái $(2\sqrt{r_i}; r_i)$. Az O_{i+1} koordinátái $(2\sqrt{r_{i+1}}; r_{i+1})$. *A k_i és k_{i+1} körök kívülről érintik egymást, ezért O_i és O_{i+1} távolsága r_i+r_{i+1}. Az $O_iO_{i+1}O_i'$ derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel* (a *48. ábrán* $i=1$)

$$(r_i+r_{i+1})^2-(r_i-r_{i+1})^2=\left(2\sqrt{r_i}-2\sqrt{r_{i+1}}\right)^2,$$

azaz

$$r_ir_{i+1}=\left(\sqrt{r_i}-\sqrt{r_{i+1}}\right)^2.$$

Figyelembe véve, hogy $0<r_{i+1}<r_i$, ez így alakul:

$$\sqrt{r_ir_{i+1}}=\sqrt{r_i}-\sqrt{r_{i+1}}.$$

Innen

(1)
$$\frac{1}{\sqrt{r_{i+1}}}=1+\frac{1}{\sqrt{r_i}}.$$

Ennek alapján — $r_1=1$ figyelembevételével — $r_2=\frac{1}{4}$; $r_3=\frac{1}{9}$; $r_4=\frac{1}{16}$ **adódik.**

c) *Az a sejtésünk, hogy $r_i=\frac{1}{i^2}$. Sejtésünk* (1) *alapján teljes indukcióval* ***könnyen*** *igazolható.* Tegyük fel, hogy $r_i=\frac{1}{i^2}$. Innen $\frac{1}{\sqrt{r_i}}=i$.

$$\frac{1}{\sqrt{r_{i+1}}}=1+\frac{1}{\sqrt{r_i}}=1+i, \text{ tehát } r_{i+1}=\frac{1}{(i+1)^2}.$$

A k_n kör sugara: $r_n=\frac{1}{n^2}$.

II. megoldás (Inverzióval, *52. jegyzet*)

A *49. ábra* jelöléseit használjuk, a k kör sugara legyen egységnyi. ***Vegyük fel*** *a 2 egység sugarú k_0 kört, amelynek középpontja k és e E érintési pontja.*

136.

Tekintsük a k_0 alapkörre vonatkozó inverziót. Ez tehát a sík bármely E-től különböző P pontjához azt az EP félegyenesen levő P' pontot rendeli, amelyre $EP \cdot EP' = 2^2 = 4$.

Az inverzió ismert tulajdonságai alapján *(52. jegyzet)* az e egyenes önmagába megy át, a k kör k' megfelelője a k és k_0 körök F-beli közös érintője, a k_0-t merőlegesen metsző k_1 körnek önmaga az inverze. A k_n kör k_n' megfelelője érinti k'-t, $e' \equiv e$-t és k_{n-1}'-t ($n = 2, 3, 4, \ldots$). A *49. ábrán* az $n = 2$ esetet szemléltetjük.

Mivel $k' \parallel e'$, ezért bármelyik k_n' kör egységnyi sugarú, és így

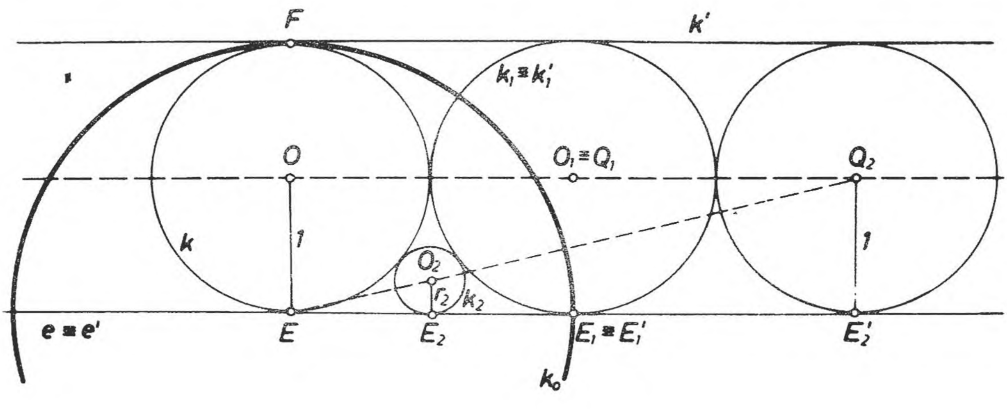
$$EE_n' = 2n.$$

De tudjuk, hogy $EE_n' \cdot EE_n = 4$, ezért

$$EE_n = \frac{2}{n}.$$

Az EE_nO_n és $EE_n'Q_n$ derékszögű háromszögek hasonlóságából:

$$r_n : 1 = \frac{2}{n} : 2n, \quad r_n = \frac{1}{n^2}.$$



49. ábra

Megjegyzés

A II. megoldás lehetőséget nyújt a körök egyszerű szerkesztésére is. Ebből a szempontból feladatunk az úgynevezett *Apolloniosz*-féle feladatok közé sorolható ([6], [21] I.).

137. Tekintsünk egy konvex n-szöget, melynek minden szöge egyenlő, és az egymás után elhelyezkedő $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oldalaira fennáll, hogy

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n. \tag{1}$$

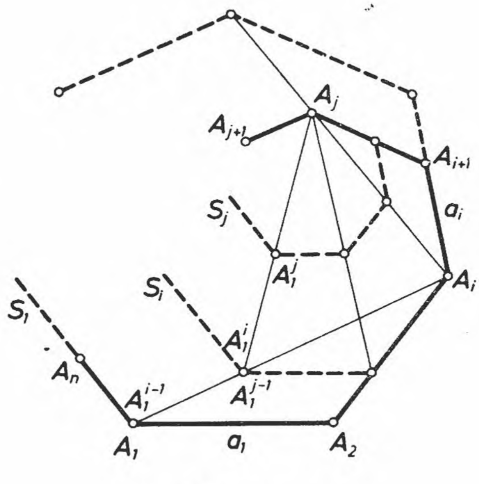
Bizonyítsuk be, hogy ekkor szükségképpen

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n. \tag{2}$$

I. Megoldás

Ha a kérdéses n-szög szögei egyenlők, akkor egyenlők a szabályos n-szög szögeivel. Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy a megadott feltételek mellett sokszögünk feltétlenül szabályos.

Legyen $A \equiv A_1A_2 \ldots A_n$ a kérdéses n-szög. Az $A_iA_{i+1} = a_i$ oldal fölé az A sokszöget tartalmazó félsíkban megrajzoljuk az S_i szabályos sokszöget ($i = 1, 2, \ldots, n$; $A_{n+1} \equiv A_1$). (Az *50. ábrán* $n = 7$, $i = 3$, $j = 5$; $a_1 = a_2 > a_3 = a_4 > a_5 \ldots$, ezért $S_1 \equiv S_2 \not\equiv \not\equiv S_3 \equiv S_4 \not\equiv S_5 \ldots$.)



50. ábra

Az A_i középpontú, $\frac{a_i}{a_{i-1}}$ arányú középpontos hasonlóság S_{i-1}-hez S_i-t rendeli ($1 < i \leqq n$), így S_1-ből kiindulva, az előbbi középpontos hasonlóságok egymás utáni alkalmazásával rendre S_2-t, S_3-at, $\ldots S_n$-et kapjuk. Az A_1 csúcs képeit rendre $A_1^2, \ldots, A_1^{i-1}, A_1^i, \ldots, A_1^{j-1}, A_1^j, \ldots, A_1^n$ jelöli. A_1 az S_1 és S_n sokszög közös csúcsa, ezért $A_1^n \equiv A_1$, tehát a fenti középpontos hasonlóságok kompozíciója A_1-et önmagába viszi (29. jegyzet). Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen akkor, ha a középpontos hasonlóságok között van $\frac{a_i}{a_{i-1}} < 1$ arányú is.

Ennél a hasonlóságnál az A_1^{i-1} pont az $A_1^{i-1}A_i$ szakasz *belső pontjába* A_1^i-be kerül. Ha $i \neq 2$, akkor A_1^i feltétlenül az A_1A_2 egyenes határolta A-t tartalmazó félsík belsejébe kerül, hiszen az A_i hasonlósági középpont is itt van. Ha csak

az A_2 középpontú hasonlóság különbözik az azonosságtól, akkor A_1 az A_1A_2 szakasz belső pontjába kerül, tehát A_1-től különböző pontba.

Ellentmondáshoz jutottunk, tehát az összes középpontos hasonlóság azonosság: $a_i = a_{i-1}$ minden i-re $(1 < i \leqq n)$. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés

Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan igazolhatjuk a feladat következő általánosítását. *Legyen* $S \equiv X_1X_2 \ldots X_n$ *egyenlő szakaszokból álló zárt poligon, mely az* $X_1X_2 = a_1$ *szakasz határolta egyik félsíkba esik. Bizonyítsuk be, hogy ha* $A_1A_2 \ldots A_n$ *az előzővel párhuzamos oldalú poligon* $(A_1A_2 = a_1,\ A_2A_3 = a_2, \ldots, A_nA_1 = a_n)$, *melyre* $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n$, *akkor és csak akkor zárt, ha* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Más megoldási lehetőség

Vetítsük az $A_nA_1A_2$ szög felezőjére az $A_1A_2 \ldots A_n$ sokszög csúcsait. Válasszuk szét az $n = 2j$, ill. $n = 2j+1$ esetet. Majd mutassuk meg, hogy az $A_1A_2 \ldots A_j$ poligon vetülete nem kisebb az $A_1A_n \ldots A_{n-j}$ poligon vetületénél, s az egyenlőség csak $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ mellett áll fenn.

II. megoldás

Feladatunkat a komplex számsíkra átfogalmazva, igen szép általánosítási lehetőség kínálkozik (17., 50. jegyzet):

a) Ha a komplex változós $(n-1)$-edfokú

$$f(z) = a_1 + a_2z + a_3z^2 + \ldots + a_nz^{n-1}$$

polinom együtthatói olyan valós számok, melyekre

(1) $$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n > 0,$$

akkor $f(z)$ tetszőleges z_0 gyökére $z_0 \neq 1$ és $|z_0| \geqq 1$. (Ez *Eneström—Kakeya* tétele.)

b) Az $f(z)$ valamely z_0 gyökére $|z_0| = 1$ csak akkor teljesülhet, ha vagy $z_0^{n-i} = 1$ fennáll valamely $n - i < n$ természetes szám kitevőre; vagy pedig

(2) $$a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$$

c) A (2) esetben $z_0 \neq 1$ és $z_0^n = 1$.

Mivel $z_0=1$ nem gyöke $f(z)$-nek, elegendő a $(z-1)f(z)$ polinom 1-től különböző gyökeit vizsgálni. Elvégezve a beszorzást:

(3) $(z-1)f(z)=-a_1+[(a_1-a_2)z+(a_2-a_3)z^2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)z^{n-1}+a_nz^n]$.

Az $f(z)$ tetszőleges z_0 gyökére tehát

(4) $$a_1=|(a_1-a_2)z_0+(a_2-a_3)z_0^2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)z_0^{n-1}+a_nz_0^n|\leqq$$ $$\leqq(a_1-a_2)\,|z_0|+(a_2-a_3)\,|z_0|^2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)\,|z_0|^{n-1}+a_n\,|z_0|^n.$$

Felhasználtuk, hogy egy összeg abszolút értéke nem nagyobb a tagok abszolút értékeinek összegénél. Később még azt is felhasználjuk, hogy az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a tagok valamelyikéből a többi, nem negatív valós számmal történő szorzással származtatható.

a) Tegyük fel, hogy $|z_0|<1$; akkor (4) jobb oldalát növelve ($a_n>0$), az

(5) $$a_1<(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\ldots+(a_{n-1}-a_n)+a_n=a_1$$

ellentmondáshoz jutunk.

b) Tegyük fel, hogy $|z_0|=1$, és hogy valamelyik i indexre ($i=1, 2, \ldots, n-1$) $a_i>a_{i+1}$. Ekkor a (4)-ben szereplő összegnek legalább két nem zérus tagja van: $a_nz_0^n$ és $(a_i-a_{i+1})z_0^i$, melyeknek hányadosa

$$p=z_0^{n-i}a_n(a_i-a_{i+1})^{-1}.$$

Ha ez a p nem pozitív valós szám, akkor (4)-ben határozott egyenlőtlenség áll fenn. Ez pedig újra csak az (5) ellentmondáshoz vezet. Ha p pozitív valós, akkor (1) és $|z_0|=1$ miatt $p=a_n(a_i-a_{i+1})^{-1}$ és $z_0^{n-i}=1$ következik.

c) Ha (2) teljesül, akkor $f(z)$ gyökei éppen a $(z-1)f(z)=a_n(z^n-1)$ polinom 1-től különböző gyökei.

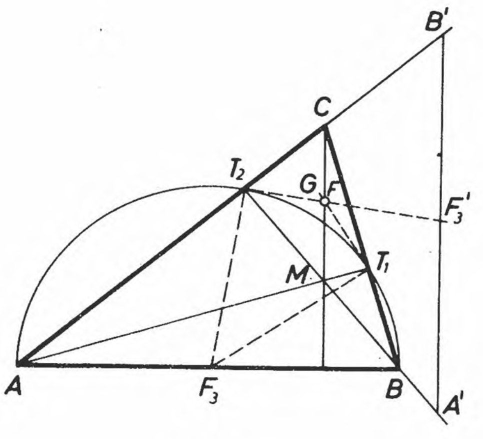
Eredeti feladatunkat is igazoltuk: A $z_0=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ n-edik egységgyökre $z_0^j\neq 1$, ha j az n-nél kisebb természetes szám, ezért az (1) feltételek mellett $a_1+a_2z_0+\ldots+a_nz_0^{n-1}=0$ pontosan akkor igaz, ha (2) teljesül.

138. Egy hegyesszögű háromszög egyik oldala mint átmérő fölé kört rajzolunk, és ehhez a másik két oldallal való metszéspontban érintőt húzunk. Bizonyítandó, hogy a két érintő metszéspontja az első oldalhoz tartozó magasságon van.

138.

I. megoldás

Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldala fölé rajzolt kör és a BC, illetve AC oldalak metszéspontja legyen T_1, illetve T_2. A kör középpontját F_3-mal, a háromszög magasságpontját M-mel jelöljük. Messe a CM magasságvonalat a kör T_1-beli érintője F-ben, T_2-beli érintője G-ben.



51. ábra

Azt kell belátnunk, hogy F és G egybeesnek (51. ábra). Thalész tétele miatt T_2 a B-ből húzott magasság talppontja, ezért a T_2 körüli, pozitív irányú, 90°-os elforgatás az ABT_2 háromszöget az MCT_2 háromszöggel párhuzamos oldalú $T_2A'B'$ háromszögbe viszi, a T_2F_3 sugarat pedig a rá merőleges TG érintőbe. Mivel F_3 felezi AB-t, F_3' is felezi $A'B'$-t, így G is *felezi a CM szakaszt.*

Ugyanígy látható be, hogy F is felezi a CM szakaszt (ABT_1 háromszög T_1 körüli, negatív irányú, 90°-os elforgatása révén). Mivel F és G a CM szakaszt felezik, $F \equiv G$.

II. megoldás

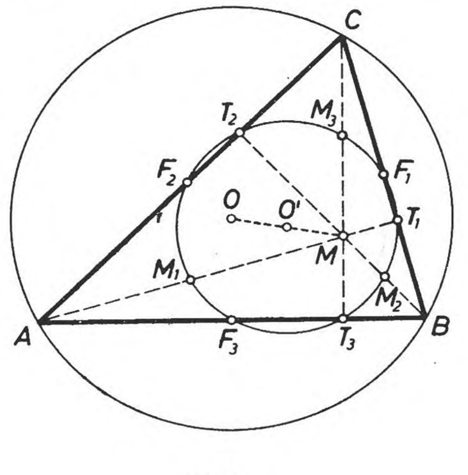
Feladatunk a háromszög Feuerbach-körének témaköréből származik: Ha az ABC háromszög körülírt körére az M magasságpontból $\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot alkalmazunk (vagy az S súlypontból $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos hasonlóságot alkalmazunk), a háromszög *Feuerbach*-köréhez jutunk (*Euler*-körnek is nevezik), melyre illeszkednek ABC F_1, F_2, F_3 oldalfelező pontjai, a T_1, T_2, T_3 magasságtalppontok és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok M_1, M_2, M_3 felezőpontjai *(52. ábra).*

Az 51. és 52. ábrát összevetve, azt fogjuk igazolni, hogy $M_3T_1 \perp F_3T_1$ *és* $M_3T_2 \perp F_3T_2$. Ez viszont azonnal következik abból, hogy T_3 magasságtalppont, ezért M_3F_3 a *Feuerbach*-kör átmérője (*Thalész* tétele és megfordítása alapján).

Megjegyzés

Feladatunk a kúpszeletekre vonatkozó *Pascal-féle tétel* speciális esete. *Pascal* idézett tétele a következő: *Ha $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ egy kúpszeletbe írt hatszög, akkor az X_1X_2, X_4X_5; X_2X_3, X_5X_6; X_3X_4, X_6X_1*

szemközti oldalegyenesek metszéspontjai egy egyenesre, a Pascal-féle egyenesre illeszkednek. (Megengedjük, hogy a hatszög csúcsai közül egy vagy több egybeesik. Ha pl. $X_1=X_2$, akkor az X_1X_2 oldalegyenesen a kúpszelet X_1-beli érintőjét értjük.) Ha a *Pascal*-tételt a körbe írt $T_2T_2BT_1T_1A$ hatszögre alkalmazzuk, éppen a feladat állításához jutunk *(37. jegyzet).*



52. ábra

139. Jelentse r egy tetszőleges egyenlő szárú háromszög köré írható kör sugarát, ϱ pedig a bele írható kör sugarát. Bizonyítsuk be, hogy a két kör középpontja

(1) $$d=\sqrt{r(r-2\varrho)}$$

távolságra esik egymástól.

Megoldás

Megmutatjuk, hogy az (1) *egyenlőséggel ekvivalens*

(1') $$2r\varrho=(r+d)(r-d)$$

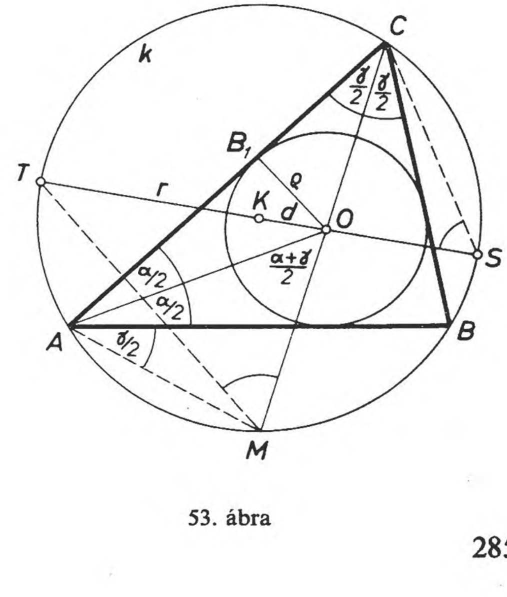
minden háromszögre fennáll, tehát nem használjuk ki, hogy a háromszög egyenlő szárú. Az *53. ábrán* a C-ből induló szögfelezőt a körülírt körig hosszabbítottuk meg, valamint megrajzoltuk a körülírt kör O-n és K-n átmenő húrját (ha $O\equiv K$, akkor egy tetszőleges átmérőt).

Az így kapott TMO és CSO háromszögek hasonlók, hiszen O-nál levő szögeik csúcsszögek, a TC ívhez tartozó $M\sphericalangle$ és $S\sphericalangle$ is egyenlő. Tehát OT: $OC=OM$: OS, vagyis

$$OT\cdot OS=OC\cdot OM,$$

(2) $$(r+d)(r-d)=OC\cdot OM.$$

A COB_1 derékszögű háromszögből $OC=\dfrac{\varrho}{\sin\dfrac{\gamma}{2}}$. *Megmutatjuk, hogy*



53. ábra

OM viszont AM-mel egyenlő, és így az AMC háromszögből

$$OM = AM = 2r \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Ehhez elegendő igazolni, hogy $OAM\sphericalangle = AOM\sphericalangle$. Mivel az MB ívhez $BCM\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$ kerületi szög tartozik, ezért $BAM\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, és így $OAM\sphericalangle = \frac{\alpha+\gamma}{2}$. Az $AOM\sphericalangle$ viszont az ACO háromszög külső szöge, az $AOM\sphericalangle$ is $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ nagyságú. Tehát

(3) $$OC \cdot OM = \frac{\varrho}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot 2r \sin\frac{\gamma}{2} = 2r\varrho.$$

(2)-t és (3)-at összevetve (1′) adódik, a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés

1. A bizonyított tételt az irodalomban *Euler tételének* nevezik. Belőle közvetlenül következik az $r \geqq 2\varrho$ egyenlőtlenség (lásd **171.** feladat), $d=0$ csak a szabályos háromszög esetében áll fenn, $r=2\varrho$ is csak ekkor teljesül *(55. jegyzet)*.

2. Az $OAM\sphericalangle = AOM\sphericalangle$ összefüggés igen szerencsésen jellemzi a háromszög beírt és körülírt körének kapcsolatát. Ezt felhasználjuk még a **187.** és **213.** feladatban is.

3. Ha a fenti gondolatmenetet megfordításával kiegészítjük, kimondhatjuk a tételt: *Bárhogyan választjuk A-t az r sugarú k körön, e ponthoz a k körön pontosan akkor találunk olyan B-t és C-t, hogy ABC a ϱ sugarú k′ kör köré írt háromszög legyen, ha* $r \geqq 2\varrho$, *és a körközéppontok d távolságára teljesül az* (1) *összefüggés.*

4. A fenti tételt *Poncelet* még tovább általánosította a körök helyett kúpszeletekre, háromszögek helyett n-szögekre *(40. jegyzet)*.

140. Bizonyítsuk be, hogy ha egy húrnégyszög átlóinak M metszéspontján átmenő egyenesnek a négyszög belsejébe eső szakaszát M felezi, akkor M felezi a körülírt körnek az említett egyenesre eső húrját is.

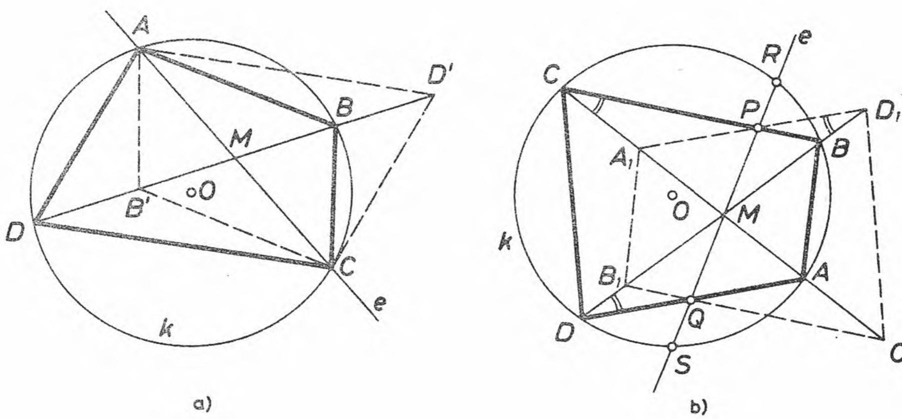
Megoldás

Legyen az $ABCD$ húrnégyszög AC és BD átlóinak metszéspontja M. *Ha egy e egyenes négyszögbe eső PQ szakaszának az M felezési pontja, akkor PQ mint*

önmagának M-re vonatkozó tükörképe azonos az e egyenesnek a négyszög M-re vonatkozó tükörképébe eső szakaszával is, hiszen e is azonos M-re vonatkozó tükörképével. Így nagyon szerencsésen tudjuk használni a feltételeket.

a) *Ha M mindkét átlót felezi,* akkor a négyszög — és így a köré írt k kör is — M-re vonatkozó tükrözéssel önmagába megy át, ezért M felezi a rajta átmenő egyeneseknek a négyszögbe és a körbe eső szakaszát is.

b) *Ha M csak egy átlót* — pl. az AC átlót — *felezi,* és a jelölést úgy választottuk, hogy $BM < MD$ legyen *(54/a ábra)*, akkor az M-re vonatkozó tükrözés



54. ábra

során A és C helyet cserélnek, a B csúcs és a belőle kiinduló AB és BC oldalak tükörképe a négyszög belsejébe, a D csúcs és a belőle kiinduló CD és DA oldalak tükörképe a négyszögön kívülre kerülnek, az $ABCD$ négyszöget M-re vonatkozó tükörképe csak az AC átló végpontjaiban metszi. *Ebben az esetben e egyenesnek csak az AC átló egyenese választható.* Az AC átló M felezési pontja egyben a kör AC húrjának is felezési pontja, állításunk tehát igaz.

c) *Tegyük fel, hogy M egyik átlót sem felezi (54/b ábra).* A betűzést úgy választjuk, hogy az AC átlón A, BD átlón B legyen az M-hez közelebbi csúcs. Ekkor az A és B csúcsok M-re vonatkozó A_1, B_1 tükörképei az eredeti négyszög belsejébe, a C és D csúcsok C_1 és D_1 tükörképei az eredeti négyszögön kívülre kerülnek. Ezek szerint a tükrözött és eredeti négyszög kerületén csak az A_1D_1 és BC, illetve B_1C_1 és AD szakaszok metszhetik egymást a P, illetve Q pontokban. M csak a PQ egyenesnek a négyszögbe eső szakaszát felezheti.

A kapott BD_1P és A_1CP háromszögek hasonlók, hiszen P-nél levő szögeik egyenlők, és $A_1CP\sphericalangle = ACB\sphericalangle = ADB\sphericalangle = A_1D_1B_1\sphericalangle = PD_1B\sphericalangle$. Emiatt

$$\frac{A_1P}{PC}=\frac{BP}{PD_1}, \quad PA_1 \cdot PD_1=PB \cdot PC.$$

Tudjuk, hogy a P-n átmenő húrok szeleteinek szorzata a húrok választásától függetlenül állandó. Ezt a szorzatot a *P pont körre vonatkozó hatványának* nevezzük.

A tükrözés miatt $A_1P=AQ$ és $PD_1=QD$, tehát

$$AQ \cdot QD=BP \cdot PC, \tag{1}$$

a P és Q pontoknak a k körre vonatkozó hatványa megegyezik.

Tegyük fel, hogy a PQ egyenes a k kört az R és S pontokban metszi, és $PS>QS$. Ekkor

$$AQ \cdot QD=RQ \cdot QS; \quad BP \cdot PC=RP \cdot PS,$$

amiből (1) miatt $RP \cdot PS=RQ \cdot QS$ következik.

Mindkét oldalból $RP \cdot QS$-t levonva, kapjuk, hogy

$$RP(PS-QS)=(RQ-RP)QS, \quad \text{ahol} \quad PS-QS=PQ=RQ-RP,$$

tehát valóban $RP=QS$, azaz $RM=MS$, amit bizonyítanunk kellett.

Megjegyzés

1. A feladat állítása a *Desargues-féle involúciós tétel* speciális esete. Az említett tétel kúpszeletbe írt négyszögekről szól, bizonyítása a projektív geometria keretében történik *(38. jegyzet)*.

2. A feladat állításánál több is igaz: a CD és AB oldalak vagy párhuzamosak az e egyenessel, vagy az M-re szimmetrikus pontokban metszik azt.

141. Az A és A' pontok a kör egy érintőjén az E érintési pontra tükrös helyzetűek. Az AE szakasz egy B pontjának az E-re vonatkozó tükörképét, B'-t egyetlen egyenes vonalzó felhasználásával a következő módon szerkesztettük meg: B-ből a körhöz egy tetszés szerinti szelőt húztunk, ez a kört P és Q pontokban metszette (közülük P pont volt B-hez közelebb), az AP szelő még egy R pontban metszette a kört. A Q-t A'-vel összekötő egyenesnek a körrel való második metszéspontja az R-től különböző S volt. Végül az RS egyenes metszette ki az érintőből a B' pontot. Igazoljuk a szerkesztés helyességét!

Megoldás

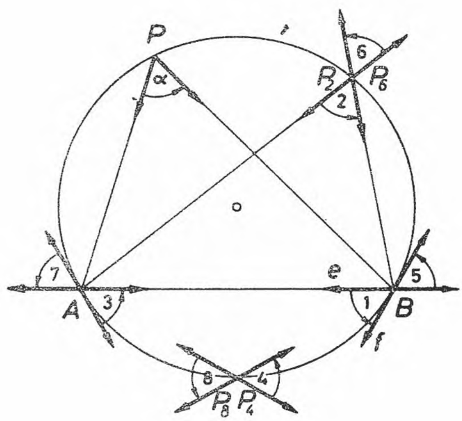
Legyen O a kör középpontja (l. az 56. ábrát). Hogy kedvezően használjuk fel a feladat feltételeit, tükrözzük az AR szakaszt az a egyenes és a k kör közös $OE=t$ szimmetriatengelyére. Ekkor A az A' pontba, R a körön levő R' pontba

megy. Ezután kössük össze R'-t B-vel és A'-vel. *Megmutatjuk, hogy $BB'RR'$ t-re szimmetrikus* (azaz $A'R'B\sphericalangle = B'RA\sphericalangle$).

Hogy ne csak az ábra szerinti elhelyezkedéshez tapadjunk, irányított egyenesekkel és irányított szögekkel dolgozunk. (Az olvasóra bízzuk, hogy más elhelyezkedés esetében is ellenőrizze a bizonyítást.) *Ehhez előzetesen a látókör definícióját irányított szögekkel fogalmazzuk meg (55. ábra).*

Legyenek e és f irányított egyenesek, A és B adott pontok, melyek közül A az e egyenesre, B az f egyenesre illeszkedik. Az $(e,f)\sphericalangle$ irányított szöget jelöljük α-val.

Az e egyenest A körül, az f egyenest B körül ugyanakkora irányított szöggel elforgatva, a kapott e_i, f_i egyenesek metszéspontját jelölje P_i. P_i leírja az A, B pontokhoz tartozó α látószögű kört. Használjuk az $(e_i, f_i)\sphericalangle = AP_iB\sphericalangle$ jelölést is az előbbi értelemben.



55. ábra

Az 55. *ábrán* az $(e, f)\sphericalangle \equiv AP_1B\sphericalangle$ helyzetből kiindulva végigkövettük a látószög mozgását, az e és f egyenest pozitív irányban forgattuk. Láthatjuk, hogy 180°-os forgatás után $P_1 \equiv P_5$, de az egyenesek ellentétes irányítással térnek vissza a kiinduló helyzetbe, tovább forgatva a P mégegyszer leírja a kört, 360° körülfordulás után a kiinduló helyzetbe jutunk vissza.

Következzék a bizonyítás. Először igazoljuk, hogy B, A', Q, R' egy körön vannak. A tükrözés miatt

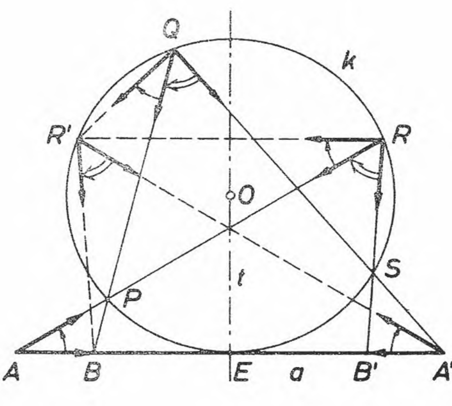
(1) $AA'R'\sphericalangle \equiv BA'R'\sphericalangle = ARR'\sphericalangle.$

(Ezzel kijelöltük az $RP \equiv RA$ és RR' egyenesek irányítását is.)

A P, R, Q, R' pontok egy körön vannak, ezért

(2) $$ARR'\sphericalangle \equiv PRR'\sphericalangle = \\ = PQR'\sphericalangle \equiv BQR'\sphericalangle.$$

(Ezzel kijelöltük a $QP \equiv QB$ és QR' egyenesek irányítását is.)



56. ábra

(1) és (2) összevetéséből következik, hogy $BA'R'\sphericalangle = BQR'\sphericalangle$, tehát B, A', Q, R' egy körön vannak.

Jelöljük ki az $A'QB$ irányított szöget, és ezzel QA' irányítását. Mivel B, A', Q, R' egy körön vannak, azért

(3) $$A'QB\sphericalangle = A'R'B\sphericalangle$$

(és ez kijelöli $R'A'$ és $R'B$ irányítását). Mivel a P, S, R, Q pontok egy körön vannak,

(4) $$A'QB\sphericalangle \equiv SQP\sphericalangle = SRP\sphericalangle$$

(és így kijelöltük $RS\equiv RB'$ és $RP\equiv RA$ irányítását).
(3) és (4)-ből következik, hogy

(5) $$A'R'B\sphericalangle = SRP\sphericalangle \equiv B'RA\sphericalangle.$$

Az (5) szögegyenlőségből látható, hogy a t-re való tükrözésnél az RB' egyenes az $R'B$ egyenesbe, B' a B-be megy át.

Megjegyzés

1. A bizonyításból az is kiderül, hogy nem lényeges az a feltétel, hogy az a egyenes érintse a k kört, csak az, hogy AA' felezőmerőlegese a k körnek is szimmetriatengelye legyen, tehát átmenjen az O középponton.

2. Talán meglepő, de feladatunk — az előzőhöz hasonlóan — szintén a *Desargues-féle involúciós tétel* speciális esete *(38. jegyzet)*.

142. Egy $ABCA'B'C'$ konvex hatszög csúcsai egy kör AA', BB', CC' átmérőinek végpontjai, és P a körnek a hatszög csúcsaitól különböző pontja. Legyenek P-ből az AB, BC, CA', $A'B'$, $B'C'$, $C'A$ oldalra bocsátott merőlegesek talppontjai rendre Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6. Bizonyítandó, hogy a $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ hatszögnek bármelyik két egymás utáni oldala derékszöget alkot, továbbá hogy a Q_1Q_4, Q_2Q_5, Q_3Q_6 szakaszok felezőpontjai és P egy körön fekszenek.

Megoldás

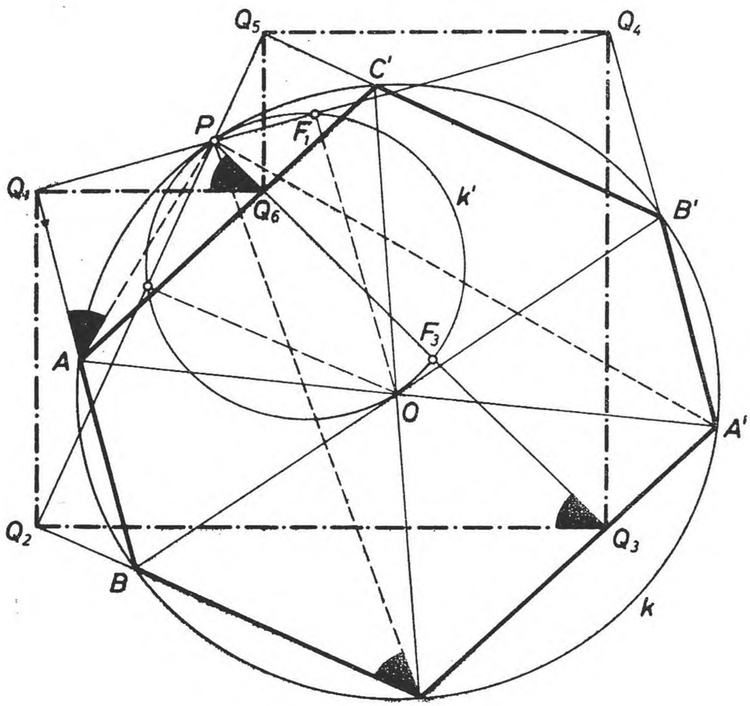
A $H_1 = ABCA'B'C'$ hatszög középpontosan szimmetrikus a k kör O középpontjára nézve, ezért mindegyik szemben fekvő oldalpárja egymással párhuzamos, tehát a P-ből rájuk bocsátott merőlegesek azonosak, pl. a P, Q_1, Q_4 ponthármas egy egyenesbe esik.

Először a feladat második részét bizonyítjuk be.

A Q_1Q_4 szakasz F_1 felezőpontja és O illeszkednek az AB és $A'B'$ oldalegyenesek középpárhuzamosára, ezért az F_1O szakasz merőleges a Q_1Q_4 szakaszra. Mivel az F_1 pontból az OP szakasz derékszögben látszik, F_1 az OP átmérőjű k' Thalész-körnek pontja. Ugyanez áll a Q_2Q_5 és Q_3Q_6 szakaszok F_2 és F_3 felezőpontjára is.

Be kell még látnunk, hogy a $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6=H_2$ hatszög bármelyik két egymás utáni oldala derékszöget alkot. Elegendő P-nek a $C'A$ íven felvehető helyzeteire szorítkoznunk *(57. ábra)*, mert H_1-nek nincs kitüntetett oldala, így a betűzés megváltoztatásával mindig elérhető az említett helyzet.

Megmutatjuk, hogy H_2 egy tetszőleges, pl. Q_6Q_1 oldala párhuzamos a tőle számított második oldallal, Q_3Q_2-vel, és a harmadik, Q_3Q_4 oldalra merőleges. Ebből már következik, hogy a második és harmadik, Q_2Q_3 és Q_3Q_4 oldal egymásra merőleges.



57. ábra

a) *Először bebizonyítjuk, hogy $PQ_6Q_1\sphericalangle = PQ_3Q_2\sphericalangle$.*

A PQ_1AQ_6 négyszög húrnégyszög, mert két szemközti szöge, $PQ_1A\sphericalangle$ és $AQ_6P\sphericalangle$ derékszög. Ebből következik, hogy $PQ_6Q_1\sphericalangle = PAQ_1\sphericalangle$, mert PQ_1 húrhoz tartozó kerületi szögek.

Mivel $ABCP$ húrnégyszög, ezért a C-nél levő szög egyenlő az A-nál levő külső szöggel, tehát $PAQ_1\sphericalangle = PCB\sphericalangle$.

A PQ_2CQ_3 négyszög húrnégyszög, mert $PQ_2C\sphericalangle = CQ_3P\sphericalangle = 90°$. Ebből következik, hogy a PQ_2 húrhoz tartozó $PCQ_2\sphericalangle = PQ_3Q_2\sphericalangle$.

A fentiekből következik, hogy $PQ_6Q_1\sphericalangle = PQ_3Q_2\sphericalangle$, amiből — figyelembe véve, hogy a P, Q_6, Q_3 ponthármas egy egyenesre illeszkedik — következik a Q_6Q_1 és Q_3Q_2 oldalak párhuzamossága.

b) *Megmutatjuk, hogy PQ_1AQ_6 és $A'Q_4PQ_3$ egymáshoz hasonló húrnégyszögek, megfelelő oldalaik egymásra merőlegesek.*

A PAQ_6 és $A'PQ_3$ derékszögű háromszögek hasonlók, mert P-nél levő hegyesszögeik PA és PA' merőlegessége folytán egymásnak pótszögei. Megfelelő oldalaik egymásra merőlegesek.

A PQ_1A és $A'Q_4P$ derékszögű háromszögek is hasonlók, ugyanis $APQ_1\sphericalangle = PA'Q_4\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek.

Mivel a PAQ_6 és $A'PQ_3$, valamint a PQ_1A és $A'Q_4P$ háromszögek hasonlók, a hasonlóság aránya a páronként közös PA, illetve PA' átfogók aránya, és a megfelelő oldalak egymásra merőlegesek; következik, hogy PQ_1AQ_6 és $A'Q_4PQ_3$ húrnégyszögek is hasonlók, és megfelelő szakaszaik, így a Q_6Q_1 és Q_3Q_4 átlóik is merőlegesek.

6. Térgeometriai számítások, bizonyítások

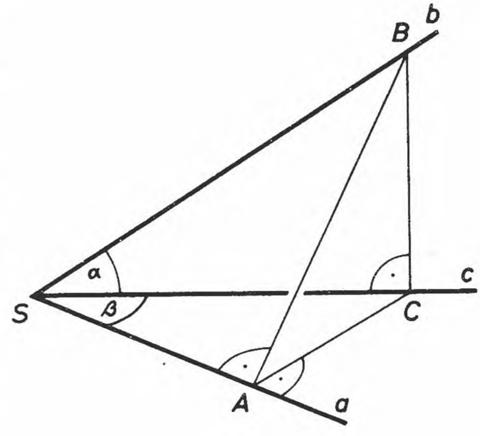
143. A tér S pontjából három nem egy síkba eső félegyenes indul ki: a, b és c. A c és b-vel meghatározott sík merőleges a c és a-val meghatározott síkra. A b és c közti α és az a és c közti β hegyesszöget ismertnek tekintve, számítsuk ki az a és b alkotta γ szöget!

Megoldás

Jelöljük az a félegyenes egy tetszőleges S-től különböző pontját A-val *(58. ábra). Az (a, c) síkban A-ból merőlegest állítunk a-ra. Mivel β hegyesszög, az A-ban emelt merőleges metszi c-t egy C pontban. A (c, b) síkban C-ből merőlegest állítunk c-re.* Mivel α hegyesszög, a C-ben emelt merőleges metszi b-t egy B pontban.

CB az *SAC* síkra merőleges *SCB* síkban van, és merőleges a két sík *SC* metszésvonalára, ezért merőleges az *SAC* síkra, tehát annak *SA* egyenesére is. *AC* merőleges *SA*-ra, mert úgy szerkesztettük. *Tehát SA merőleges az ABC síkra,* mert merőleges annak két egymást metsző *CB* és *AC* egyenesére, ezért *SA* merőleges az *ABC* sík *AB* egyenesére is.

A feladat az SAB derékszögű háromszög $\gamma = ASB$ *szögének meghatározására redukálódott, ahol* $\cos\gamma = \dfrac{SA}{SB}$. Az *SAC* derékszögű háromszögből $SA = SC \cdot \cos\beta$. Az *SCB* derékszögű háromszögből $SB = \dfrac{SC}{\cos\alpha}$.



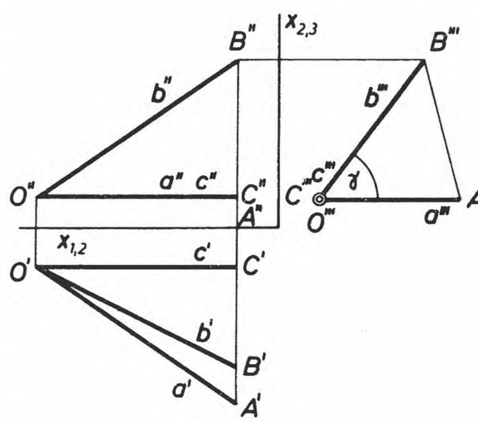
58. ábra

(1) $$\cos\gamma = \frac{SC \cdot \cos\beta}{\dfrac{SC}{\cos\alpha}} = \cos\alpha \cdot \cos\beta.$$

Megjegyzés

Feladatunk a *triéder (háromél, gömbháromszög)* oldalaira vonatkozó cosinus-tétel speciális esete.

Az *O* csúcsból kiinduló *OA*, *OB*, *OC* élek által meghatározott *triéder oldalainak* nevezzük a $BOC\sphericalangle = a$, $COA\sphericalangle = b$, $AOB\sphericalangle = c$ élszögeket. A *triéder szögei*, az oldalak szögei, pl. a γ szög az *a*, *b* oldalak szöge, azaz a *BOC* és *COA* síkok lapszöge. Az idézett tétel így szól ([6], [10], [14])



59. ábra

(2) $$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

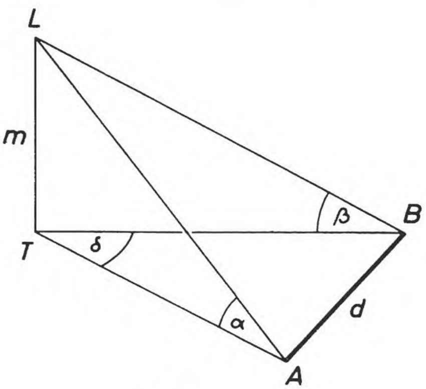
Ezt a feladat megoldásához hasonló gondolatmenettel is könnyen igazolhatjuk, ha a és b hegyesszögek. Az élek — egyébként tetszőleges — A, B, C pontjait most úgy választjuk, hogy $CB \perp OC$ és $CA \perp OC$ teljesüljön *(59. ábra).*

Ekkor $BC'\sphericalangle = \gamma$, továbbá $OB = OC\dfrac{1}{\cos a}$, $OA = OC\dfrac{1}{\cos b}$, $BC = OC \cdot \operatorname{tg} a$, $CA = OC \cdot \operatorname{tg} b$. A BCA és BOA háromszögek közös AB oldalaira felírva a közönséges cosinustételt, átalakítások után (2)-t kapjuk.

144. Egy léggömb középpontját két földi megfigyelő 45°, illetőleg 22,5° emelkedési szögben látja. Az első megfigyelő délre, a második északnyugatra van a léggömb talppontjától, egymástól való távolságuk 1600 m. Milyen magasan lebeg a léggömb a vízszintes talaj fölött?

Megoldás

A feladatot általánosan, a talpponton átmenő vízszintes síkban tetszőleges helyzetű A és B megfigyelők esetére oldjuk meg.



60. ábra

Jelölje α és β azokat az emelkedési szögeket, amelyekben az A és B megfigyelő a léggömb L középpontját látja. Legyen T az L merőleges vetülete a vízszintes talajon, és az ATB konvex szöget jelöljük δ-val *(60. ábra).*

Az ALT derékszögű háromszögből $AT = m \operatorname{ctg} \alpha$.

A BLT derékszögű háromszögből $BT = m \operatorname{ctg} \beta$.

Az esetleg elfajuló ABT háromszögből a cosinustétel alapján:

$$AB = d = \sqrt{m^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha + m^2 \operatorname{ctg}^2 \beta - 2m^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \cos \delta} =$$

$$= m\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \cos \delta}.$$

Innen

$$m = \frac{d}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \cos \delta}}.$$

A $d = 1600$ m, $\alpha = 45°$, $\beta = 22{,}5°$, $\delta = 135°$ adatokkal számolva, $m \approx 500$ méter.

145. Egy hegycsúcs magassága az előtte elhaladó egyenes, vízszintes útszakasz három egymás után kijelölt pontjából rendre 19,5°, 28,9°, illetőleg 33,7° szög alatt látszik. A második pont 100 m-re, a harmadik 250 m-re van az elsőtől. Milyen magas a hegy (az út szintje fölött), és mekkora a talppontjának az úttól való távolsága?

Megoldás

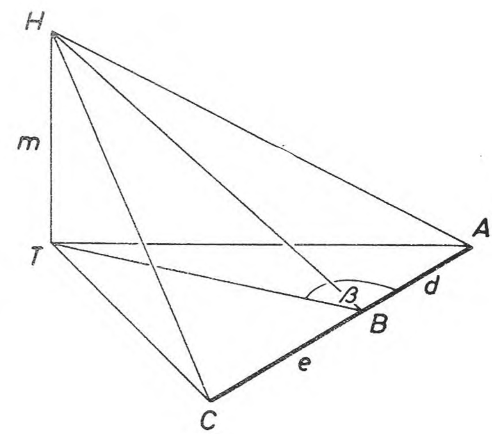
Legyen a csúcs H, talppontja T, az út szintje fölötti magassága m. Az észlelőhelyeket rendre A, B és C jelöli. $AB=d=100$ m, $BC=e=250$ m $-$ 100 m $=150$ m. Az adott szögek cotangense legyen rendre a, b, c. Az ABT szöget β-val jelöljük. A HTA, HTB és HTC derékszögű háromszögekből: $TA=ma$, $TB=mb$ és $TC=mc$ *(61. ábra)*. A cosinustétel alapján a TBA, ill. TBC háromszögekből:

$$m^2a^2=d^2+m^2b^2-2mbd\cos\beta,$$
$$m^2c^2=e^2+m^2b^2+2mbe\cos\beta.$$

Az elsőt e-vel, a másodikat d-vel szorozva és összeadva:

$$m^2(ea^2+dc^2-eb^2-db^2)=de(d+e).$$

Behelyettesítés után $m^2=6240$. *Tehát 79 méter magas a hegy.* Így $BT=143$ méter, $CT=118$ méter, és pl. a BCT háromszög magasságaként a *Hérón*-képlet alapján T távolsága az AC egyenestől *105 méter (54. jegyzet)*.

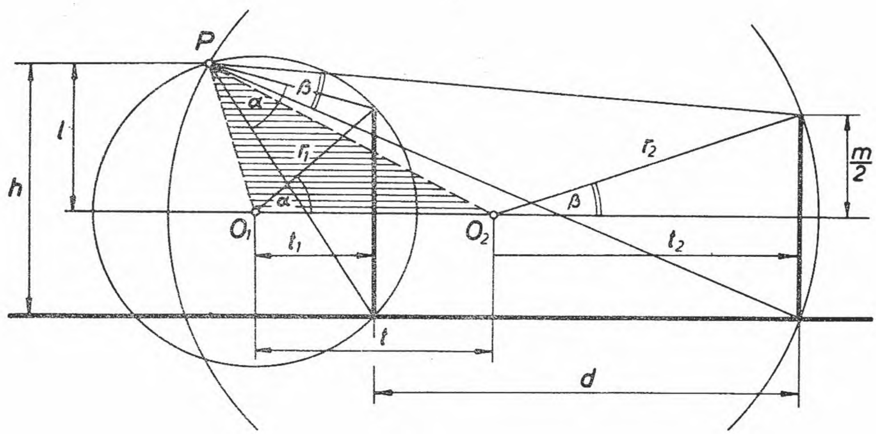


61. ábra

146. A Gellérthegyen egy megfigyelő áll. Szeme abban a síkban van, amelyet az Erzsébet-híd két kapuzatának déli szélei határoznak meg. Az egyik kapuzat déli szélének függőleges élét (az úttesttől a legmagasabb pontig) α szög alatt látja, a másik kapuzatét pedig β szög alatt. Milyen magasan áll a megfigyelő a kapuzatok talppontján átmenő vízszintes sík fölött, ha a két kapuzat távolsága d méter és a figyelembe vett magasságuk m méter? ($d=290$ m, $m=40$ m, $\alpha=11{,}4°$, $\beta=4{,}7°$)

Megoldás

A megfigyelő P nézőpontja rajta van azokon a köríveken, melyekből a közelebbi kapuzat α, a távolabbi β szög alatt látszik. Legyen e körök sugara r_1 és r_2, középpontja O_1 és O_2 *(62. ábra)*. A középpontok egymástól való távolságát t-vel, a megfelelő kapuzattól való távolságát t_1-gyel és t_2-vel jelöljük.



62. ábra

Ha P távolságát az O_1O_2 egyenestől l-lel jelöljük, akkor a keresett magasság $h=1/2 \cdot m+l$. Itt l-et mint az O_1O_2P háromszög magasságát fogjuk meghatározni. Ha az O_1O_2P háromszög oldalait ismerjük, magasságát a Hérón-képlettel számolhatjuk ki, ezért r_1, r_2, t meghatározására fogunk törekedni (54. jegyzet).

$$r_1=\frac{m}{2\sin\alpha}\,;\quad r_2=\frac{m}{2\cdot\sin\beta}\,;$$

$$t=t_1+d-t_2=\frac{m}{2}\cdot\operatorname{ctg}\alpha+d-\frac{m}{2}\operatorname{ctg}\beta.$$

A *Hérón*-képletből *l*-et kifejezve:

$$l=\frac{2\sqrt{s(s-r_1)(s-r_2)(s-t)}}{t}\,;$$

ahol

$$s=1/2\cdot(r_1+r_2+t)=\frac{m}{4\sin\alpha}+\frac{m}{4\sin\beta}+\frac{m}{4}\operatorname{ctg}\alpha-\frac{m}{4}\operatorname{ctg}\beta+\frac{2d}{4}=$$

$$=\frac{m}{4}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta+\frac{2d}{m}\right)\,;$$

$$s-r_1=\frac{m}{4}\left(-\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta+\frac{2d}{m}\right)\,;$$

$$s-r_2=\frac{m}{4}\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\sin\beta}+\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta+\frac{2d}{m}\right);$$

$$s-t=\frac{m}{4}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}-\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta-\frac{2d}{m}\right).$$

Ezután elvégezhetjük a számítást a megadott adatokkal. 4-jegyű függvénytáblázatot használva:

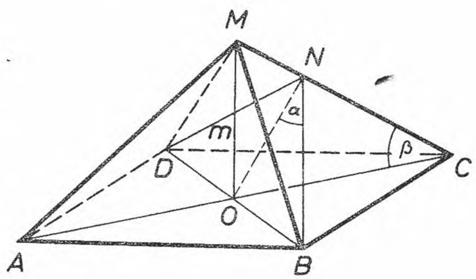
$$l\approx 31{,}5 \text{ m} \quad \text{adódik, így} \quad h\approx 51{,}5 \text{ m}.$$

147. Egy egyenlő oldalélű négyzetes gúla alapéle 26 cm, a szomszédos oldallapok 120°-os szöget zárnak be egymással. Milyen magas a gúla?

I. megoldás

Legyen a gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, csúcsa M, az alaplap középpontja O. A BD átlón át fektetett MC oldalélre merőleges sík az MC-t N pontban metszi *(63. ábra)*. Így ON merőleges MC-re.

Jelöljük az oldallapok hajlásszögét 2α-val. Ennélfogva $BNO\sphericalangle=\alpha$. Az OCN derékszögű háromszögből — $OCN\sphericalangle=\beta$ jelöléssel — $\sin\beta=\frac{ON}{OC}=\frac{ON}{OB}=\operatorname{ctg}\alpha$. (Ez utóbbi az OBN háromszögből.)



63. ábra

Végül az OCM derékszögű háromszögből ($\alpha, \beta<90°$)

$$m=OC\cdot\operatorname{tg}\beta=OC\cdot\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}=OC\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Az $AB=a$ jelöléssel

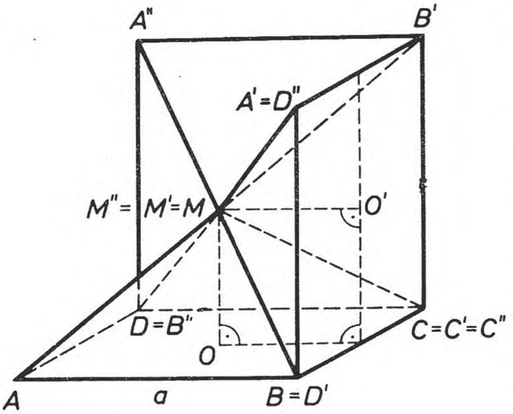
$$OC=\frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \text{tehát} \quad m=\frac{a\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{2-2\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Jelen esetben

$$a=26 \text{ cm}, \quad \alpha=60°, \quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad m=\frac{a}{2}=13 \text{ cm}.$$

II. megoldás

Tekintsük a feladatban szereplő ABCDM gúla CM élét, és forgassuk el ezen tengely körül a gúlát 120°-kal, majd az így kapott A'B'C'D'M' gúlát újabb 120°-kal A''B''C''D''M''-be (64. ábra).



64. ábra

Az oldallapok szöge 120°, így ez a 3 gúla hézag nélkül illeszkedik az MC él mentén. Tehát a C-be futó, megfelelő BC, $B'C$, $B''C$ élek által meghatározott szöglet kockaszöglet (a 3 gúlából álló testet M-re tükrözve, egy a élű kockát kapunk). Ebből most már nyilvánvaló, hogy $m=\frac{a}{2}$.

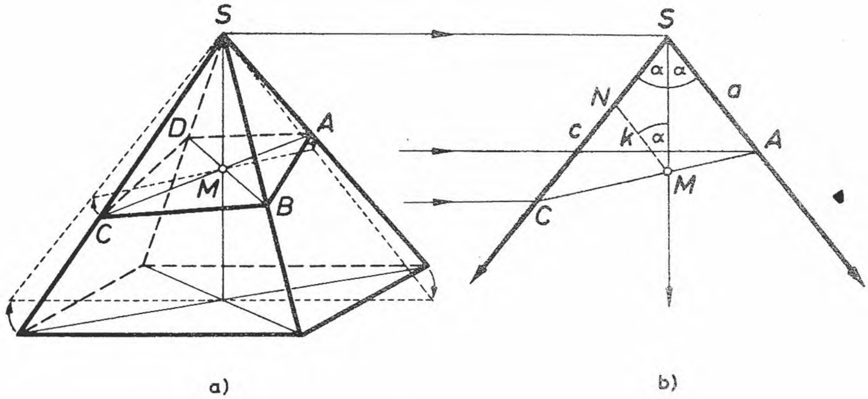
148. Egy sík egy szabályos négyoldalú gúla oldaléleit metszi. Bizonyítsuk be, hogy ha a gúla csúcsa S és a metszésidom az $ABCD$ négyszög, akkor

$$\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}=\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}.$$

I. megoldás

A négyszögmetszet AC átlója az SAC síkban, BD átlója pedig az SBD síkban van (65/a ábra). Az átlók M metszéspontja a két sík metszésvonalán, s így *a gúla S-ből induló testmagasságának egyenesén van.* Mivel a testmagasság egyenese az oldalélekkel egyenlő szöget zár be, az *SM közös szögfelezője az ASC és BSD háromszögeknek, amelyek S-nél levő szöge egyaránt 2α nagyságú.*

Ha tehát az előbbi két háromszöget egymásra forgatjuk (ez téglalap alapú gúla esetén is megtehető), akkor a feladat állítása a következő síkbeli állítássá fogalmazható át: *Ha egy szögfelező egyenesének egy pontján át húzott két szelő a szög száraiból a csúcstól számítva a és c, illetőleg b* és *d* hosszúságú szakaszokat metsz le, akkor $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$. Az előbbi állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy



65. ábra

a szárakból lemetszett szakaszok reciprok értékeinek összege független a szelő irányától, csak α-tól és SM-től függ *(65/b ábra)*.

Az ábrán látható ASC szög felezője az AC szakaszt M-ben, az M-en át SA-val párhuzamos egyenes az SC szakaszt egy belső N pontban metszi. (Feltehető, hogy $SC \geqq SA$.) Az SNM háromszög S-nél és M-nél levő szögei egyenlők, így ez a háromszög egyenlő szárú. Legyen az $SN=NM=k$. Ekkor a CSA és a CNM hasonló háromszögekből $c:a=(c-k):k$, innen pedig $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{k}$. Mivel pedig k nem függ az AC szelő irányától csak SM-től és α-tól, ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés

1. Az előbbi megoldásból könnyen adódik a következő általánosabb tétel: *Ha egy egyenlő oldalélű gúla alapja centrálisan szimmetrikus sokszög* (és így szükségképpen páros oldalszámú), *akkor egy minden oldalélt metsző síkot véve, a szemközti élpárból lemetszett darabok reciprok értékeinek összege minden élpárra ugyanakkora.*

2. Az előbbiek után az olvasóra bízzuk a következő feladat megoldását.

Egy forgáskúpot egy síkkal e ellipszisben metszünk, majd ezt az ellipszist a kúp csúcsával együtt a kúp tengelyére merőleges síkra vetítjük, e vetülete e', a kúp csúcsának vetülete F legyen. Ha az e' ellipszis

F ponton áthaladó két tetszőleges húrját az F pont p és q, illetve r és s szakaszokra bontja, akkor

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}.$$

Megjegyezzük, hogy F éppen az e' ellipszis egyik fókusza.

Vajon igaz a húrdarabokra vonatkozó fenti képlet egy tetszőleges ellipszis fókuszán áthaladó húrokra is *(35. jegyzet)*?

II. megoldás

A következő általánosabb állítást fogjuk bebizonyítani: *Ha egy paralelogramma alapú gúlát, amelynek csúcsa az átlók metszéspontjában emelt merőlegesen van, egy síkkal metszünk el, a gúla csúcsát S-sel, a metszésidomot ABCD-vel jelöljük, akkor*

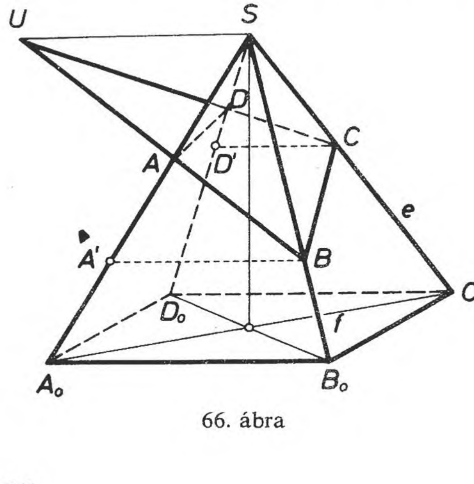
(1) $$\left(\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}\right):\left(\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}\right)=f:e,$$

ahol f az SB-t tartalmazó, e az SC-t tartalmazó él hossza. (Az adott feladatban minden oldalél egyenlő, és így $\frac{f}{e}=1$.)

A feltétel szerint $SA_0=SC_0=e$ és $SB_0=SD_0=f$.

Ha a metsző sík párhuzamos az alappal, akkor a bizonyítandó állítás $SA=SC$ és $SB=SD$ miatt $SB:SA=f:e$ alakú, s ez utóbbi az alapél és AB párhuzamossága folytán igaz.

Ha a metsző sík nem párhuzamos az alappal, akkor legyen AB és CD metszéspontja U *(66. ábra)*. Az US az A_0B_0S és C_0D_0S síkok metszésvonalán van, ez pedig párhuzamos a két síkban levő — egymással párhuzamos — A_0B_0 és C_0D_0 egyenesekkel, ezért $US \parallel A_0B_0 \parallel C_0D_0$. Legyen most a B-n átmenő US-sel párhuzamos egyenes A_0S-sel való metszéspontja A', a C-n átmenő US-sel párhuzamos egyenes D_0S-sel való metszéspontja D'. Az $SA'B$ és SA_0B_0 valamint az SCD' és SC_0D_0 háromszögek páronként hasonlók. Ennélfogva $SA':SB=SA_0:SB_0=e:f$, $A'B:SB=A_0B_0:SB_0=A_0B_0:f$, azaz



66. ábra

(2) $$SA'=\frac{e}{f}SB \quad \text{és} \quad A'B=\frac{A_0B_0}{f}SB.$$

Hasonlóan igaz, hogy

(3) $$SD'=\frac{f}{e}SC \quad \text{és} \quad CD'=\frac{C_0D_0}{e}SC.$$

Ugyancsak az $AA'B$ és ASU, valamint a DCD' és DUS háromszögek páronkénti hasonlóságából

(4) $$\frac{A'A}{SA}=\frac{A'B}{US};$$ (5) $$\frac{D'D}{SD}=\frac{CD'}{US}.$$

(4)-ből (2) felhasználásával

$$\frac{SA'-SA}{SA}=\frac{\frac{e}{f}SB-SA}{SA}=\frac{A_0B_0\cdot SB}{f\cdot US},$$

és innen

(6) $$\frac{e}{SA}-\frac{f}{SB}=\frac{A_0B_0}{US}.$$

(5)-ből (3) felhasználásával

$$\frac{SD'-SD}{SD}=\frac{\frac{f}{e}SC-SD}{SD}=\frac{C_0D_0\cdot SC}{e\cdot US},$$

és innen

(7) $$\frac{f}{SD}-\frac{e}{SC}=\frac{C_0D_0}{US}.$$

De $A_0B_0=C_0D_0$, tehát (6)-ból és (7)-ből

$$\frac{e}{SA}-\frac{f}{SB}=\frac{f}{SD}-\frac{e}{SC},$$

ahonnan

$$e\left(\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}\right)=f\left(\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}\right).$$

S így a feladat állításánál általánosabb tételt sikerült bebizonyítanunk.

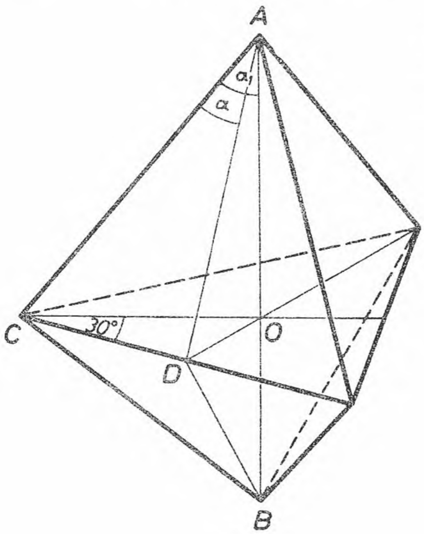
149. Két szabályos háromoldalú gúla alaplapja közös. Két oldalél közti szög az egyik gúlán 2α, a másikon 2β, és

(1) $$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\frac{3}{4}.$$

Bizonyítandó, hogy a közös alapháromszög köré írt kör sugara a két gúla magasságának mértani közepe.

Megoldás

Megmutatjuk, hogy $ACB\sphericalangle = 90°$. Ebből már következik, hogy $BO \cdot OA = CO^2$. Legyen a gúlák csúcsa A, illetve B, közös alaplapjuk centruma O, egy csúcsa C, és a C-ből kiinduló egyik alapél felezőpontja D *(67. ábra)*.



67. ábra

Ha az ACD derékszögű háromszögben A-nál α nagyságú, az AOC derékszögű háromszögben A-nál α_1 nagyságú hegyesszög van, akkor

$$CD = CA \sin\alpha, \qquad CO = CA \sin\alpha_1.$$

A COD derékszögű háromszögben C-nél $30°$-os szög van:

$$(2) \qquad \frac{CD}{CO} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = \cos 30°,$$

$$\sin\alpha = \sin\alpha_1 \cos 30°.$$

Hasonló módon kapjuk a BDC és BOC derékszögű háromszögek B-nél levő β, illetve β_1 szögeire, hogy

$$(3) \qquad \sin\beta = \sin\beta_1 \cos 30°.$$

(2)-t és (3)-at (1)-be behelyettesítve és $\cos^2 30° = \frac{3}{4}$ -del osztva a

$$(4) \qquad \sin^2\alpha_1 + \sin^2\beta_1 = 1$$

egyenletre jutunk, melyet a $\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1 = 1$ azonossággal összehasonlítva, és figyelembe véve, hogy α_1 és β_1 hegyesszögek, kapjuk, hogy $\alpha_1 + \beta_1 = 90°$.

Az ABC háromszögben tehát C-nél derékszög van. Így az AB átfogó AO és OB szeletének a CO magasság valóban mértani közepe.

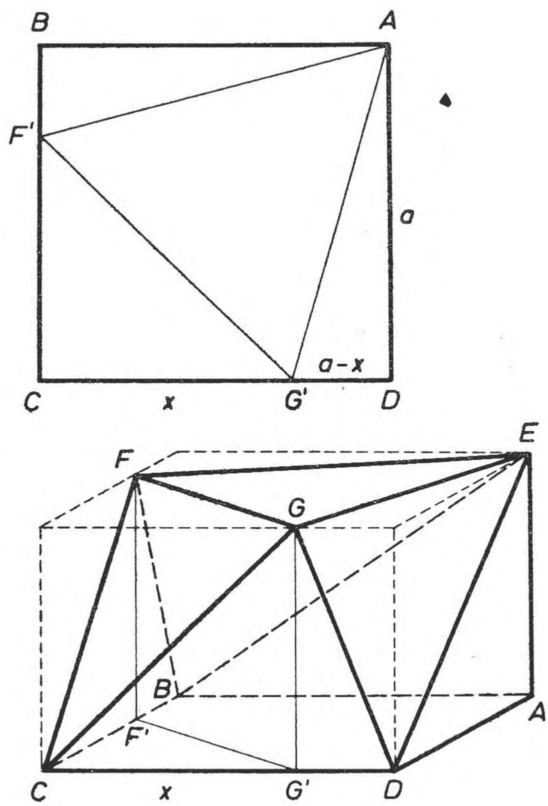
Más megoldási lehetőség

A gúlák magasságával és a közös alaplap köré írt kör sugarával is kifejezhetjük a többi szükséges alkotórészt.

150. Egy síklapú, hétcsúcsú konvex test egyik lapja a 12 cm oldalú *ABCD* négyzet, egy másik lapja a négyzettel párhuzamos síkban fekvő *EFG* szabályos háromszög. E háromszög *E* csúcsának a merőleges vetülete a négyzet síkján egybeesik *A*-val, az *F* és a *G* vetülete pedig a *BC*, illetve *CD* oldalon van, *C*-től egyenlő távolságra. A testnek van még egy szabályos háromszög lapja. Mekkora az *ABCD* és *EFG* lapok távolsága?

Megoldás

Jelölje *F* és *G* vetületét *F'* és *G'* (68. ábra). *Kiszámítjuk a* $CF'=$ $=CG'=x$ *távolságot, megmutatjuk, hogy a második szabályos háromszög csak CFG lehet, s a keresett távolság éppen x. Végül leírjuk a keresett testet, megmutatjuk, hogy a test konvex.*



68. ábra

Az *EFG* és *AF'G'* háromszögek egybevágók, így $AG'=F'G'$. *Pitagorasz*-tétellel

$$AG'^2=a^2+(a-x)^2,$$

$$F'G'^2=2x^2.$$

Tehát

$$a^2+(a-x)^2=2x^2;$$

$$x^2+2ax-2a^2=0.$$

Az egyenlet pozitív gyöke $x=a(\sqrt{3}-1)$.

A párhuzamos lapok oldalain kívül a test minden éle az *EFG* háromszög és az *ABCD* négyzet egy-egy csúcsát köti össze. Az *EFG* és *ABCD* élei páronként kitérők, ezért *ABCD*-n kívül minden lap háromszög.

Egy ilyen ,,oldallap'' csak úgy lehet szabályos háromszög, ha a négyzet síkjára merőlegesen vetítve egyenlő szárú háromszöget kapunk vagy pedig olyan szakaszt, melynek felezőpontja is egy csúcs vetülete.

Esetünkben $\frac{a}{2} < x < a$, ezért csak $CF'G'$ lehet szabályos háromszög vetülete. De akkor $F'G' = CG$, a $CF'G'$ és $G'CG$ háromszögek egybevágók, hiszen CG' befogójuk is közös. Így $GG' = CF' = x$.

A keresett test származtatható egy $ABCD$ alapú négyzetes oszlopból, melyet az EFB, FGC, GDE síkokkal elmetszünk. Konvex testből kiindulva, síkmetszeteket levágva, konvex testhez jutunk.

Megjegyzés

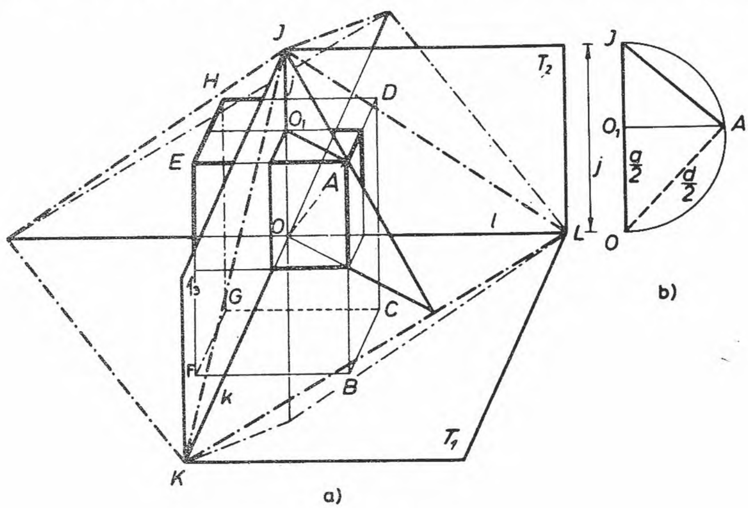
Könnyen látható, hogy a $CG' = CF'$ kikötés felesleges.

151. Egy téglatest egy csúcsba összefutó három élének hossza a, b, c. Állítsunk merőleges síkot mindegyik csúcson át az oda befutó testátlóra, és tekintsük azt a konvex testet, amelyet az így kapott síkok bezárnak. Mennyi e test felszíne és térfogata?

Megoldás

Jelöljük a tégla csúcsait A, B, C, D, E, F, G, H-val, középpontját O-val, testátlóinak hosszát d-vel. Tudjuk, hogy ha a, b, c az egy csúcsba (pl. A-ba) összefutó három él (AB, AD, AE) hossza, akkor $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Ha a téglát rendre az AB, AD, AE élek T_1, T_2, T_3 felező merőleges síkjára tükröznénk, akkor önmagába menne át, ezért testátlói is testátlókba, az azokra merőleges síkok is egymásba mennének át, *tehát a T test is szimmetrikus T_1, T_2, T_3-ra. A szimmetriasíkok létesítette térnyolcadok mindegyike egy téglacsúcsot*



69. ábra

tartalmaz. Ebben a megfelelő testátlóra merőlegesen állított sík a szimmetriasíkokkal egy-egy 3-oldalú gúlát határoz meg, melynek egyik csúcsa *O*, és az ebben találkozó lapjai, amelyek a szimmetriasíkokban vannak, páronként merőlegesek *(69. ábra)*.

Egy ilyen gúla a szimmetriasíkokra való tükrözéssel sorra átvihető az összes többibe, és a 8 gúla együttesen alkotja T-t, amelynek határfelülete így 8 egybevágó t területű háromszögből áll, élei a szimmetriasíkokban vannak, csúcsai ezek metszésvonalain.

Jelöljük *a szóban forgó gúlának a* tégla *AB, AD, AE* éleivel párhuzamos éleinek hosszát j, k, l-lel, akkor *térfogatát kétféle módon is kiszámíthatjuk: a merőleges élek hosszainak* szorzatát osztjuk 6-tal, vagy pedig t-nek és a rá merőleges téglaátló felének $\frac{1}{3}$-szoros szorzatát számítjuk ki:

(1) $$V_1=\frac{1}{6}jkl=\frac{1}{6}dt.$$

A T test V térfogata és F felszíne (1) alapján

(2) $$V=8V_1=\frac{4}{3}jkl;$$

$$F=8t=\frac{8jkl}{d}=\frac{6V}{d}.$$

(Elég tehát F és V egyikét meghatározni, a másik az előbbi összefüggés alapján számolható ki belőle.)

Kiszámítjuk a j, k, l hosszúságokat. Jelöljük az A-t tartalmazó térnyolcadba eső gúla j hosszúságú élének O-tól különböző végpontját J-vel, az él metszéspontját az $ADHE$ lappal O_1-gyel *(69. ábra)*. Ekkor $OO_1=\frac{a}{2}$. Mivel JA az OA-ra A-ban emelt merőleges sík egy egyenese, $JA \perp OA$. Az OJA derékszögű háromszögben a befogótétel alapján

$$j=\frac{d^2}{2a}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2a}.$$

Hasonlóan látható be, hogy: $k=\frac{d^2}{2b}$; $l=\frac{d^2}{2c}$.

Behelyettesítéssel

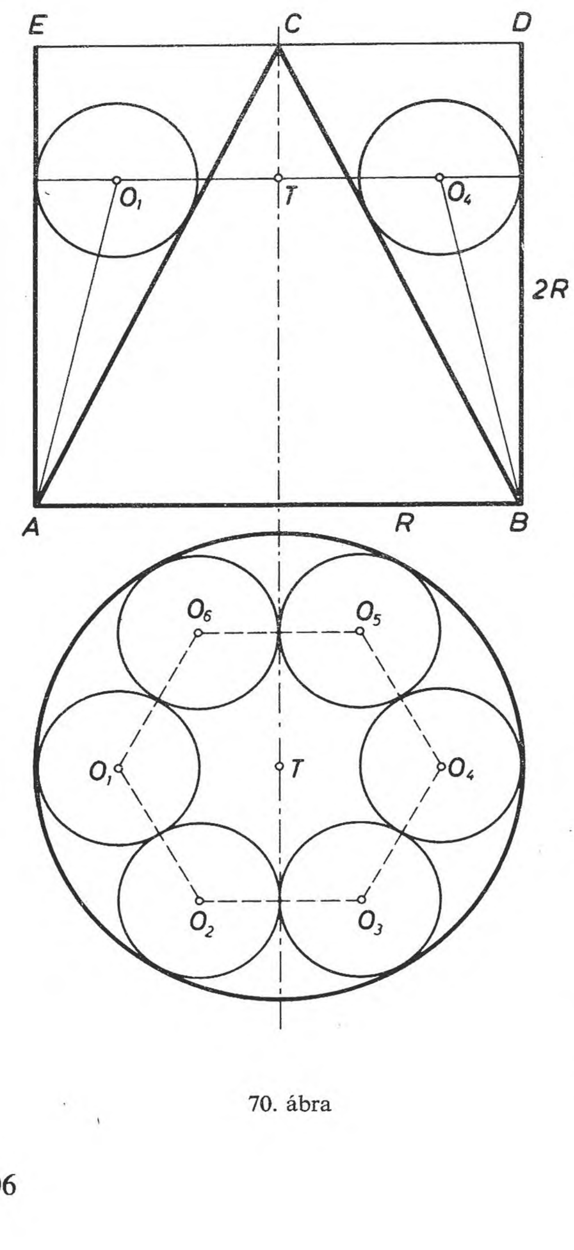
$$V=\frac{4}{3}\cdot\frac{d^6}{8abc}=\frac{1}{6}\cdot\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{abc},$$

és

$$F=\frac{6V}{d}=\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^5}{abc}.$$

152. Forgáshenger alakú edényünk magassága egyenlő alapkörének átmérőjével. Az álló edénybe előbb egy vele egyenlő alapsugarú és magasságú forgáskúpot helyezünk — csúcsával fölfelé —, majd 6 egyenlő sugarú gömböt. A gömbök mindegyike érinti az edény falát, a kúp palástját és 2 másik gömböt. Kiemelkednek-e a gömbök az edényből?

Megoldás



70. ábra

A henger és a kúp közös tengelyén átmenő minden síkmetszetben az AE henger- és AC kúpalkotó ugyanakkora $EAC\sphericalangle$-et zár be, így az r sugarú gömbök középpontjait tartalmazó, tengelyen átmenő síkmetszetekben is. A gömbök ilyen síkmetszetei olyan r sugarú körök, melyek egy $EAC\sphericalangle$-et bezáró henger-, ill. kúpalkotót érintenek, ezért *mind a 6 gömbnek a hengeren és kúpon levő érintési pontjai a megfelelő henger- és kúpalkotó közös pontjából ugyanakkora távolságra vannak (70. ábra).*

Ez a távolság a hengeren levő érintési pontok edényünk alapsíkjától mért távolsága is, ami a gömbök középpontjainak alapsíktól való távolságával is megegyezik, tehát az egymást érintő, egyenlő sugarú gömbök középpontjai egy az alapsíkkal párhuzamos síkon vannak.

A gömbök középpontjai egymástól $2r$, a hengerpalásttól r távolságra vannak. Ez utóbbi miatt a tengelytől $R-r$ távolságra vannak, ha R-rel jelöljük

a henger alapkörének sugarát. Tehát a gömbközéppontok egy (T középpontú) szabályos hatszög csúcsaiban helyezkednek el. *Így* $R-r=2r$, *amiből* $r=\frac{R}{3}$ *a gömbök sugara.*

Nézzük meg, hogy maximálisan mekkora ϱ *sugarú* — hengert és kúpot érintő — *gömböt helyezhetünk az edénybe úgy, hogy „ne emelkedjen ki" az edényből.*

ϱ nyilván az EAC háromszög beírt körének sugarával egyenlő. Az ismert $\varrho=\frac{t}{s}$ képletből számolunk *(54. jegyzet)*. Az EAC háromszög területe $t=R^2$.

$$AC=\sqrt{R^2+4R^2}=R\cdot\sqrt{5},$$

$$s=\frac{R+2R+R\sqrt{5}}{2}=R\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

innen

$$\varrho=\frac{R^2}{R\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{2R}{3+\sqrt{5}}.$$

Ha $r\leqq\varrho$, *akkor gömbjeink nem emelkednek ki az edényből, ha* $r>\varrho$, *akkor a gömbök kiemelkednek az edényből.*

Mivel $\sqrt{5}<3$,

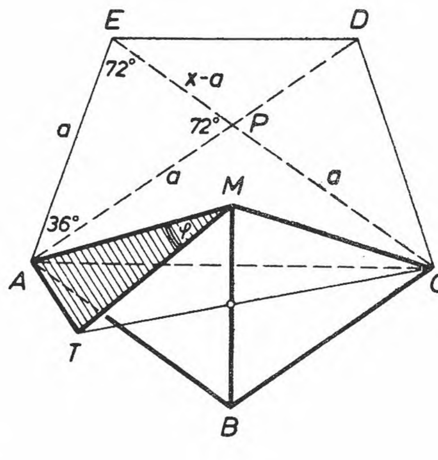
$$\varrho=\frac{2R}{3+\sqrt{5}}>\frac{2R}{6}=\frac{R}{3}=r.$$

Tehát a gömbök nem emelkednek ki az edényből.

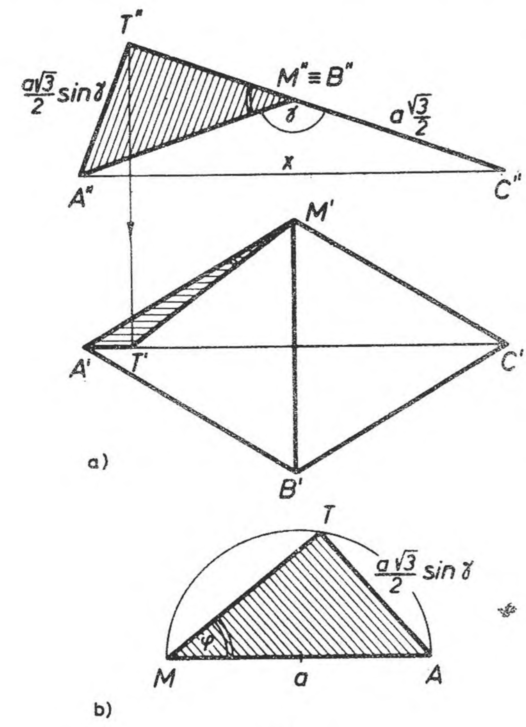
153. Egy gúla alaplapja az $ABCDE$ szabályos ötszög, az ezzel szemközti csúcsa M, az oldallapjai szabályos háromszögek. Határozzuk meg az AM oldalélnek a BCM oldallap síkjával bezárt szögét!

Megoldás

A *71. ábrán* felülnézetben ábrázoltuk az $ABCDEM$ gúlát, így M vetülete az $ABCDE$ szabályos ötszög középpontja.



71. ábra



72. ábra

Az AM élnek a BCM oldallap síkjával bezárt szöge egyenlő AM-nek és AM BCM síkjára vonatkozó TM merőleges vetületének szögével: $\varphi = AMT\sphericalangle$. Ábrázoló geometriai szerkesztéssel és számítással is megoldjuk a feladatot.

A BM-hez csatlakozó BCM és BAM szabályos háromszögeket az I. *képsíkban levő AC egyenes körül elforgatjuk úgy, hogy a BM él párhuzamos legyen az első képsíkkal (72/a ábra).* A II. képsíkot a BM él felező merőleges síkjával, σ-val, és így a σ-ban levő AC egyenessel is párhuzamosan vesszük fel. Ezért B és M második képe egybeesik, a BCM és BAM síkok élben látszanak.

A BCM síkra merőleges AT szakasz is σ-ban van, hiszen $AT \perp BM$. Tehát a II. képen $A''T'' \perp C''M''$, és $A''T''$ valódi nagyságában látszik.

Ezután az $AM = AB$ átfogóval és $AT = A''T''$ befogóval szerkesztett derékszögű háromszög M-nél levő szöge a keresett φ szög *(72/b ábra)*.

A számításhoz jelöljük az $ABCDE$ szabályos ötszög oldalának hosszát a-val, az AC átló hosszát x-szel. A *71. ábrán* az AEC és PEA egyenlő szárú háromszögek szögei egyenlők, ezért a az x-nek kisebbik *aranymetszete:*

$$(1) \qquad a:(x-a)=x:a, \quad x^2-ax-a^2=0, \quad x=a\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

A *72/a ábrán* a $C''M''A''$ egyenlő szárú háromszög szára a szabályos háromszögek $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ magassága, $A''C''=x$, így a BAM és BCM lapok γ hajlásszögére — a cosinustételből (1) felhasználásával —

$$(2)\qquad \cos\gamma=\frac{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-x^2}{2\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1-\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{6}=-\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Ezért az $M''A''T''$ derékszögű háromszögben (2) alapján

$$A''T''=AT=\frac{a\sqrt{3}}{2}\sin\gamma=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}=a\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

És végül az MAT derékszögű háromszögből *(72/b ábra)*

$$(3)\qquad \sin\varphi=\frac{AT}{AM}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

A függvénytáblázatból $\varphi\approx 35°\ 14'$ adódik.

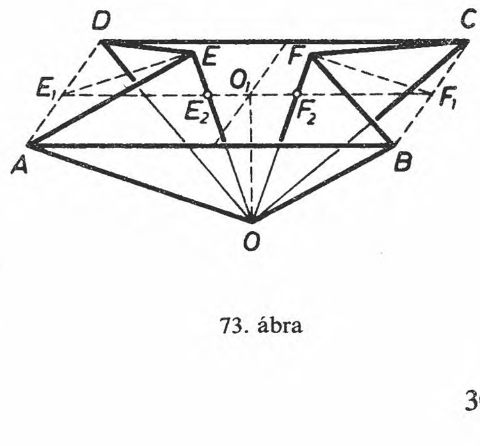
154. Az $ABCD$ négyzet alakú papírlapon három hajtásvonalat hozunk létre. Az elsőt az AC, a másodikat a BD átló mentén, ekkor hátoldalára fordítjuk a lapot, és harmadszor az AB-vel párhuzamos és egyirányú EF középvonal mentén hajtjuk be. A hajtásvonalak mentén természetesen behajló térbeli alakzatot — amelyen új csúcsként jelentkezik az eredeti négyzet O középpontja — úgy tartjuk, hogy az AB és CD élek téglalapot határozzanak meg. Ennek AB-vel párhuzamos és egyirányú középvonala E_1F_1. A téglalap síkja az EO, OF hajtásvonalat rendre az E_2, F_2 pontban metszi. Bizonyítandó, hogy

$$(1)\qquad E_1E_2=E_2O=OF_2=F_2F_1.$$

Megoldás

A behajtások utáni térbeli alakzatban *az O pont* egyenlő távol van az $ABCD$ téglalap csúcsaitól, tehát *benne van az AB, BC szakaszok S_1, S_2 felező merőleges síkjában.* S_1, S_2 az $ABCD$ téglalapot tartalmazó S síkot a téglalap középvonalaiban metszik, az S-re merőleges metszésvonaluk S-et a téglalap O_1 centrumában metszi, tehát OO_1 merőleges S-re *(73. ábra).*

Az E pont az A, D, csúcsoktól, F a B, C csúcsoktól egyenlő távolságra van, így E és F is benne van S_2-ben. Az A ponttól AE távolságra levő pontok az S_2 síkban egy E_1 körüli körön helyezkednek el. Ezt a kört az S_2-beli O középpontú, OE sugarú kör két pontban metszi: a metszéspontok szimmetrikusak az OE_1 egyenesre. Az E pont ezek közül csak az E_1OF_1 szögtartományban levő lehet, hiszen



73. ábra

az OE hajtás ellentétes irányú, mint az OA, OB hajtás, ezért az OE egyenes az $OABCD$ gúla belsejében halad. Hasonló módon egyértelmű az F pont helyzete, és az E, F pontok az S_1 síkra szimmetrikusak.

Alakzatunknak tehát S_1 és S_2 szimmetriasíkja, így az E_1, F_1, illetve E_2, F_2 pontpárok is benne vannak S_2-ben, és az S_1-re nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Emiatt (1)-ben elég, ha belátjuk az $E_1E_2=E_2O$ egyenlőséget.

Az AEO, DEO szögeket a hajtogatás nem változtatta meg, így AE és DE merőleges EO-ra. *Emiatt merőleges EO-ra az AED sík és a benne levő E_1E egyenes is. Az E_1OE és E_1OO_1 háromszögek tehát derékszögűek,* E_1O átfogójuk közös, és az EO, E_1O_1 befogók egyenlők (mindkettő egyenlő az AB szakasz felével), tehát *e két háromszög egybevágó, és az E_1O szakasz felező merőlegesére szimmetrikusan helyezkedik el S_2-ben. Ezen a felező merőlegesen van* az EO, E_1O_1 befogók metszéspontja is, *az E_2 pont,* tehát valóban $E_1E_2=E_2O$.

155. Melyek azok az n egész számok, amelyekhez található olyan konvex, síklapokkal határolt test, melynek n éle van.

Megoldás

Ha $n=2k$, akkor a k oldalú gúla megfelel a feltételnek. (Természetesen $k\geqq 3$.) *Másrészt minden ilyen gúlából $2k+3$ élű testet kapunk, ha egyik háromszögű lapjára egy tetraédert illesztünk.* A keletkezett test biztosan konvex, ha a hozzáillesztett tetraéder új csúcsa a kiválasztott lap és a vele szomszédos lapok meghosszabbításai által határolt térrész belsejébe esik.

Tehát az n 6, 8, 9, 10, 11, ... értéke mellett létezik a feltételeknek megfelelő test.

Végül megmutatjuk, hogy hétélű test nem létezik. Ha ugyanis lenne ilyen test, akkor ez nem állhatna csupa háromszögű lapokból, mert ekkor éleinek a száma is osztható lenne 3-mal. Az ilyen testnek tehát lenne legalább egy négyoldalú lapja, viszont ekkor éleinek a száma legalább $\frac{4+3+3+3+3}{2}=8$ lenne.

Más megoldási lehetőség

Mutassuk meg, hogy minden olyan gúlából, melynek alapja legalább négyoldalú, készíthető olyan test, melynek eggyel több éle van.

156. Alkossunk 6-csúcsú, 5-lapú poliédert a következő feltételekkel:

a) a poliéder egyik lapja a oldalú négyzet;

b) a poliéder összes többi éle egyenlő egymással;

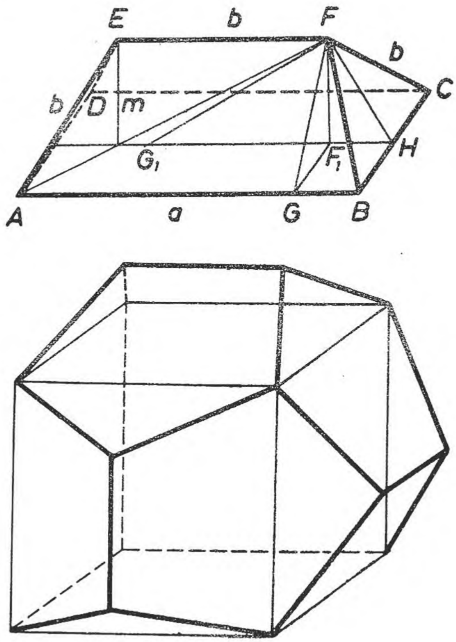
c) a négyzet két szomszédos oldalához csatlakozó két lapnak a négyzettel bezárt szöge egymást 90°-ra egészíti ki.

Bizonyítsuk be, hogy a poliéder két lapjának az átlói a hosszúságúak.

Megoldás

Legyen a leírt test négyzetlapja ABCD. A testnek van egy, ennek valamelyik oldalával, mondjuk AB-vel párhuzamos EF éle. Ennek merőleges vetülete a négyzet AB-vel párhuzamos középvonalára esik, és azon szimmetrikusan helyezkedik el.

Jelöljük az F csúcs merőleges vetületeit a négyzetlapon, a négyzet AB, illetve BC oldalán rendre F_1, G és H-val, továbbá a négyzet oldalaitól különböző élek hosszát b-vel, az FF_1 távolságot m-mel *(74/a ábra). Az FF_1 szakasz mind az F_1G-re, mind pedig az F_1H-ra merőleges. Ha tehát FF_1 körül beforgatjuk az FF_1G háromszöget az EFH síkba, akkor G a HF_1 egyenes G_1 pontjába kerül. A feladat c) feltétele szerint az FG_1H háromszög derékszögű.* Ennélfogva az m magasságra — $F_1G=\frac{a}{2}$ és $F_1H=$ $=\frac{a-b}{2}$ felhasználásával —



74. ábra

(1) $$m^2=\frac{a}{2}\cdot\frac{(a-b)}{2}.$$

Számítsuk ki az ABFE trapéz AF átlóját. Az AGF és GF_1F derékszögű háromszögekből:

$$AF^2=AG^2+GF^2=AG^2+GF_1^2+F_1F^2.$$

A már említett összefüggések felhasználásával pedig

(2) $$AF^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a(a-b)}{4}=\frac{1}{4}(3a^2+ab+b^2).$$

Másrészt, ha *Pitagorasz* tételét alkalmazzuk a GBF derékszögű háromszögre — figyelembe véve, hogy $FG^2=\frac{1}{4}(2a^2-ab)$ —, akkor $b^2=FG^2+GB^2=$ $=\frac{1}{4}(2a^2-ab)+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(3a^2-3ab+b^2)$, ahonnan

(3) $$ab+b^2=a^2.$$

Ezek alapján

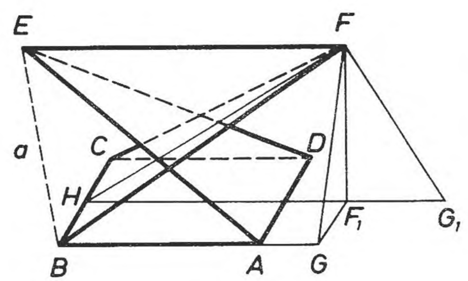
$$AF^2=\frac{1}{4}(3a^2+ab+b^2)=\frac{1}{4}4a^2=a^2,$$

tehát az AF átló (és szimmetriaokokból EB) és a $CDEF$ trapéz átlói is mind a hosszúságúak.

A feladat állítását ezzel igazoltuk.

Megjegyzés

1. Ha 6 db — a feladatban leírt — „háztetőt" a négyzetlapjukkal egybevágó lapú kockához ragasztunk a *74/b ábrán* látható módon, akkor egy szabályos dodekaédert kapunk. Ebből az észrevételből származik a feladat ([8]).



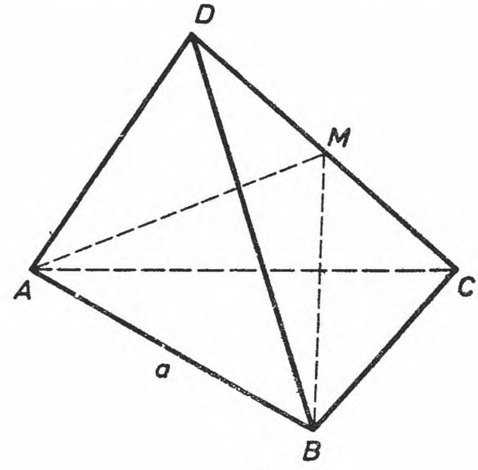
75. ábra

2. Az $ab+b^2=a^2$ egyenletből b-re két érték adódik: $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ és $-\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$. Itt a negatív gyöknek egy önmagát átmetsző test felel meg *(75. ábra)*. A két háromszöglap áthatol egymáson, a másik két oldallap pedig hurkolt trapéz lesz $\frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$ oldalhosszúsággal. Ugyanekkora az alaplappal párhuzamos él is, a trapéz átlói pedig (amelyek a hurkolt trapézon kívül húzódnak) a hosszúságúak.

157. Jelentse k az 1, 2, 3, 4, 5 számok bármelyikét. Állapítsuk meg k minden egyes értékére külön-külön annak szükséges és elegendő feltételét, hogy létezzék olyan tetraéder, amelynek k számú éle egyenként a egységnyi, a többi $(6-k)$ számú mindegyike pedig egy egységnyi hosszú, ahol $a>0$.

Megoldás

Nem lényeges a különbség olyan két eset között, amikor a tetraédernek k darab a hosszúságú, $(6-k)$ *darab* 1 *hosszúságú éle van, vagy* $6-k$ *darab a hosszúságú éle és k darab* 1 *hosszúságú éle van.* Ezért az eseteket $k=1$; $k=5$; $k=2$; $k=4$; $k=3$ sorrendben tárgyaljuk.



76. ábra

1. $k=1$

Feltehetjük, hogy AB az a hosszúságú él (76. ábra). Legyen M CD felezőpontja. Az ACD és BCD szabályos háromszögekből

$$AM=MB=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az ABM egyenlő szárú háromszög csak akkor létezhet, ha

$$AB<AM+MB,$$

azaz

(1) $$a<\sqrt{3}.$$

Ha viszont $a<\sqrt{3}$, *akkor az* $AB=a$, $AM=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}$ *oldalú ABM háromszög megszerkeszthető, s az ABM sík két partján M*-re merőlegesen $\frac{1}{2}$ távolságban *D-t és C-t felvéve, kívánt tulajdonságú ABCD tetraédert nyerünk.*

2. $k=5$

Az előző esetben 1 és a szerepét felcseréljük: $1<\sqrt{3}a$, tehát

(2) $$a>\frac{\sqrt{3}}{3}$$

szükséges és elegendő feltétel.

3. $k=2$

Két alesetet különböztetünk meg *(77. ábra).*

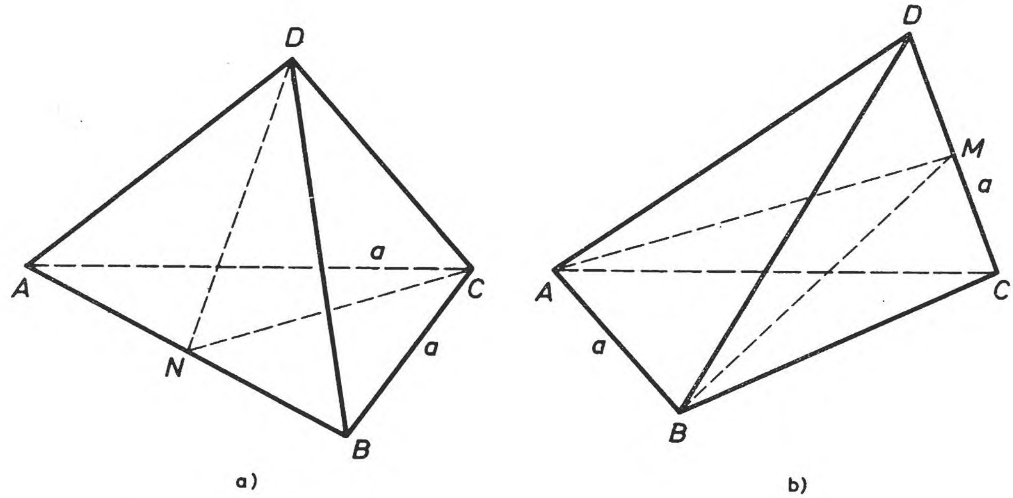
3.1 *Ha mindkét a hosszúságú él egy háromszöglapon van,* például $AC=BC=a$, ABD szabályos háromszög, és $CD=1$ *(77/a ábra).*

Az $ABC\triangle$-ből $2a>1$, $a>\frac{1}{2}$ szükséges feltétel.

Legyen N az AB él felezőpontja. *Pitagorasz*-tétellel $ND=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $NC=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$.

a-ra felső és alsó korlátot kapunk az $NCD\triangle$*-ből:* $ND+CD>NC$, azaz $1+\frac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$, ebből $a<\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Másrészről $DN+NC>CD$, azaz

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}>1, \quad \text{ebből } a>\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$



77. ábra

(Könnyen ellenőrizhető, hogy $\sqrt{2-\sqrt{3}}>1/2$.) *Tehát a-ra a következő szükséges feltételt kaptuk*

$$(3.1) \qquad \sqrt{2-\sqrt{3}}<a<\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Ha ez teljesül, akkor — sorra visszafelé következtetve — létezik a DNC háromszög és az ABCD tetraéder is, tehát a (3.1) feltétel elégséges is.

3.2 *A két a hosszúságú él a tetraéder szemköztes élei,* pl. $AB=CD=a$. Nyilván $a<2$ *(77/b ábra).*

Legyen M a CD él felezőpontja. Az $ABM\triangle$-ből $AM+MB>AB$, azaz $2\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}>a$, ebből

$$(3.2) \qquad a<\sqrt{2}$$

szükséges és elegendő feltétel is a kívánt tulajdonságú ABCD tetraéder létezéséhez.

(3.1) és (3.2) összevetéséből látható, hogy *a* $k=2$ *esetben*

$$(3) \qquad a<\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

szükséges és elégséges feltétel kívánt tulajdonságú tetraéder létezéséhez.

4. $k=4$

Az előző esetben 1 és a szerepét felcserélve kapjuk, hogy $1<a\sqrt{2+\sqrt{3}}$, azaz

$$(4) \qquad a>\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

szükséges és elegendő feltétel.

5. $k=3$.

Megmutatjuk, hogy minden a-ra ($a>0$) *létezik kívánt tulajdonságú tetraéder.*

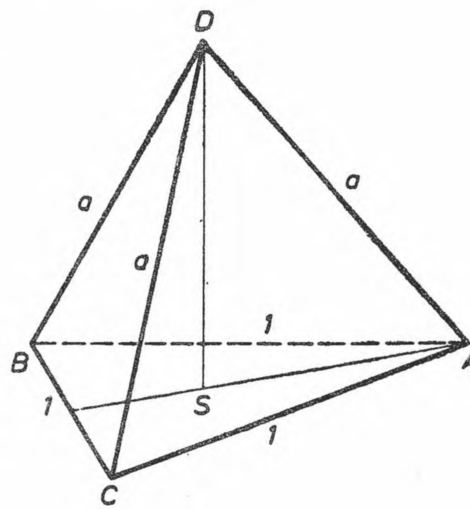
5.1 $AB=BC=CA=1$, $DA=DB=DC=a$ *(78. ábra).*

A D csúcs vetülete az ABC szabályos háromszög S középpontjába esik. Az $ASD\triangle$-ben $AD>AS$, azaz

$AS=\frac{\sqrt{3}}{3}$ miatt

$$(5.1) \qquad a>\frac{\sqrt{3}}{3}$$

szükséges feltétel, mely elégséges is.



78. ábra

5.2 $AB=BC=CA=a$, $DA=DB=DC=1$.

Az előző esetben a és 1 szerepét felcserélve a

$$(5.2) \qquad 0<a<\sqrt{3}$$

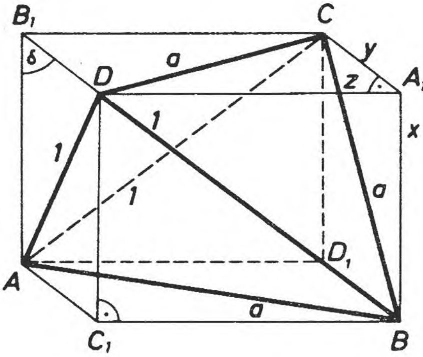
szükséges és elégséges feltételhez jutunk. (5.1) és (5.2) összevetésével a $k=3$ esetben

$$(5) \qquad a>0$$

szükséges és elegendő feltétel.

Megjegyzés

A $k=3$ *esetben a tetraéderéleknek egy másik elrendezését adja a 79. ábra, ahol a tetraédert a befoglaló paralelepipedonnal együtt ábrázoltuk. Egy ilyen tetraéder létezésének feltételét határozzuk meg az (5.3) képletben.*



79. ábra

$a = AB = CD$ ezért AC_1BD_1 és B_1DA_1C egybevágó téglalapok. $1 = BD = AC$, ezért BA_1DC_1 és D_1CB_1A egybevágó téglalapok. Az AC_1DB_1 és D_1BA_1C egybevágó paralelogrammák átlói különböznek, $\delta \neq 90°$.

Jelöljük az A-ból kifutó élek hosszát $AB_1 = x$, $AC_1 = y$, $AD_1 = z$-vel.

A paralelogramma átlóinak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegével egyenlő (43. jegyzet).

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2+1}{2}, \quad y^2 + z^2 = a^2, \quad z^2 + x^2 = 1.$$

Ebből a rendszerből x, y, z könnyen kifejezhető

$$x^2 = \frac{3-a^2}{4}, \quad y^2 = \frac{3a^2-1}{4}, \quad z^2 = \frac{a^2+1}{4}.$$

$\frac{1}{\sqrt{3}} < a < \sqrt{3}$ *szükséges feltétel a megoldhatósághoz.*

Az $ADB_1\triangle$ viszont akkor és csak akkor létezik, ha

$$-1 < \cos\delta = \frac{x^2+y^2-1}{2xy} = \frac{a^2-1}{\sqrt{(3-a^2)(3a^2-1)}} < 1,$$

azaz ha — megoldva a másodfokúra visszavezethető egyenlőtlenséget —

$$\text{(5.3)} \qquad \frac{\sqrt{5}-1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} < \sqrt{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

158. Melyek azok a konvex poliéderek, amelyeknek bármely négy nem egy síkban levő csúcsa ugyanakkora térfogatú háromoldalú gúlát határoz meg?

Megoldás

Keressük sorra a követelményeket kielégítő 4-, 5-, 6- *stb. csúcsú poliédereket.*

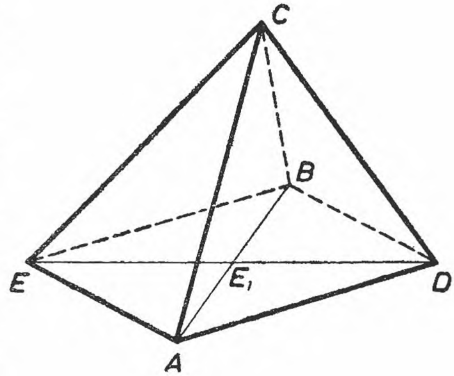
1. Négycsúcsú poliéder csak háromoldalú gúla lehet, és ez kielégíti a feltételeket.

2. *Legyen ABCDE egy a követelményeknek megfelelő ötcsúcsú poliéder,* és *A, B, C, D* ennek négy nem egy síkban levő csúcsa. *A konvexség miatt E* nem lehet az *ABCD* gúla belsejében vagy határán, ezért *a gúla valamelyik három csúcsán átmenő síknak ellenkező oldalán van, mint a negyedik csúcs.*

Legyen ez pl. az ABC sík. A DE szakasz ABC síkkal való E_1 metszéspontja felezi a DE szakaszt, mert az *ABCD* és *ABCE* gúla térfogata egyenlő, tehát *E ugyanakkora távolságra van az ABC síktól, mint D. Meghatározzuk E_1 helyzetét az ABC síkban.*

Előbb az AB élhez viszonyított helyzetét vizsgáljuk. Két esetet különböztetünk meg.

a) *Tegyük fel, hogy E_1 például az ABD síkban van (80. ábra).* Ekkor *C* nem illeszkedik erre a síkra, így az *EADC* és *EBDC* gúlák térfogatának meg kell egyeznie. Ezeknek *C*-ből közös lapjukra bocsátott magassága és *ED* éle közös, így *szükséges, hogy A és B az ED éltől egyenlő távolságra legyenek.* Az *ABCDE* konvex poliéder *EADB* négyszög lapja is konvex, ezért az *ED* átló elválasztja az *A* és *B* csúcsokat. Mivel *A*, *B* az *ED* egyenes ellenkező partján, tőle egyenlő távolságra van, ezért az *AB* és *ED* szakasz E_1 metszéspontjának feleznie kell az *AB* szakaszt. Ha az *EADB* négyszög átlói felezik egymást, akkor *EADB paralelogramma.*

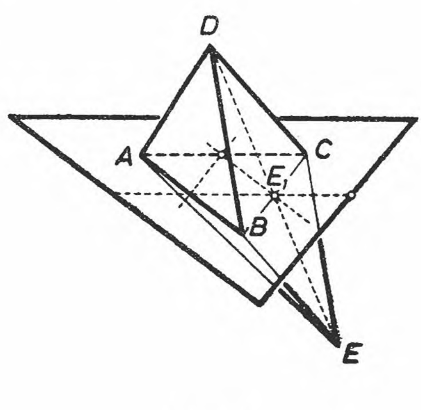


80. ábra

b) *Ha E_1 nincs az ABD síkban, akkor az ABDE és ABCD gúlák térfogatának meg kell egyeznie (81. ábra). Bontsuk fel ABDE-t az egyenlő térfogatú ABE_1D és ABE_1E gúlákra.* Ezeknek a közös lapjukra bocsátott magassága egyenlő (az *ABCD* gúla *D*-ből húzott testmagasságával), ezért az ABE_1 háromszög területe feleakkora, mint az *ABC* háromszögé.

E_1 tehát azoknak az AB-vel párhuzamos egyeneseknek egyikén van, amelyek AB-től feleakkora távolságra vannak, mint a C csúcs.

Az előbbi a) *és* b) *gondolatmenetet megismételve,* hasonlóan látható be, hogy E_1 vagy a *BC* szakasz felezési pontja, vagy annak a két, *BC*-vel párhuzamos egyenesnek egyikén van, amelyek *BC*-től feleakkora távolságra vannak, mint az *A* csúcs. Ugyancsak teljesülnie kell az *AC* oldalra vonatkozó megfelelő tételnek is *(81. ábra).*

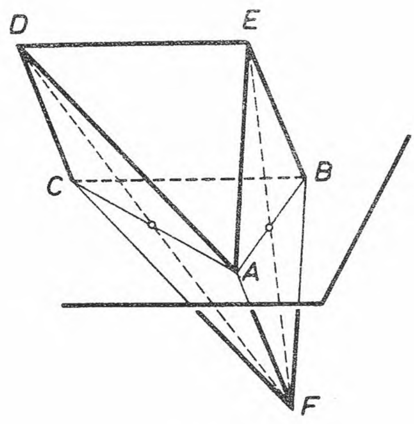


81. ábra

Mindhárom oldalra vonatkozó feltételünket E_1-ként csak az AB, BC, CA oldalak felezőpontjai elégítik ki. Ezek bármelyikére tükrözzük D-t, paralelogramma-alapú gúlát kapunk.

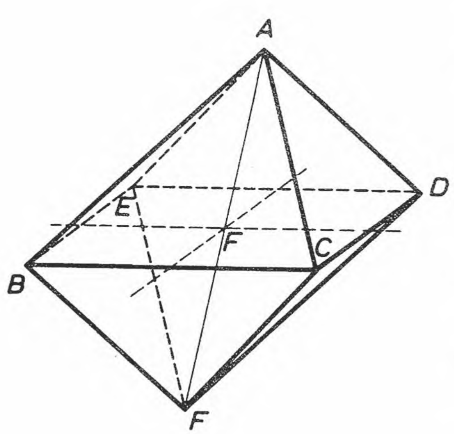
3. *Ha kiválasztjuk egy hatcsúcsú, a követelményeknek megfelelő poliéder öt nem egy síkban levő csúcsát, ezek is a követelményeknek megfelelő poliédert határoznak meg,* mert minden, a csúcsai közül kiválasztható pontnégyes az eredeti poliéder csúcsai közül is kiválasztható. *Ha tehát ABCDEF poliéder teljesíti a feltételeket, akkor ABCDE* poliéder is teljesíti azokat, vagyis *ABCDE paralelogramma-alapú gúla.*

Legyen pl. *EBCD* paralelogramma. Két eset van.



82. ábra

a) *Legyen F az ABC lap ellenkező oldalán, mint az ABCDE gúla (82. ábra). Az ötcsúcsú testnél követett meggondolást* egyrészt *az ABCD gúlára és F csúcsra,* másrészt *az ABCE gúlára és F csúcsra alkalmazva, azt nyerjük, hogy F a D csúcsból is és E-ből is az AB, BC, CA élek egyikének a felezőpontjára való tükrözéssel áll elő.* A hat tükörkép közül csak *E*-nek *AB* felezőpontjára és *D*-nek *AC* felezőpontjára vonatkozó tükörképe esik egybe, ez lehet tehát csak az *F* csúcs. *AEDCFB háromoldalú hasáb.* Ez kielégíti a követelményeket, mert hat csúcsa közül bármelyik elhagyásával a megmaradt 5 pont paralelogramma-alapú gúlát határozna meg.



83. ábra

b) *Legyen F az ABCDE gúla BCDE paralelogramma lapjának ellenkező oldalán, mint A (83. ábra). A* 2b)-*ben követett gondolatmenettel adódik, hogy az AF szakasz BCDE síkba eső felezőpontja* — jelöljük F_1-gyel — *csak a paralelogramma BC és CD oldalaival párhuzamos középvonalain, tehát azok metszéspontjában lehet. F az A csúcs F_1-re vonatkozó tükörképe.*

Az *ABCDEF* poliéder kettős paralelogramma-alapú gúla. *Ez a test valóban kielégíti a feltételeket,* mert bármely négy csúcsához további egy csúcsot választva paralelogramma-alapú gúlát kapunk.

4. *Megmutatjuk, hogy hatnál több csúcsú test nem elégíti ki a követelményeket.* Ha kielégítené, akkor minden 7-csúcsú részteste is kielégítené a követelményeket. *Elég megmutatni, hogy 7-csúcsú ilyen poliéder nincs.*

Ha létezne 7-csúcsú, a követelményeket kielégítő poliéder, akkor 6 *nem egy síkban levő csúcsa az előzők szerint egy háromoldalú hasábot vagy négyoldalú kettős gúlát határozna meg.*

Utóbbi esetben a hetedik *G* csúcs a test egy *L* lapjának ellenkező oldalán lenne, mint maga a test. De a kettős gúlának határlapja *L*-nek a test középpontjára vonatkozó *L'* tükörképe is, ami párhuzamos *L*-lel. Ekkor azonban, ha *L'*-höz egyszer *G*-t, egyszer pedig *L*-nek valamelyik csúcsát vesszük, két különböző térfogatú háromoldalú gúlát kapunk.

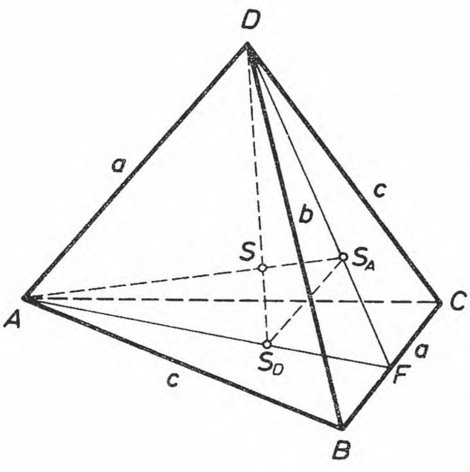
Ha 6 csúcsot kiválasztva, ezek háromoldalú hasábot határoznak meg, akkor a hetedik csúcs ismét valamelyik határlapnak ellenkező oldalán lenne, mint a hasáb többi csúcsa. Az utolsó megfontolás mintájára belátható, hogy *G* nem lehet az egyik háromszöglap ellenkező oldalán, mint a hasáb. Ha viszont *G* egy paralelogramma-lapnak van ellenkező oldalán, mint a hasáb, akkor a paralelogramma és a további két csúcs egyike, illetve másika alkotta gúlára alkalmazva a 3. pont meggondolását, azt kapjuk, hogy *G* mindkét csúcspont tükörképe lesz a paralelogramma középpontjára, de ez a két tükörkép különböző.

Azt nyertük tehát, hogy a feladat követelményeinek a háromoldalú gúlák, paralelogramma-alapú gúlák, kettős paralelogramma-alapú gúlák és a háromoldalú hasábok felelnek meg.

159. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egybevágók, akkor súlypontja és a köréje írt gömb középpontja egybeesik.

Megoldás

Induljunk ki egy $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ oldalú ABC háromszögből. Egybevágó lapokkal rendelkező ABCD tetraéderhez csak úgy juthatunk, ha a DA, DB, DC élek között a, b, c mindegyike előfordul. Mégpedig csak a $DA=a$, $DB=b$, $DC=c$ választás lehet jó, különben az oldallapok élei között *a*, *b*, *c* mindegyike nem szerepelhet *(84. ábra)*.



84. ábra

A tetraéder súlypontja — súlyvonalainak metszéspontja. A tetraéder súlyvonalán pedig az egyik csúcsát a szemben levő lapháromszög súlypontjával összekötő szakaszt értjük.

a) *Megmutatjuk, hogy minden tetraéderben a négy súlyvonal valóban egy pontban metszi egymást, és közös pontjuk mindegyik súlyvonalat — a csúcstól számítva —* 3 : 1 *arányban osztja ketté.*

b) *Továbbá bebizonyítjuk, hogy az egybevágó lapú tetraéderben a súlyvonalak egyenlők, ezért* — az előbbiek alapján — *a súlypont minden tetraédercsúcstól egyenlő távolságra van, tehát megegyezik a körülírt gömb középpontjával.*

a) Legyen a BCA és BCD lapok súlypontja S_D, illetve S_A, a közös BC él felezőpontja F. Az AS_A és DS_D súlyvonalak az ADF síkban vannak, S-ben metszik egymást, továbbá a

$$DS_A : S_AF = AS_D : S_DF = 2 : 1$$

miatt $S_AS_D \parallel AD$ és $3S_AS_D = DA$. De akkor az ADS és S_AS_DS háromszögek hasonlóságából

$$AS : SS_A = DS : SS_D = 3 : 1.$$

Ugyanígy igazolhatjuk, hogy bármelyik súlyvonal áthalad az előbbi S ponton.

b) Ha a tetraéder lapjai egybevágók, akkor például $AF = DF$, mert egymásnak megfelelő (a közös BC oldalhoz tartozó) súlyvonalak, ezért az AS_DS_AD trapéz az AD felező merőlegesére szimmetrikus, tehát $AS_A = DS_D$, $AS = SD$. Ugyanígy bizonyíthatunk a többi súlyvonalra.

Megjegyzés

1. A feladat nem kívánta meg annak bizonyítását, hogy létezik egybevágó lapokkal rendelkező tetraéder. Az *53. jegyzet*ben megmutatjuk, hogy ilyen tetraéder akkor és csak akkor létezik, ha a kiinduló

ABC háromszög hegyesszögű. A *D* csúcs ekkor az *ABC* sík kiszemelt oldalán egyértelműen van meghatározva.

Ez az észrevétel a feladat újabb megoldásához vezet.

2. Fogalmazzuk meg a feladat állításának megfordítását, és ezt bizonyítsuk be.

160. Az *SABC* tetraéderről annyit tudunk, hogy öt olyan gömb van, amelyek mindegyike érinti a tetraéder valamennyi élét, illetőleg azok meghosszabbítását. Bizonyítsuk be, hogy:

a) az *SABC* tetraéder szabályos;

b) megfordítva: bármely szabályos tetraéder esetén létezik öt olyan gömb, amely az említett tulajdonsággal rendelkezik.

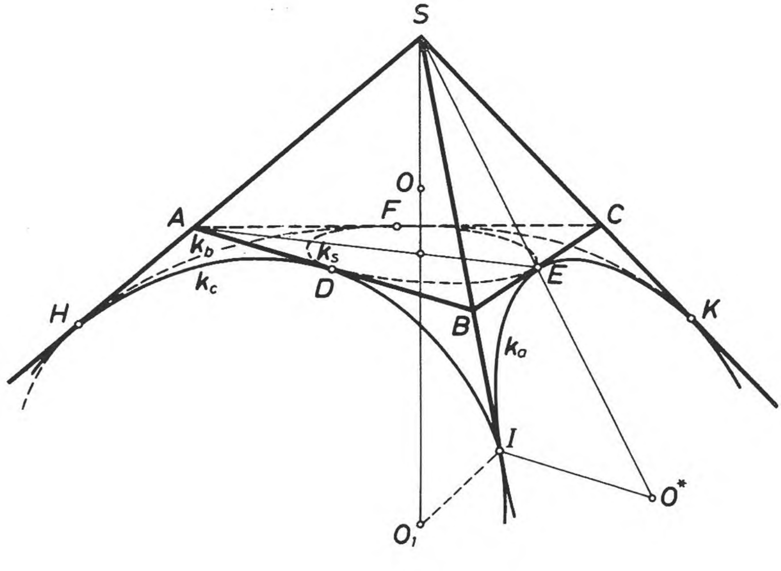
Megoldás

a) Akkor mondjuk, hogy egy t egyenes és egy G gömb érintik egymást a T pontban, ha t-nek és G-nek egyetlen közös pontja T. Bármely, a t-n átmenő S sík G-ből egy k kört metsz ki. Kivéve a T-hez tartozó gömbsugárra merőleges síkot, G-nek T-beli érintősíkját, amelynek G-vel egyetlen közös pontja T. Minden ilyen k kör és t ugyancsak érintik egymást T-ben, hiszen egy közös pontjuk van.

Legyen G_1 az $SABC=N$ tetraéder valamennyi élét érintő öt gömb egyike, legyen az érintési pont az AB, BC, CA, SA, SB, illetve SC élen rendre D, E, F, H, I, illetve K. *Legyen G_1-nek az ABC, SAB, SBC, SCA lappal való metszésvonala rendre a k_s, k_c, k_a,* illetve *k_b kör.* Ezek valóban körök, mert pl. k_s átmegy a D, E, F pontokon, ezek pedig nem eshetnek egybe, mert az AB, BC, CA egyeneseknek nincs közös pontjuk. *Így a 4 kör rendre érinti az ABC, az SAB, az SBC, illetve az SCA háromszög oldalegyeneseit, és ezért rendre azonos a megfelelő háromszögbe beírt körrel vagy valamelyik hozzáírt körrel.* Ismeretes, hogy a beírt kör mindegyik oldalegyenest az oldalszakaszon érinti (mind a három érintési pont belső), a 3 hozzáírt kör közül bármelyik az oldalegyenesek egyikét az oldalszakaszon érinti, a további kettőt pedig az oldalszakasz végpontjain túli félegyenesen (1 belső és 2 külső érintési pont).

Vegyük sorra a beírt, illetve hozzáírt körökre lehetséges eseteket.

Tegyük fel, hogy k_s az ABC háromszögbe beírt kör — vagyis D, E, F a megfelelő oldalszakaszon van —, *és legyen H az SA szakasz A-n túli meghosszabbításán (85. ábra).* Ekkor k_c az SAB háromszög AC oldalához hozzáírt külső érintő kör, ezért I az SB él B-n túli, K pedig az SC-nek C-n túli meghosszabbításán van. Tehát k_a ugyancsak hozzáírt kör, vagyis *G_1 az N lapjaiból 1 belső és 3 hozzáírt kört metsz ki.* További 3 ilyen gömb (G_2, G_3, G_4) akkor adódik,

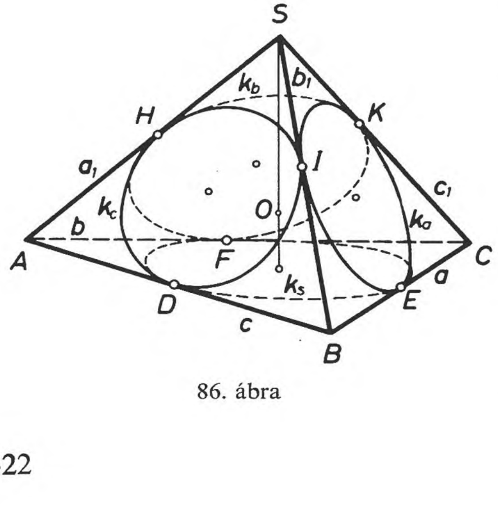


85. ábra

ha rendre a k_a-t, k_b-t, k_c-t vesszük beírt körnek, és egy további érintési pontot egy él meghosszabbításán választunk.

Ha pedig k_s ismét beírt kör, és H az SA szakasz pontja, akkor k_c és k_b is beírt kör, és így k_a is az. Ez a G_5 gömb N minden lapjából beírt kört metsz ki (86. ábra).

Nem lehet mind a négy kör hozzáírt kör, mert ha abból indulunk ki, hogy k_a az *SBC* háromszögnek pl. a *BC* oldalához hozzáírt köre *(85. ábra)*, akkor *E* a *BC* szakaszon van, *I* és *K* pedig *BC*-nek *S*-sel ellentétes oldalán, ezért k_b már csak az *AC* oldalhoz, k_c pedig csak az *AB*-hoz hozzáírt kör lehet. Viszont *F* az *AC*, *D* az *AB* szakaszon van, ezért k_s beírt kör.



86. ábra

Nincs tehát 5-nél több lehetőség az összes éleket — vagy meghosszabbításukat — érintő gömbre.

Megmutatjuk, hogy ha mind az 5 gömb létezik, akkor N összes élei egyenlők; így *N* lapjai szabályos háromszögek, és *N* szabályos tetraéder.

A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján az *N* csúcsaiba befutó 3 élegyenesen az érintési szakaszokra fennáll:

(1) $$SH=SI=SK, \quad AD=AF=AH,$$
$$BD=BE=BI, \quad CE=CF=CK.$$

Ezek alapján *bármelyik él hossza kifejezhető más három él hosszával.*

G_1-ből *(85. ábra):*

$$AB=AD+DB=AF+IB=(AC-CF)+(SI-SB)=$$
$$=AC-SB+(SK-CK)=AC-SB+SC.$$

Tehát

(2a) $$AB-SC=AC-SB,$$

és hasonlóan (AF helyett AH-val, IB helyett EB-vel kezdve)

(2b) $$AB-SC=BC-SA.$$

A (2a) és (2b) egyenlőség G_1 létezéséhez szükséges feltétel. A beírt kört tartalmazó ABC lapot alapnak, N többi lapját oldallapnak véve ezt kaptuk:

Külső élérintő gömb létezéséhez szükséges, hogy bármelyik oldalélt a szemben fekvő alapélből kivonva ugyanaz a különbség adódjék. Legyen röviden $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $SA=a_1$, $SB=b_1$, $SC=c_1$, akkor (2a) és (2b) így alakul:

(2) $$a-a_1=b-b_1=c-c_1.$$

Az SBC lapból a k_a beírt kört, a többiekből pedig egy-egy hozzáírt kört kimetsző G_2 gömb esetében az alapélek a, b_1, c_1, ezért (2) analógiájára

(3) $$a-a_1=b_1-b=c_1-c.$$

Ezt (2)-vel egybevetve, G_1 és G_2 egyidejű létezésének szükséges feltétele $b-b_1=0$, vagyis

(4) $$a=a_1, \quad b=b_1, \quad c=c_1.$$

Ha még G_3 és G_4 létezését is feltételezzük, már nem kapunk újabb feltételeket.

G_5 létezéséből (86. ábra) viszont újabb feltételek adódnak:

$$AB=AD+DB=AF+BI=(AC-CF)+(SB-SI)=$$
$$=AC+SB-(CK+KS)=AC+SB-SC,$$

tehát $AB+SC=AC+SB$, és hasonlóan adódik $AB+SC=BC+SA$. Ezeket egybefoglalva

(5) $$a+a_1=b+b_1=c+c_1.$$

De akkor (4) *és* (5) *szerint* G_1, G_2 *és* G_5 *létezéséből következik az összes élek egyenlősége, amit bizonyítani akartunk.*

b) *Legyen most N egy szabályos tetraéder.*

A köré írt gömb O középpontja minden oldaléltől egyenlő távol van, mert az SO tengely körül 120°-kal elforgatva N önmagába megy át, és így O és az SO egyenes minden pontja egyenlő távol van az a, b, c éltől, másrészt egyenlő távol van az a_1, b_1, c_1 éltől is. Mivel az AO tengely körüli 120°-os forgás is önmagába viszi át N-et, ezért O az a és b_1 éltől is egyenlő távol van, *tehát a* G_5 *belső élérintő gömb létezik, és O a középpontja (85. ábra).*

Ha találunk SO-n még egy pontot, amely a-tól és b_1*-től egyenlő távol van, az is egy kívánt gömbnek* (szükségképpen egy külső élérintő gömbnek) *a középpontja.* Az SBC háromszög BC oldalához hozzáírt k_a kör BC-t ennek E felezőpontjában érinti, SB-n levő érintési pontja legyen I, középpontja O^*. O^* az N tetraéder OSA szimmetriasíkjában van, amely merőleges az SBC lapra. Így az O^*-ban SBC-re állított merőleges metszi az SO tengelyt egy O_1 pontban. Világos, hogy O_1E az O_1-nek a-tól való távolsága, O_1I pedig O_1-nek b_1-től való távolsága, és ezek egyenlők.

O_1-hez hasonlóan az AO, BO, CO tengelyeken megkapjuk a további G_2, G_3, G_4 élérintő gömbök középpontját is. Tehát az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés

1. Láttuk, hogy G_1, G_2 és G_5 létezése, vagyis két külső és egy belső élérintő gömb már biztosítja, hogy N csak szabályos lehet. *Három külső élérintő gömb létezéséből ez nem következik:* A (4) feltétel akkor is teljesül, ha a, b, c egy nem szabályos háromszög oldalai, és a szemben fekvő oldalélek hossza rendre ugyancsak a, b, c.

Megmutatható, hogy ha a, b, c hegyesszögű háromszöget határoznak meg, akkor létezik ilyen tetraéder *(53. jegyzet)*. Ehhez létezik 4 külső élérintő gömb, ellenben nem létezik belső érintő gömb, mert (5) nem teljesül.

2. Hasonlóan nyerjük (2) és (5) egybevetéséből, hogy egy belső és egy külső élérintő gömb létezése esetén a tetraéder csak szabályos háromoldalú gúla lehet:

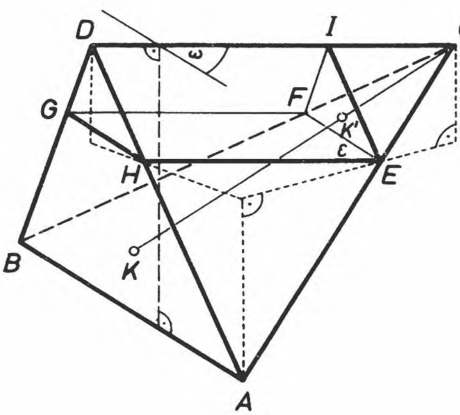
$$a=b=c \text{ és } a_1=b_1=c_1, \text{ és ez valóban megfelel.}$$

161. Az adott $ABCD$ tetraéder AB élének hosszúsága a, CD élének hosszúsága b. Az AB és CD kitérő élek egyeneseinek távolsága d, egymással bezárt (egyik) szögük ω. A tetraédert egy, az AB és CD élekkel párhuzamos ε sík két részre osztja. Mekkora e két rész térfogatának aránya, ha ismeretes, hogy az AB egyenes és az ε sík távolsága k-szorosa a CD egyenes és az ε közti távolságnak?

I. megoldás

Jelöljük a kettévágott tetraédernek az AB-t, illetve CD-t tartalmazó részét T_{AB}-vel, illetve T_{CD}-vel, térfogatukat V_{AB}-vel, illetve V_{CD}-vel. Messe ε az ABC lapot az EF, az ABD lapot a HG szakaszban *(87. ábra)*. $EFGH$ paralelogramma, mert $EF \parallel AB \parallel HG$ és $EH \parallel CD \parallel FG$.

Így EF-en át ABD síkjával párhuzamos síkot fektethetünk. Messe ez CD-t I-ben. *Az EFI háromszög T_{CD}-t a $DGHIFE=P$ hasábra és az $EFIC=T'$ tetraéderre osztja.* Térfogatuk legyen V_p, illetve V_I, az egész tetraéderé V. *A keresett arány*



87. ábra

$$q=\frac{V_{CD}}{V-V_{CD}}=\frac{V_p+V_I}{V-V_p-V_I}.$$

Célunk, hogy V_p-t és V_I-t meghatározzuk.

A feltevésből a párhuzamos szelők tétele miatt következik, hogy az $AE : CE$ arány értéke k, és $CE=\frac{CA}{k+1}$, továbbá $EF=\frac{AB}{k+1}$, és az EFI, ADB hasonló háromszögek területeinek aránya: $\frac{1}{(k+1)^2}$.

A T' és az $ABCD$ tetraéder C-ből húzott magasságainak aránya

$$CK' : CK=CE : CA=\frac{1}{k+1},$$

ezért

$$V_I=\frac{V}{(k+1)^3}.$$

Másrészt P és T' magasságainak aránya

$$K'K : CK'=EA : CE=k, \quad \text{így} \quad V_p : V_I=3k,$$

$$V_p=\frac{3kV}{(k+1)^3},$$

és végül

$$q=\frac{V(3k+1)\cdot(k+1)^3}{V[1-(3k+1)]\cdot(k+1)^3}=\frac{3k+1}{k^3+3k^2}\,.$$

Az arány megállapításához nem volt szükség az a, b, d és ω adatokra, amint ezt már előre láthattuk is *(30. jegyzet)*.

II. megoldás

A térfogatokat integrálszámítással határozzuk meg. Az előző megoldásban láttuk, hogy egy tetszőleges, CD, illetve AB-vel párhuzamos sík paralelogrammában metszi az $ABCD$ tetraédert *(87. ábra)*.

Legyen e sík távolsága a CD oldaltól x. A metszetidom területe

$$t_{EFGH}=GH\cdot GF\sin\omega=\frac{ax}{d}\cdot\frac{b(d-x)}{d}\cdot\sin\omega.$$

A térfogatokat e területfüggvény integrálásával kapjuk:

$$V_{CD}=\int_0^{x_0}\frac{ax}{d}\cdot\frac{b(d-x)}{d}\sin\omega\,dx=\left(\frac{abx_0^2}{2d}-\frac{abx_0^3}{3d^2}\right)\sin\omega.$$

Hasonlóképpen

$$V_{AB}=\left(\frac{aby_0^2}{2d}-\frac{aby_0^3}{3d^2}\right)\sin\omega.$$

Itt x_0 jelöli a CD szakasz és az ε sík távolságát, y_0 az AB és ε távolságát. Tehát

$$\frac{V_{AB}}{V_{CD}}=\frac{3dy_0^2-2y_0^3}{3dx_0^2-2x_0^3}\,.$$

Tudjuk, hogy

$$x_0=\frac{d}{k+1}\,;\quad y_0=\frac{dk}{k+1}\,.$$

Ha x_0 és y_0 értékét behelyettesítjük a hányadosba, az első megoldásban kapott eredményhez jutunk:

$$\frac{V_{AB}}{V_{CD}}=k^2\cdot\frac{(k+3)}{3k+1}\,.$$

Megjegyzés

A II. megoldásban alkalmazott módszerrel kiszámíthatjuk az $ABCD$ tetraéder térfogatát is:

$$V_{ABCD}=\int_0^d \frac{ax}{d}\cdot\frac{b(d-x)}{d}\sin\omega\,dx=\frac{1}{6}abd\sin\omega.$$

162. Adott az $ABCD$ tetraéder. A D csúcsot kössük össze az ABC lap D_1 súlypontjával. A DD_1 egyenessel az A, B, illetve C csúcson át húzott párhuzamosok a csúcsokkal szemben levő oldallapok síkját rendre az A_1, B_1, illetve C_1 pontban metszik.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéder térfogata harmadrésze az $A_1B_1C_1D_1$ tetraéder térfogatának.

b) Érvényes-e a kapott eredmény akkor is, ha a D_1 pontot tetszőlegesen vesszük fel az ABC háromszög belsejében?

I. megoldás

a) *Be fogjuk látni, hogy az $A_1B_1C_1D_1=T_1$ tetraéder $A_1B_1C_1=H_1$ lapja egybevágó, tehát egyenlő területű az $ABCD=T$ tetraéder $ABC=H$ lapjával, továbbá hogy T_1-nek D_1-ből húzott magassága 3-szor akkora, mint T-nek D-ből húzott magassága.* Ezekből az állítás már következik *(88. ábra)*.

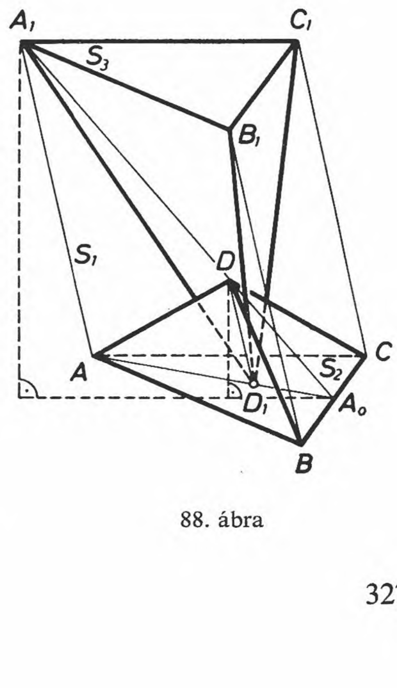
Az AA_1 és DD_1 párhuzamos egyenesekkel meghatározott S_1 sík a BC élet annak A_0 felezőpontjában metszi, mert itt metszi BC-t az AD_1 súlyvonal is. Továbbá az S_1 és a BCD lapsík A_1D metszésvonala is átmegy A_0-n.

Ezért az A_0AA_1 és A_0D_1D háromszögek hasonlók, és a súlypont harmadoló tulajdonsága alapján

$$AA_1=3D_1D.$$

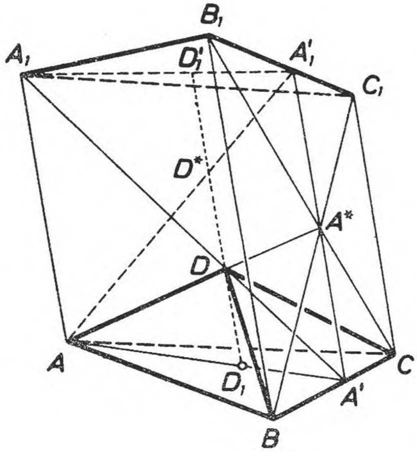
Tehát az $ABCD_1=S_2$ síktól D harmadrész akkora távolságra van, mint A_1.

Hasonlóan igazolható, hogy $BB_1=CC_1=3D_1D$. Ezek a szakaszok párhuzamosak is, emiatt az ABB_1A_1, BCC_1B_1, CAA_1C_1 négyszögek paralelogrammák. Ezért a H_1 és H háromszögek megfelelő oldalai páronként egyenlők és párhuzamosak, tehát H_1 és H egybevágók, továbbá H_1-nek S_3 síkja párhuzamos S_2-vel. Akkor pedig T_1-nek D_1-ből húzott magassága valóban 3-szor akkora, mint T-ben a D-ből húzott magasság.



88. ábra

b) *Legyen D_1 az ABC háromszög tetszés*



89. ábra

szerinti belső pontja, és D_1' a D_1D egyenes és az $A_1B_1C_1$ sík metszéspontja (89. ábra).

Vágjuk három részre a T és T_1 tetraédert az $AA_1D_1'D_1$, $BB_1D_1'D_1$, $CC_1D_1'D_1$ síkokkal, és vizsgáljuk a megfelelő tetraéderek térfogatának arányát. (Idomok térfogatát, ill. területét ugyanúgy jelöljük, mint magukat az idomokat.)

Például az ABD_1D és $A_1B_1D_1'D_1$ tetraéderek AD_1D és $A_1D_1'D_1$ lapjának síkja közös. A B-ből, illetve B_1-ből erre bocsátott magasság egyenlő, mert BB_1 párhuzamos ezzel a síkkal, ezért

$$\frac{A_1B_1D_1'D_1}{ABD_1D}=\frac{A_1D_1'D_1}{AD_1D}.$$

A két háromszög D_1D és D_1D_1' oldala egy egyenesen van, és az A-ból, illetve A_1-ből erre bocsátott magasság egyenlő, mert $AA_1 \parallel D_1D$, tehát

$$\frac{A_1B_1D_1'D_1}{ABD_1D}=\frac{D_1'D_1}{D_1D}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\frac{B_1C_1D_1'D_1}{BCD_1D}=\frac{C_1A_1D_1'D_1}{CAD_1D}=\frac{D_1'D_1}{D_1D},$$

tehát végül is

(1)
$$\frac{T_1}{T}=\frac{D_1'D_1}{D_1D}.$$

Ezzel visszavezettük a feladatot az utóbbi arány meghatározására.

Messe az $AA_1DD_1=S_1$ sík BC-t A'-ben, B_1C_1-et A_1'-ben. Ekkor $A'A_1' \parallel AA_1 \parallel$ $\parallel BB_1 \parallel CC_1$, mert a BB_1 és CC_1 párhuzamosak, és S síkjuk is párhuzamos AA_1-gyel.

Legyen AD és $A'A_1'$ metszéspontja A^*. Ez egyszersmind a BCC_1B_1 trapéz átlóinak metszéspontja, mert a BC_1 átló az S és ABD — másképpen ADC_1 — síkok metszésvonala, CB_1 pedig ugyanígy az $ADC=ADB_1$ sík metszésvonala S-sel.

Így $A'A^* = A^*A_1'$, a trapézra vonatkozó ismert tétel szerint (lásd a **206.** feladatot).

Végül tekintsük az $A'A_1'A_1A$ trapézt. Legyen DD_1 metszéspontja AA_1'-vel D^*.

Viszont $DD^* = D_1D = D^*D_1' = \frac{D_1D_1'}{3}$, mert egyrészt AA^* az $AA'A_1'$ háromszög súlyvonala, és ezért felezi az $A'A_1'$ oldallal párhuzamos D_1D^* szakaszt. Másrészt az AA_1A' és AA_1A_1' háromszögek AA_1 alapja közös, a harmadik csúcsaikat összekötő egyenes párhuzamos ezzel, ezért

$$D_1D = D^*D_1' = \frac{A'D_1}{A'A} \cdot AA_1.$$

(Ugyanis $A'A_1$ a BDC és S_1 síkok metszésvonala, tehát átmegy D-n, hasonlóan AA' átmegy D_1-en.) Eszerint a

$$\frac{T_1}{T} = \frac{D_1'D_1}{D_1D}$$

arány értéke 3.

Az ABC háromszög súlypontjából kiindulva szerkesztett alakzatra az *a)*-ban kapott eredmény érvényes az ABC háromszög belsejében tetszés szerint felvett D_1 pontból kiindulva szerkesztett alakzatra is *(30. jegyzet)*.

II. megoldás

Feladatunkat fogalmazzuk át a vektorok nyelvére, és determinánsok alkalmazásával oldjuk meg (45. jegyzet).

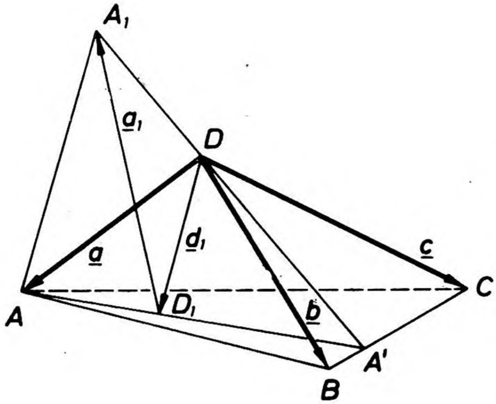
Ha a tetraéder D csúcsából az A, B, C csúcsokhoz vezető vektorokat **a**, **b**, **c** *jelöli, akkor a tetraéder előjeles térfogata*

$$V(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix},$$

ahol a determináns oszlopaiban a vektoroknak az **i**, **j**, **k** páronként merőleges egységvektorokra vonatkozó koordinátái állnak. (A determináns pozitív, ha **a**, **b**, **c** irányítása megegyezik **i**, **j**, **k** irányításával, azaz jobbrendszert alkot.)

Ezután a D_1 csúcsból A_1, B_1, C_1 csúcsokba vezető $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$ vektorokat **a**, **b**, **c**-vel fejezzük ki, majd felhasználjuk a következő tételt:

$$\text{Ha} \quad \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = x^1\mathbf{a} + x^2\mathbf{b} + x^3\mathbf{c} \\ \mathbf{b}_1 = y^1\mathbf{a} + y^2\mathbf{b} + y^3\mathbf{c}, \\ \mathbf{c}_1 = z^1\mathbf{a} + z^2\mathbf{b} + z^3\mathbf{c} \end{array} \quad \text{akkor} \quad \frac{V(\mathbf{a}_1; \mathbf{b}_1; \mathbf{c}_1)}{V(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c})} = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}.$$



90. ábra

Használjuk fel a következő segédtételt *(90. ábra)*:

Ha $\mathbf{d}_1$ jelöli a D-ből D_1-be mutató vektort, és ezt $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ segítségével $\mathbf{d}_1=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ alakban írjuk fel, akkor

(1) $\quad \alpha+\beta+\gamma=1, \quad \alpha, \beta, \gamma>0.$

Tudjuk, hogy α, β, γ a D_1 pont helyzetét kijelölő osztóviszonyokat jellemzik, pl:

$$\frac{AA'}{D_1A'}=\frac{1}{\alpha} \quad \textit{(46. jegyzet)}.$$

A párhuzamos szelők tételéből tehát $\overrightarrow{A_1A}=\frac{1}{\alpha}\,\mathbf{d}_1$, és így $\mathbf{a}_1=(\mathbf{a}-\mathbf{d}_1)-\overrightarrow{A_1A}=$

$$=-\alpha\mathbf{a}-\beta\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\mathbf{b}-\gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\mathbf{c}.$$

Hasonlóan kaphatjuk meg $\mathbf{b}_1$-et és $\mathbf{c}_1$-et is.

Segédtételünk alapján

$$(2)\qquad \frac{V(\mathbf{a}_1;\mathbf{b}_1;\mathbf{c}_1)}{V(\mathbf{a};\mathbf{b};\mathbf{c})}=\begin{vmatrix} -\alpha & -\alpha\left(1+\frac{1}{\beta}\right) & -\alpha\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) \\ -\beta\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) & -\beta & -\beta\left(1+\frac{1}{\gamma}\right) \\ -\gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) & -\gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right) & -\gamma \end{vmatrix}=D.$$

Ha a sorokat elosztjuk rendre α-, β-, γ-val, majd az oszlopokat megszorozzuk rendre α-, β-, γ-val, akkor a determináns értéke nem változik. Emeljünk ki minden sorból (-1)-et:

$$D=-\begin{vmatrix} \alpha & \beta+1 & \gamma+1 \\ \alpha+1 & \beta & \gamma+1 \\ \alpha+1 & \beta+1 & \gamma \end{vmatrix}.$$

A harmadik sorból vonjuk le a másodikat, majd a másodikból vonjuk le az elsőt:

$$D=-\begin{vmatrix}\alpha & \beta+1 & \gamma+1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}(\alpha+\beta+\gamma+2) & (\beta+\gamma+2) & \gamma+1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix},$$

ahol az utolsó lépésben a harmadik oszlopot adtuk a másodikhoz, majd az így kapott második oszlopot adtuk az elsőhöz. A főátló alatt csupa 0 szerepel, a determináns értéke a főátlóban álló elemek szorzata:

$$D=-(\alpha+\beta+\gamma+2)=-3,$$

hiszen (1) szerint $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. D negatív előjele jelzi, hogy az $\mathbf{a}_1$; $\mathbf{b}_1$; $\mathbf{c}_1$ vektorok balrendszert alkotnak.

Megjegyzés

1. A felhasznált segédtételek az *n-dimenziós affin geometriába* is átvihetők, s a determináns kiszámítása is a fentihez hasonlóan történhet. A következő eredményhez jutunk *(49. jegyzet)*:

Ha az $XX_1X_2\dots X_n$ n-dimenziós szimplex $X_1X_2\dots X_n$ $(n-1)$-dimenziós lapjának tetszőleges belső pontja X^*, s az XX^*-gal párhuzamos $X_1X_1^*, X_2X_2^*, \dots, X_nX_n^*$ szakaszok $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ pontjai az

$$XX_2X_3\dots X_n,\quad XX_1X_3\dots X_n,\quad \dots,\quad XX_1X_2\dots X_{n-1}$$

$(n-1)$-dimenziós lapokon vannak, akkor az

$$X^*X_1^*X_2^*\dots X_n^* \text{ és } XX_1X_2\dots X_n$$

szimplexek előjeles térfogataránya $-n$.

A tétel érdekes módon jellemzi a tér dimenziószámát.

2. Az is látható, hogy D_1 az ABC háromszög síkjának tetszőleges, de a háromszög oldalaira nem illeszkedő pontja is lehet, ekkor azonban $\alpha+\beta+\gamma=1$ mellett α, β, γ negatív is lehet.

7. Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték-számítások

163. Bizonyítsuk be, hogy ha egy paralelogramma benne van egy egységnyi területű háromszögben, akkor területe legfeljebb 1/2 területegység.

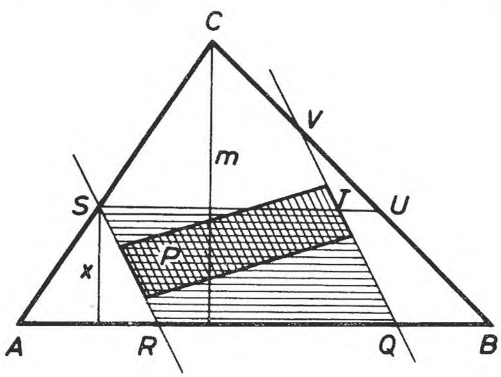
Megoldás

Ha a P_0 paralelogramma csúcsai közül három az adott H háromszög oldalainak felezőpontja, akkor negyedik csúcsa H-nak valamelyik csúcsa. Mindegyik esetben P_0 területe kétszerese a középháromszög területének, ami viszont 1/4 területegység, tehát P_0 területe 1/2 egység.

Megmutatjuk, hogy egy tetszőleges H-ban levő P paralelogrammából kiindulva, területének növelésével (nem csökkentésével) legfeljebb 1/2 *területű paralelogrammához jutunk.*

Hosszabbítsuk meg a P egyik szemben fekvő oldalpárját mindkét irányban. H kerületén 4 különböző metszéspontot kapunk, ezért van H-nak olyan oldala, amelyen két metszéspont van. Legyen ez az oldal (vagy az ilyenek egyike) AB. H ezzel szemközti csúcsa C. Az AB-n létrejött metszéspontok legyenek Q és R úgy, hogy az R-et kimetsző egyenes H-beli RS szakasza nem nagyobb a Q-t kimetsző egyenes H-beli szakaszánál *(91. ábra)*. Világos, hogy a QRS háromszög kiegészítésével kapott $QRST=P_1$ paralelogramma területe nem kisebb P területénél.

Messe ST a H kerületét másodszor U-ban, legyen C és S távolsága AB-től m, illetve x, továbbá $AB=c$. Világos, hogy $S\neq C$, különben a Q-t és R-et kimetsző egyenesek mindegyike áthaladna C-n. A CSU és CAB hasonló háromszögekből



91. ábra

$$SU=c\,\frac{m-x}{m}.$$

P_1-nek ST alapja ennél nem nagyobb, ezért P_1-nek t_1 területére fennáll:

$$t_1=ST\cdot x\leqq SU\cdot x=\frac{c}{m}\,x(m-x)=$$

$$=\frac{c}{m}\left[\frac{m^2}{4}-\left(\frac{m}{2}-x\right)^2\right]=\frac{cm}{4}-\frac{c}{m}\left(\frac{m}{2}-x\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{c}{m}\left(\frac{m}{2}-x\right)^2\leqq\frac{1}{2},$$

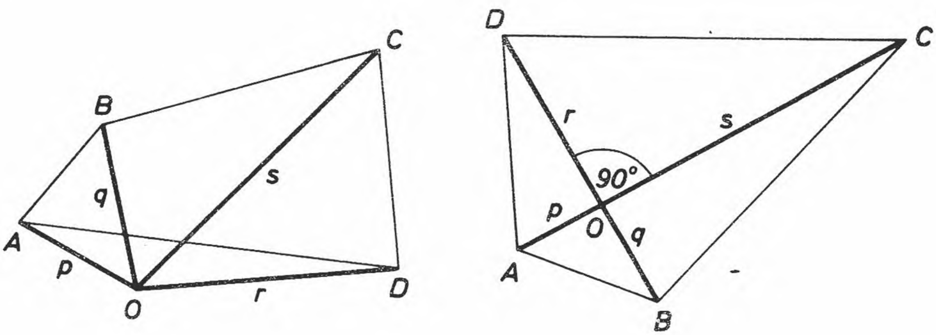
hiszen $cm/2=1$, $cm/4=\frac{1}{2}$, és ebből nem negatív mennyiséget vontunk le.

Ezért P területe sem nagyobb 1/2-nél.

164. Négy adott szakasz kezdőpontja közös. A szakaszok milyen (egy síkban való) elhelyezése esetén lesz a végpontjaikkal mint csúcsokkal meghatározott négyszög területe a legnagyobb?

Megoldás

Legyen az adott szakaszok kezdőpontja O, végpontjaik egy bizonyos helyzetben A, B, C, D. A betűzést úgy választjuk meg, hogy $ABCD$ ne hurkolt négyszöget adjon *(92. ábra)*.



92. ábra

Az $ABCD$ négyszög területe nem lehet nagyobb, mint az OAB, OBC, OCD, ODA háromszögek területének összege. Az OAB, OBC, OCD, ODA háromszögek területe külön-külön akkor a legnagyobb, ha O-ból kiinduló két oldaluk merőleges egymásra. Ez a két feltétel egyszerre teljesíthető úgy, hogy a négy háromszög O-nál levő szögeivel kitöltjük az O pont körüli 360°*-os szögtartományt.* Ekkor az $ABCD$ négyszög területe egyenlő a négy derékszögű háromszög területének összegével. A négy szakaszból 2—2 egymás meghosszabbításaba esik, és az $ABCD$ négyszög egy-egy átlóját alkotja.

Legyen a négy szakasz hossza p, q, r, s úgy, hogy $p\leqq q\leqq r\leqq s$. A szakaszok háromféle lehetséges párosítása mellett a négyszögek területeinek 2-szeresére a következő szorzatok adódnak:

$$2t_1=(p+q)(r+s),$$

$$2t_2=(p+r)(q+s),$$
$$2t_3=(p+s)(q+r).$$

Innen
$$2(t_3-t_2)=(s-r)(q-p),$$
$$2(t_3-t_1)=(r-p)(s-q).$$

Itt mindkét szorzat tényezői nem negatívak, tehát $t_3 \geqq t_2$ és $t_3 \geqq t_1$.

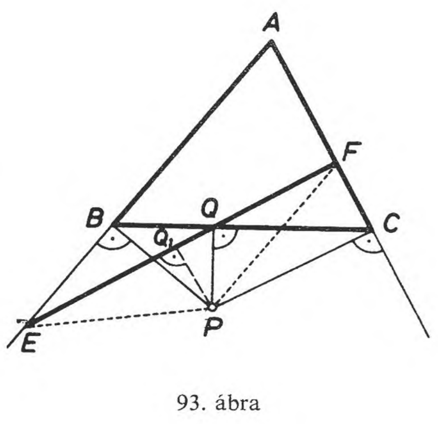
Ezek szerint p-nek s-sel — vagyis *a legrövidebb és leghosszabb szakasznak — egy átlóba állítása esetén kapunk maximális területű négyszöget.*

165. Az ABC hegyesszögű háromszög B és C csúcsában az AB, illetőleg AC oldalra emelt merőlegesek metszéspontja P. P-nek a BC szakaszon levő (merőleges) vetülete Q. Bizonyítandó, hogy a Q ponton átmenő, BC-től különböző egyeneseknek a BAC szög szárai közé eső szakasza nagyobb BC-nél.

Megoldás

Az ABC háromszög B-nél és C-nél levő szöge hegyesszög, ezért az AB-re B-ben és AC-re C-ben állított merőlegeseknek az oldalegyenesektől a háromszöget tartalmazó félsíkba induló félegyenesei BC-vel hegyesszöget zárnak be. Így Q a BC szakaszon van, és P a BC egyenes ellenkező oldalán fekszik, mint A *(93. ábra)*.

Legyen egy a Q ponton áthaladó, a BC-től különböző egyenesnek az AB-vel való metszéspontja E, AC-vel való metszéspontja F. A P-ből az EF-re húzott merőleges talppontja legyen Q_1. Tegyük fel, hogy E az AB oldal B-n túli meghosszabbításán van. (Ha nem így lenne, a betűzés megcserélésével ezt elérhetjük.) Ekkor E és P a BC egyenesnek ugyanazon az oldalán van, tehát $BEPQ$ konvex négyszög. Ennek E-nél levő szöge, mint a BEP derékszögű háromszög egyik szöge, hegyesszög, Q-nál levő szöge derékszög. Tehát az EQ átló PE-vel is, PQ-val is hegyesszöget zár be, s Q_1 *az* EQ *szakasz belső pontja.*



93. ábra

Hasonlítsuk össze a BQ *és* EQ_1, *továbbá* QC *és* Q_1F *szakaszokat.*

A BPQ és EPQ_1 derékszögű háromszögekből:

$$BQ=\sqrt{BP^2-PQ^2}; \quad EQ_1=\sqrt{EP^2-PQ_1^2}.$$

A PQQ_1 és PEB derékszögű háromszögekből

$$PQ > PQ_1 \quad \text{és} \quad EP > BP.$$

BQ kifejezésében tehát a kisebbítendő kisebb, a kivonandó nagyobb a négyzetgyökjel alatt, mint EQ_1 kifejezésében, ezért

$$(1) \qquad BQ < EQ_1.$$

A PFC derékszögű háromszögből: $PF > PC$.

$$(2) \qquad QC = \sqrt{PC^2 - PQ^2} < \sqrt{PF^2 - PQ^2} < \sqrt{PF^2 - PQ_1^2} = Q_1F.$$

Mivel Q a BC szakaszon, Q_1 az EF szakaszon van, ezért $BC = BQ + QC$ és $EF = EQ_1 + Q_1F$.

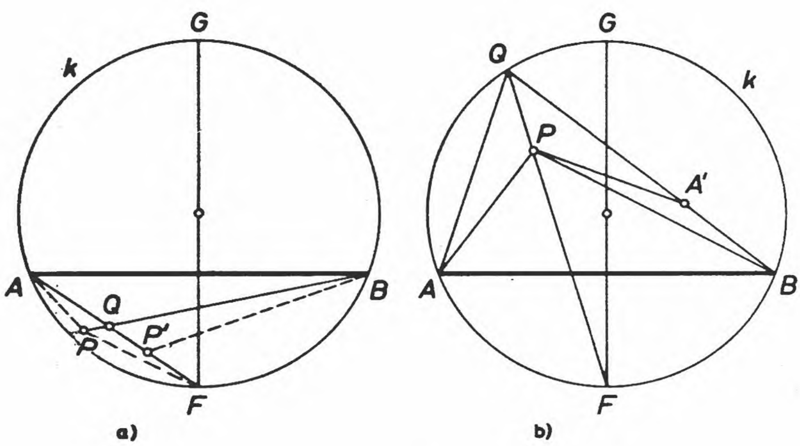
(1) és (2) összeadásával és előbbi egyenlőségeink alapján nyilvánvaló, hogy $BC < EF$. Éppen ezt akartuk igazolni.

166. Adott egy kör és a kör belsejében fekvő P pont. Tekintsük a kör egy félkörnél kisebb AB ívét, és jelöljük ennek felezőpontját F-fel. Bizonyítandó, hogy ha $PA < PB$, akkor $APF\sphericalangle > FPB\sphericalangle$.

Megoldás

Legyen G a kör F ponton átmenő átmérőjének másik végpontja. A GF átmérő az AB húr felező merőlegesén van, mert átmegy a kör középpontján, és tartalmazza az AB ív F felezőpontját.

A $PA < PB$ feltevés szerint P az AB szakasz felező merőlegesével határolt félsíkok közül az A pontot tartalmazóra illeszkedik. Ennek a félsíknak k körön



94. ábra

belüli részét a GF átmérő és az A pontot tartalmazó félkör határolja. A P pont helyzetére három esetet különböztetünk meg.

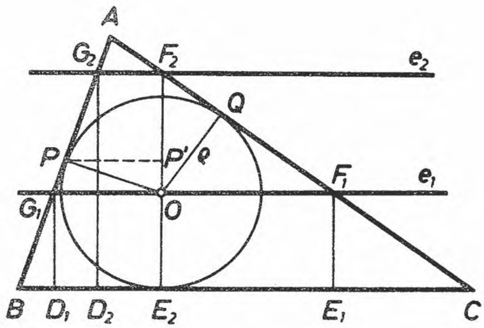
a) *Tegyük fel, hogy P az AFG szögtartományon kívül, tehát az AF húrral lemetszett kisebb körszelet belsejében van (94/a ábra).* Ekkor P és B az AF egyenes különböző partján vannak, ezért a PB szakasz metszi egy Q pontban az AF egyenest. A k körlap konvex, tehát teljes egészében tartalmazza a P és B pontokat összekötő PB szakaszt és vele a Q pontot is. Q az AF húron van. $APF\sphericalangle = APQ\sphericalangle + QPF\sphericalangle = APB\sphericalangle + BPF\sphericalangle$, amiből $APF\sphericalangle > BPF\sphericalangle$ nyilvánvaló.

b) *Tegyük fel, hogy P' az FA húr belső pontja.* $AP'F\sphericalangle = 180°$, viszont $FP'B\sphericalangle < 180°$, mert az $AP'B$ háromszög P'-nél levő külső szöge, tehát $AP'F\sphericalangle > FP'B\sphericalangle$.

c) *Tegyük fel, hogy P az AFG szögtartományban van (94/b ábra).* Legyen az FP félegyenes és a k kör F-től különböző közös pontja Q. Q is az AFG szögtartományban van, ezért $QA < QB$. Továbbá $AQF\sphericalangle = BQF\sphericalangle$, mert egyenlő íveken nyugvó kerületi szögek. De akkor az A pont QF-re vonatkozó A' tükörképe a QB szakasz belsejébe kerül, így az $A'PF$ szög — amely a tükrözés miatt az APF szöggel egyenlő — tartalmazza a BPF szöget: $BPF\sphericalangle < APF\sphericalangle$.

Az állítást P minden lehetséges helyzetére igazoltuk. Nem használtuk fel, hogy az F-ben felezett AB ív félkörnél kisebb, ezért az állítás félkörnél nagyobb AB ívekre is érvényes.

167. Hegyesszögű háromszögbe négyzetet írunk, amelynek két csúcsa az egyik oldalon, egy-egy csúcsa a további oldalakon van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet tartalmazza a háromszög beírt körének középpontját.



95. ábra

Megoldás

Az ABC hegyesszögű háromszög beírt körének középpontját O-val, sugarát ϱ-val jelöljük. Legyen a beírt kör érintési pontja a BA oldalon P, a CA oldalon Q *(95. ábra).*

Mozgassunk egy e egyenest párhuzamosan a BC oldallal BC-től A felé. Legyenek az e egyenes e_i helyzetének AB-vel és AC-vel való met-

széspontjai G_i és F_i. Bocsássunk merőlegest a G_i és F_i pontokból a BC oldalra, és a talppontokat jelöljük D_i-vel és E_i-vel. *Az így nyert $D_iE_iF_iG_i$ téglalapok között az ABC háromszög minden olyan beírt téglalapja szerepel, melynek két csúcsa a BC oldalon és egy-egy csúcsa az AB és AC oldalon van, tehát szerepel az a beírt négyzet is* (melynek D és E csúcsa a BC oldalon, G és F csúcsa az AB és AC oldalon van). Az ABC háromszög hegyesszögű, ezért D_i és E_i valóban a BC oldal belső pontja.

A BC-re merőleges oldalak növekedésével a téglalapok BC-vel párhuzamos oldalai rövidülnek.

Amíg az e és BC egyenesek távolsága nem nagyobb a beírt kör ϱ sugaránál, addig a téglalapok BC-vel párhuzamos oldalai nem kisebbek az O-n átmenő e_1 egyenes háromszögbe eső G_1F_1 szakaszánál. $G_1F_1=G_1O+OF_1$. A PG_1O és QOF_1 derékszögű háromszögekben a G_1O és OF_1 oldalak átfogók, ezért $G_1O>PO=\varrho$ és $OF_1>OQ=\varrho$. Innen $G_1F_1>2\varrho$.

Továbbmozgatva e-t, a téglalapok mindaddig tartalmazzák O-t, míg O az egyik BC-re merőleges oldalra nem kerül. Tartozzék ehhez a helyzethez az e_2 egyenes, illetve $D_2E_2F_2G_2$ téglalap, és essék O az E_2F_2 oldalra. Ekkor $OF_2>\varrho$, $E_2F_2>2\varrho$.

Viszont $G_2F_2<\varrho$. Ugyanis P közelebb van e_1-hez, mint F_2 és G_2, hiszen — ha P' jelöli P-nek az OF_2 szakaszra merőleges vetületét — $OP'<\varrho<OF_2$; emiatt $G_2F_2<PP'<\varrho$.

A további téglalapok BC-vel párhuzamos oldala — e-vel e_2-től A felé haladva — még G_2F_2-nél is kisebb.

Ezek szerint a négyzet FG oldala az e_1 és e_2 egyenesek által határolt sávon belül van.

Azok a téglalapok, melyeknek BC-vel párhuzamos oldala ezen a sávon belül van, tartalmazzák a beírt kör középpontját, így a $DEFG$ négyzet is tartalmazza azt.

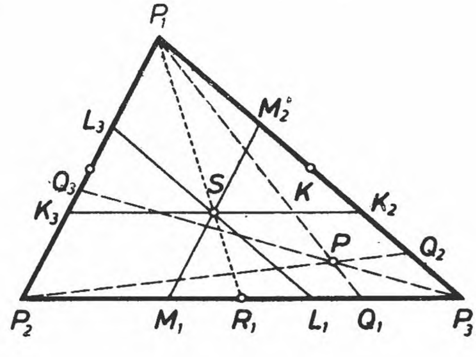
168. Legyen adva a $P_1P_2P_3$ háromszög és a belsejében egy tetszőleges P pont. A P_1P, P_2P, P_3P egyenesek metszéspontja a szemközti oldallal legyen Q_1, Q_2, illetve Q_3. Bizonyítandó, hogy a

$$\frac{P_1P}{PQ_1},\quad \frac{P_2P}{PQ_2},\quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

arányok közt van olyan, amelyik nem nagyobb, és olyan is, amelyik nem kisebb, mint 2.

I. megoldás

Vizsgáljuk meg, hol fekszenek azok a P pontok, amelyekre például $\frac{P_1P}{PQ_1}$ *éppen* 2, *annál kisebb, illetve annál nagyobb (96. ábra).*



96. ábra

Legyen $P_1P_2P_3=H$ háromszög P_2P_3 oldalának a felezőpontja R_1. A P_1R_1 súlyvonalon az S súlypontra $\frac{P_1S}{SR_1}=2$ teljesül. Húzzunk S-en át párhuzamost H-nak P_2P_3 oldalával. Legyen ennek a P_1P_2, illetve P_1P_3 oldalon levő metszéspontja K_3, illetve K_2, és a P_1Q_1 szakasznak a közös pontja K_2K_3-mal K. Ha P egybeesik K-val, akkor

$$\frac{P_1P}{PQ_1}=\frac{P_1S}{SR_1}=2.$$

Ha P a P_1K szakasz belsejében van, akkor

$$\frac{P_1P}{PQ_1}<\frac{P_1K}{KQ_1}=2,$$

mert az első tört számlálója helyére nagyobb, nevezője helyére kisebb szakaszt írunk. Végül, ha P a KQ_1 szakasz belsejében van, akkor

$$\frac{P_1P}{PQ_1}>\frac{P_1K}{KQ_1}=2,$$

mert így $P_1P>P_1K$ és $PQ_1<KQ_1$.

Megállapításainkat így is mondhatjuk:

A $\frac{P_1P}{PQ_1}$ *hányados értéke kisebb, illetve nagyobb* 2-nél *aszerint, hogy* P *a* $P_1K_2K_3=H_1$ *háromszög belsejében, illetve a* $P_2P_3K_2K_3=T_1$ *trapéz belsejében van; és a hányados 2, ha* P *a* H_1 *és* T_1 *közös* K_2K_3 *határszakaszának pontja.*

H-t az S-en átmenő, P_3P_1-gyel párhuzamos L_3L_1 szakasszal H_2 háromszögre és T_2 trapézra osztva hasonló az állítás a $\frac{P_2P}{PQ_2}$ hányadosra, továbbá az M_1M_2 szakasz által határolt H_3 és T_3-ra, valamint a $\frac{P_1P}{PQ_3}$ hányadosra.

Ezek alapján az állítás bizonyításához elég azt belátnunk, hogy H *belsejében nincs olyan* P *pont, mely* H*-nak* K_2K_3, L_3L_1 *és* M_1M_2*-vel való kettévágásai során mindhárom esetben egy trapéz belsejébe esik, és olyan* P *sincs, amely mindháromszor egy háromszög belsejébe esik.*

Valóban a T_1 és T_2 trapézok közös részének a $P_3K_2SL_1$ paralelogrammának a belseje a H_3 háromszög belsejébe esik, tehát nincs közös pontja a T_3-mal, és hasonlóan H_1 és H_2 közös részének, a K_3SL_3 háromszögnek a belseje T_3 belsejébe esik, nincs közös pontja H_3-mal. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A bizonyításból az is következik, hogy ha P nem azonos a H háromszög súlypontjával, akkor a vizsgált arányok között van 2-nél nagyobb értékű is, 2-nél kisebb értékű is. Hiszen S-et kivéve minden pont csak egy kettévágó szakaszhoz tartozhat.

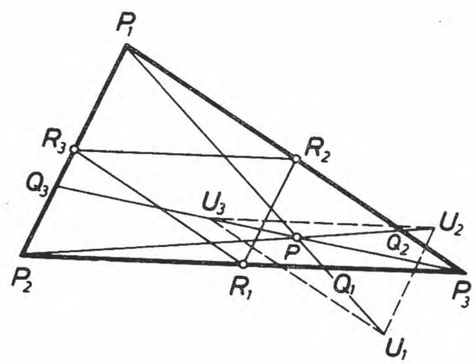
II. megoldás (Útmutatás)

Vegyük fel az U_1, U_2, U_3 pontokat úgy, hogy rendre a P_1P, P_2P, P_3P szakaszok P-n túli meghosszabbításain legyenek, és

$$\frac{P_iP}{PU_i}=2 \quad (i=1, 2, 3)$$

(97. ábra).

Elegendő megmutatni, hogy az U_1, U_2, U_3 pontok nem lehetnek mind a háromszögön kívül, és nem lehetnek mind a háromszögön belül, hiszen ez egyenértékű a feladat állításával.



97. ábra

Vegyük észre, hogy az $U_1U_2U_3$ háromszög P körüli 180°-os forgatással és P középpontú 1 : 2 arányú középpontos hasonlósággal származtatható a $P_1P_2P_3$ háromszögből. Ugyanez vonatkozik az oldalfelező pontok $R_1R_2R_3$ háromszögére, de az S súlypont a forgatási és kicsinyítési középpont. Így az $R_1R_2R_3$ és $U_1U_2U_3$ háromszögek eltolással vihetők át egymásba.

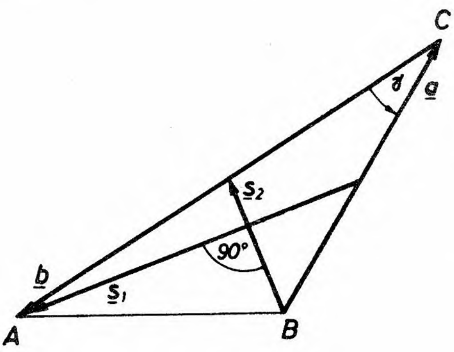
169. Az ABC háromszögben az A és a B csúcsból induló súlyvonalak merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy e háromszög C csúcsánál fekvő γ szögre

$$\cos\gamma \geqq \frac{4}{5}. \tag{1}$$

I. megoldás

A feladat meglepő egyszerűséggel oldható meg a vektorok skalárszorzatára vonatkozó elemi tételek segítségével (43. jegyzet).

169.



98. ábra

Az ABC háromszöget egyértelműen jellemzik az egymáshoz C-ben csatlakozó $BC=\mathbf{a}$ és $CA=\mathbf{b}$ vektorok *(98. ábra)*.

Ha $BC=|\mathbf{a}|=a$, $CA=|\mathbf{b}|=b$ jelöli a megfelelő vektorok abszolút értékét, és $ACB\sphericalangle=\gamma$, akkor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzata

$$\mathbf{ab}=ab\cos(180°-\gamma)=-ab\cos\gamma.$$

Az A és B csúcshoz tartozó súlyvonalakat az

$$\mathbf{s}_1=\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b},\quad \mathbf{s}_2=\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}$$

vektorokkal jellemezzük. *A feladat feltételei szerint* $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2=0$, *így*

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)\left(\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b}\right)=0.$$

Tagonként elvégezhetjük a szorzást, ekkor az

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2)-\frac{5}{4}ab\cos\gamma=0,$$

(2) $$\cos\gamma=\frac{4}{5}\cdot\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

összefüggéshez jutunk.

Az a és b is pozitív, továbbá $(a-b)^2\geqq 0$, ezért $a^2+b^2\geqq 2ab$, $\dfrac{a^2+b^2}{2ab}\geqq 1$.

Ezzel (1) helyességét bebizonyítottuk. (1)-ben egyenlőség áll fenn, ha $a=b$, a háromszög egyenlő szárú.

II. megoldás

Válasszuk a háromszög AB oldalát 2 egységnyinek, és tekintsük az AB oldalú, a feltételeknek megfelelő összes ABC háromszöget az AB egyenes egyik partján. Ezek súlypontjai AB átmérőjű s félkörön vannak, F a középpont *(99. ábra). A súlypont harmadoló tulajdonsága alapján a C pontok az s-sel koncentrikus 3 egységnyi sugarú c félkörön vannak. AB* a c félkörív C^* felezőpontjából látszik a legnagyobb szög alatt, hiszen az ABC^* körív többi pontja a c félkör belsejében van.

Ebből azonnal látszik, hogy

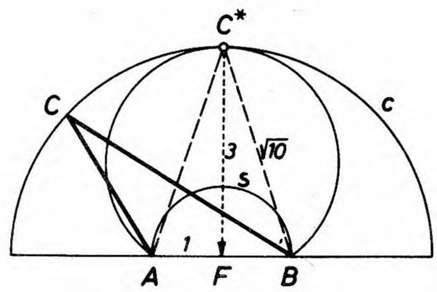
$$0<\gamma<90° \text{ és}$$

(3) $\cos\gamma \geqq \cos AC^*B\sphericalangle.$

Az AFC^* derékszögű háromszög befogói 1 és 3, átfogója $\sqrt{10}$. Tehát

$$\cos AC^*F\sphericalangle = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\sin AC^*F\sphericalangle = \frac{1}{\sqrt{10}},$$



99. ábra

és a $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ összefüggés szerint

$$\cos AC^*B\sphericalangle = \frac{9}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$

(3)-mal összehasonlítva (1)-et igazoltuk. Láthatjuk, hogy egyenlőség az ABC^* egyenlő szárú háromszögre áll fenn.

170. Bizonyítandó, hogy ha α, β és γ egy háromszög szögei, akkor

(1) $$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma < 2.$$

I. megoldás

Ha α, β, γ egy háromszög szögei, akkor $\gamma = 180° - (\alpha+\beta)$;

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &= \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \\ &= \cos\alpha + \cos\beta - \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \\ &= \cos\alpha + (1-\cos\alpha)\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \\ &= 1 - (1-\cos\alpha) + (1-\cos\alpha)\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \\ &= 1 - (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) + \sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Itt a második tag nem pozitív, mert a cosinusfüggvény nem vesz fel 1-nél nagyobb értéket, a harmadik tag 1-nél kisebb, mert egyik tényezője sem nagyobb 1-nél, de nem lehet mindkettő egyszerre 1 sem (nem lehet α is, β is 90°).

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 - (1-\cos\alpha)(1-\cos\beta) + \\ + \sin\alpha\sin\beta < 1 + \sin\alpha\sin\beta < 2.$$

II. megoldás

Bebizonyítjuk a (2) *állítást. Felhasználjuk a*

$$\cos\beta+\cos\gamma=2\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

és a $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ *összefüggést, továbbá hogy* $\frac{\alpha}{2}$ *hegyesszög, így* $\sin\frac{\alpha}{2}>0$, *valamint hogy* $\cos x\leqq$

Most következik a becslés:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1-2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\leqq$$

$$\leqq 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(1-2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Itt a második tag nem pozitív, így a bizonyítandó állításon túlmenően azt bizonyítottuk be, hogy

$$(2)\qquad \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqq\frac{3}{2}.$$

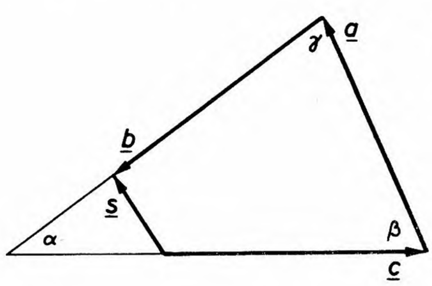
Egyenlőség akkor állhat fenn, ha $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=1$ és $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Egy háromszög szögeire ezek csak $\beta=\gamma$ és $\alpha=60°$ feltételek mellett teljesülnek. Tehát $\alpha=\beta=$ $=\gamma=60°$, a háromszög szabályos.

A (2) egyenlőtlenségben tehát szabályos háromszögre egyenlőség, más háromszögekre egyenlőtlenség teljesül *(55. jegyzet).*

III. megoldás

Meglepően szép vektoros bizonyítást is adhatunk a (2) *egyenlőtlenségre.*

Az α, β, γ szögű háromszög legkisebb oldala legyen az α-val szemben levő, egységnyi hosszúságú oldal, mérjük ezt fel a másik két oldalra is, majd vezessük be az **a**, **b**, **c** egységvektorokat és az **s** vektort a *100. ábra* szerint.



100. ábra

Felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{s}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

Skaláris szorzással — figyelembe véve, hogy $\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2=\mathbf{c}^2=1$, $\mathbf{ab}=-\cos\gamma$, $\mathbf{ac}=-\cos\beta$, $\mathbf{bc}=-\cos\alpha$ — $\mathbf{s}^2=(\mathbf{a}+$ $+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=3-2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$,

ebből pedig

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathbf{s}^2\leqq\frac{3}{2}.$$

Szabályos háromszög esetében az **s** nullvektor. A feladaton túlmenően (2) jobb és bal oldalának különbségét is meghatároztuk *(55. jegyzet)*.

171. Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

(1) $$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leqq 3abc.$$

Megoldás

Az (1) *szimmetrikus, ezért feltehető, hogy* $a\leqq b$, $a\leqq c$. *A jobb és bal oldal különbsége:*

$$\begin{aligned}&[abc-a^2(b+c-a)]+[abc-b^2(c+a-b)]+[abc-c^2(a+b-c)]=\\&=a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)=\\&=a(a-b)(a-c)+(b-c)(b^2-ab+ac-c^2)=\\&=a(b-a)(c-a)+(b-c)^2(b+c-a)\end{aligned}$$

alakra hozható. Erről látszik, hogy nem negatív, ha a, b, c tetszés szerinti nem negatív számok; 0 is csak $a=b=c$ esetben lesz. A bizonyításban nem használtuk fel, hogy a, b, c egy háromszög oldalai.

Más megoldási lehetőségek

1. Mutassuk meg, hogy bizonyítandó egyenlőtlenségünk ekvivalens az

(2) $$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\leqq 3abc$$

egyenlőtlenséggel. A zárójeles kifejezésekben a cosinustételt alkalmazva, a

(3) $$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqq\frac{3}{2}$$

egyenlőtlenség bizonyítására vezettük vissza feladatunkat. (Lásd **170.** feladat)

2. Mutassuk meg, hogy bizonyítandó egyenlőtlenségünk ekvivalens az

(4) $$(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)\leqq abc$$

egyenlőtlenséggel, majd használjuk fel az

$$a^2-(b-c)^2\leqq a^2;\quad b^2-(c-a)^2\leqq b^2;\quad c^2-(a-b)^2\leqq c^2$$

egyenlőtlenségeket.

3. Induljunk ki a

$$(b-c)^2(b+c-a)\geqq 0,\quad (c-a)^2(c+a-b)\geqq 0,\quad (a-b)^2(a+b-c)\geqq 0$$

egyenlőtlenségekből, és adjuk össze ezeket. (Itt kihasználtuk, hogy a, b, c egy háromszög oldalai.)

4. A (4) egyenlőtlenséget bebizonyíthatjuk a *Hérón*-képlet a $t=\varrho s$ és az $abc=4rt$ összefüggés alkalmazásával (r jelöli a háromszög köré írt kör sugarát, t a háromszög területét, ϱ a beírt kör sugarát.) (4) bal oldala így $\frac{8t^2}{s}=8t\varrho$, jobb oldala $4rt$. Így (4) ekvivalens a $\varrho\leqq\frac{r}{2}$ egyenlőtlenséggel, melyet geometriai módszerrel igazolhatunk *(55., 40. jegyzet)*.

172. Jelentse a, b és c valamely háromszög oldalait, S pedig ugyanennek a háromszögnek a területét. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^2+b^2+c^2\geqq 4S\cdot\sqrt{3}. \tag{1}$$

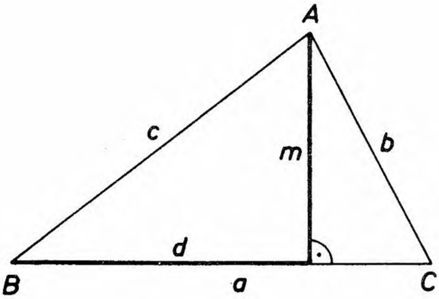
Milyen esetben áll fenn az egyenlőség?

I. megoldás

Jelöljük a háromszög a, b, c oldallal szemközti csúcsait A, B, C-vel úgy, hogy a B csúcsnál hegyesszög legyen. Az A csúcsból húzott magasság legyen m, talppontjának távolsága B-től d *(101. ábra)*.

Az a, d, m adatokkal fejezzük ki (1) *bal és jobb oldalának különbségét:*

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\cdot S=a^2+[m^2+(a-d)^2]+(m^2+d^2)-2\sqrt{3}a\cdot m=$$
$$=2a^2-2ad+2d^2-2\sqrt{3}am+2m^2=$$
$$=\frac{1}{2}(a^2-4ad+4d^2+3a^2-4\sqrt{3}am+$$
$$+4m^2)=\frac{1}{2}\left[(a-2d)^2+\left(\sqrt{3}a-2m\right)^2\right].$$

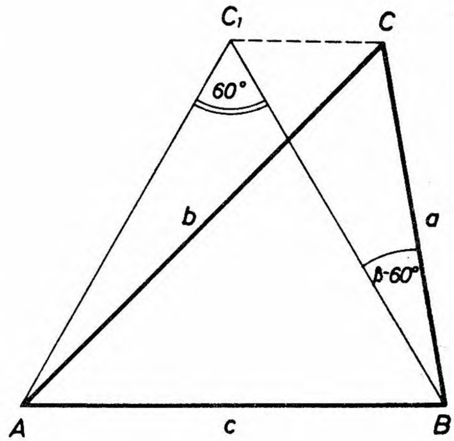


101. ábra

Ez a kifejezés nem lehet negatív, s így (1)-et igazoltuk.

Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $d=\frac{a}{2}$, tehát a há-

romszög egyenlő szárú ($b=c$), továbbá $m=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, tehát az egyenlőség szabályos háromszög esetén áll fenn.



102. ábra

II. megoldás

Rajzoljunk szabályos háromszöget az ABC háromszögnek pl. az $AB=c$ oldalára a C-t tartalmazó félsíkba (102. ábra). Legyen C_1 a szabályos háromszög harmadik csúcsa. A $CC_1=p$ szakasz szoros kapcsolatban van (1) *egyenlőtlenségünkkel. A cosinustételt pl. a CC_1B háromszögben felírva,*

$$p^2=a^2+c^2-2ac\cos(\beta-60°)=a^2+c^2-ac\left(\cos\beta+\sqrt{3}\sin\beta\right)=$$
$$=a^2+c^2-\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2)-2S\sqrt{3}=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-2S\sqrt{3}.$$

Közben alkalmaztuk az $ac\cos\beta=\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2)$ cosinustételt és az $S=\frac{1}{2}ac\sin\beta$ területképletet. Tehát

(2) $$2p^2=a^2+b^2+c^2-4S\sqrt{3}\geqq 0.$$

Az egyenlőség $p=0$ mellett áll fenn, akkor ABC szabályos háromszög.

Megjegyzés

1. *Hadwiger* és *Finsler* (1938-ból származó) egyenlőtlensége élesebb (1)-nél:

(3) $$a^2+b^2+c^2\geqq 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$$

Ez szoros kapcsolatban van több nevezetes, háromszögekre vonatkozó egyenlőtlenséggel *(55. jegyzet)*.

2. A cosinustételből könnyen levezethető az

$$a^2+b^2+c^2=4\,S(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)$$

azonosság. (1) alapján tehát

(4) $$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\geqq\sqrt{3}.$$

III. megoldás

Felhasználjuk a következő ismert tételt: Adott $a+b+c=2s$ kerületű háromszögek közül a szabályos háromszög területe a legnagyobb. Ez a maximális terület $S_{max}=\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ *(55., 24. jegyzet).*

Szabályos háromszög esetében — $a=b=c=\frac{2s}{3}=p$ jelöléssel *— a bizonyítandó (1) egyenlőtlenség két oldala egyenlő, mindkettő $\frac{4s^2}{3}$. Megmutatjuk, hogy minden más esetben a bal oldal nagyobb ennél.*

Legyen $a=p+x$, $b=p+y$; ekkor $c=p-(x+y)$. Itt x, y közül legalább az egyik 0-tól különböző. Ekkor

$$a^2+b^2+c^2=[p+x]^2+[p+y]^2+[p-(x+y)]^2=$$
$$=3p^2+x^2+y^2+(x+y)^2>3p^2=\frac{4s^2}{3}.$$

Segédtételünk szerint viszont $\frac{4s^2}{3}\geqq 4S\sqrt{3}$. Tehát

$$a^2+b^2+c^2\geqq 4S\sqrt{3}.$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzés

Általánosan igaz a következő tétel *(24. jegyzet):*

Adott 2k kerületű n-szögek közül a szabályos n-szög területe a legnagyobb. A maximum értéke $\max S_n=\frac{k^2}{n}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$. A III. megoldásban alkalmazott módszerrel igazolhatjuk a feladat következő általánosítását:

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oldalú S_n területű n-szögre $(n\geqq 3)$ fennáll az

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geqq 4S_n\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$$

egyenlőtlenség. Egyenlőség a szabályos n-szögre áll fenn.

173. Az ABC háromszög AB, BC, illetve CA oldalain vegyük fel rendre a tetszés szerinti, de csúcspontoktól különböző M, K, L pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az MAL, KBM és LCK háromszögek közül legalább az egyiknek a területe nem nagyobb az ABC háromszög területének negyedrészénél.

I. megoldás

A', B' és C' legyenek az ABC háromszög BC, CA és AB oldalainak felezőpontjai. Ha a K, L, M pontok az A', B', C' pontokkal azonosak, akkor az LAM, MBK és a KCL háromszögek területe egyaránt $\frac{1}{4}T$, ahol T az ABC háromszög területe.

Az említett háromszögek mindegyikének területe csak úgy lehet $\frac{1}{4}$ T-nél nagyobb, ha a körüljárási irányban a pontok sorrendje vagy $AC'MBA'KCB'L$, vagy *$AMC'BKA'CLB'$, ellenkező esetben biztosan van a háromszögek között $\frac{1}{4}$ T-nél kisebb területű.* Válasszuk az első (*103. ábrán* látható) sorrendet. Ekkor $AC' < AM$, $BA' < BK$ és $CB' < CL$.

Megmutatjuk, hogy az LMK háromszög területe $\frac{1}{4}$ T-nél nagyobb. Jelöljük az $A'KB'LC'M$ hatszög területét T_H-val. Ezt két különböző módon írjuk fel:

(2)
$$T_H = T_{LMK} + T_{A'KM} + T_{B'LK} + T_{C'ML} = $$
$$= T_{A'B'C'} + T_{A'KB'} + T_{B'LC'} + T_{C'MA'},$$

ahol

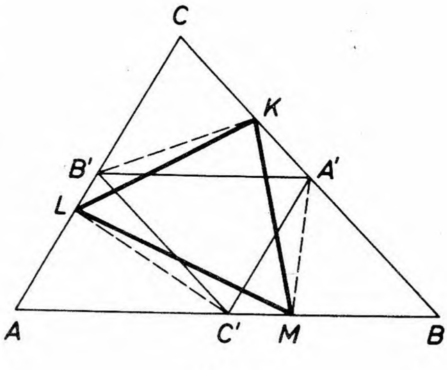
$$T_{A'B'C'} = \frac{1}{4}T.$$

Hasonlítsuk össze pl. az $A'KM$ és az $A'KB'$ háromszögek területét, ezek $A'K$ közös oldallal rendelkeznek. Tudjuk, hogy $BC \parallel B'C'$. Mivel az első háromszög magassága kisebb, mint a második háromszögé, azért $T_{A'KM} < T_{A'KB'}$, hasonlóképpen látható be, hogy $T_{B'LK} < T_{B'LC'}$ és $T_{C'ML} < T_{C'MA'}$. Ennek alapján (2)-ből következik, hogy

$$T_{LMK} > \frac{1}{4}T,$$

vagyis

(3)
$$T_{LAM} + T_{MBK} + T_{CKL} < \frac{3}{4}T.$$



103. ábra

Ez azt jelenti hogy T_{LAM}, T_{MBK}, T_{KCL} közül legalább az egyik $\frac{1}{4}$ T-nél kisebb.

Tehát vagy mind a három háromszög területe $\frac{1}{4}$ T — akkor, ha $KLM \equiv$ $\equiv A'B'C'$—, vagy legalább egy van köztük, melynek területe kisebb, mint $\frac{1}{4}T$.

II. megoldás

Szögfüggvényekkel dolgozunk. Vezessük be a következő jelöléseket *(a 104. ábra szerint):*

$$AB=c,\quad BC=a,\quad CA=b;\quad KC=k,\quad LA=l,\quad MB=m.$$

Tehát $0<k<a$, $0<l<b$, $0<m<c$, továbbá

(4) $0°<\alpha,\ \beta,\ \gamma<180°$, azaz $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma>0$.

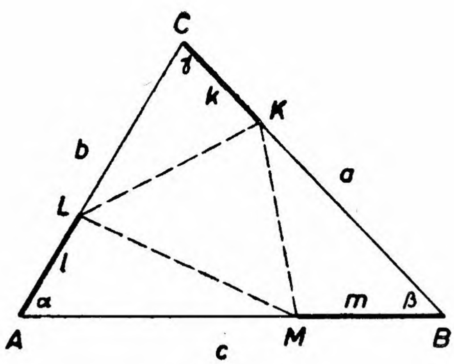
Felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$T_{LAM}=\frac{1}{2}\,l(c-m)\sin\alpha;\quad T_{MBK}=\frac{1}{2}\,m(a-k)\sin\beta;$$

(5)

$$T_{KCL}=\frac{1}{2}\,k(b-l)\sin\gamma.$$

$$T=\frac{1}{2}\,bc\sin\alpha=\frac{1}{2}\,ac\sin\beta=\frac{1}{2}\,ab\sin\gamma$$



104. ábra

és

(6) $T^3=\frac{1}{8}\,a^2b^2c^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\neq0.$

(5) és (6) alapján felírhatjuk, hogy

(7) $$\frac{T_{LAM}\cdot T_{MBK}\cdot T_{KCL}}{T^3}=$$

$$=\frac{mkl(c-m)(a-k)(b-l)}{a\,b^2c^2}.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből következik

$$0<k(a-k)\leqq\frac{a^2}{4}\,;\quad 0<l(b-l)\leqq\frac{b^2}{4}\,;\quad 0<m(c-m)\leqq\frac{c^2}{4},$$

és így

$$mkl(c-m)(a-k)(b-l)\leqq\frac{a^2b^2c^2}{4^3}. \tag{8}$$

(8) felhasználásával (7)-ből következik

$$T_{LAM}\cdot T_{MBK}\cdot T_{KCL}\leqq\left(\frac{1}{4}T\right)^3.$$

És így T_{LAM}, T_{MBK}, T_{KCL} közül valamelyik nem nagyobb, mint $\frac{1}{4}T$.

III. megoldás *(104. ábra)*

Feltehetjük, hogy $\frac{l}{b}\leqq\frac{m}{c}$, azaz — a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget is felhasználva —

$$\frac{l}{b}\cdot\frac{c-m}{c}\leqq\frac{m(c-m)}{c^2}\leqq\frac{1}{4}.$$

De akkor

$$l(c-m)\leqq\frac{1}{4}bc,\quad \left[\frac{1}{2}l(c-m)\sin\alpha\right]\leqq\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}bc\sin\alpha\right],$$

és

$$T_{LAM}\leqq\frac{1}{4}T$$

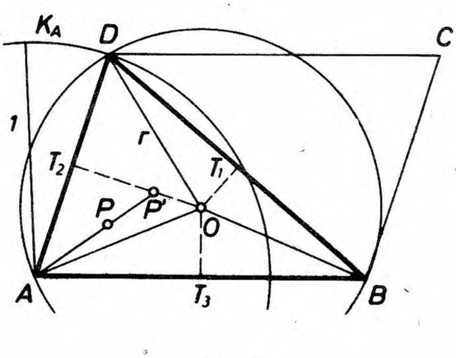
következik.

174. Legyen az $ABCD$ paralelogramma AB oldalának hossza a, AD oldaláé egységnyi, DAB szögének mérőszáma α, végül az ABD háromszög hegyesszögű. Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi sugarú K_A, K_B, K_C és K_D körlemezek, amelyeknek középpontja rendre az A, B, C, illetve D csúcs, akkor és csak akkor fedik be együtt a paralelogrammát, ha

$$a\leqq\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha.$$

I. megoldás

Elegendő, ha megvizsgáljuk, hogy a K_A, K_B, K_D egységsugarú körlemezek milyen feltételek mellett fedik be az ABD háromszöget (a paralelogramma centrálszimmetrikus alakzat) (0).



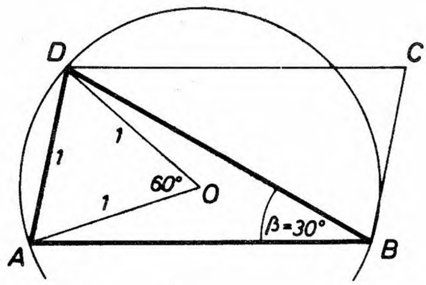
105. ábra

Mivel ABD hegyesszögű háromszög, köré írt körének O középpontja a belsejében van *(105. ábra)*.

Megmutatjuk, hogy K_A, K_B, K_D akkor és csak akkor fedik le ABD-t, ha lefedik az O pontot, azaz $r \leqq 1$. (1)

A feltétel nyilván szükséges. Megmutatjuk, hogy elégséges is. Szemeljük ki az ABD háromszöglemez tetszőleges P pontját. Ez az AT_3O, BT_3O, BT_1O, DT_1O, DT_2O, AT_2O derékszögű háromszöglemezek valamelyikén van. Legyen ez pl. AT_2O. Ekkor viszont $AP \leqq AP' \leqq AO = r \leqq 1$, tehát K_A lefedi P-t.

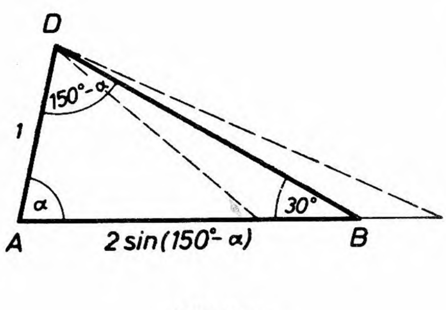
Ha $r = 1$ *(106. ábra)*, akkor AOD szabályos háromszög, az $AOD\sphericalangle = 60°$, és így az $ABD\sphericalangle = \beta$ kerületi szög 30°.



106. ábra

Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van β és r között, ha $AD = 1$ változatlan. Az r növelésével az AOD középponti szög csökken, de akkor β is csökken. Ha r csökken, az $AOD\sphericalangle$ növekszik, tehát β is növekszik. Tehát $r \leqq 1$ akkor és csak akkor, ha $\beta \geqq 30°$. (2)

Ezután rögzítsük az α hegyesszöget és $1 = AD$-t. Vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van a és β között. Ha $\beta = 30°$, akkor $BDA\sphericalangle = 150° - \alpha$, s az ABD háromszögre a sinustételt alkalmazva:



$$\frac{a}{1} = \frac{\sin(150° - \alpha)}{\sin 30°} = 2\sin(150° - \alpha)$$

107. ábra

(107. ábra).

Ha β növekszik, akkor a csökken, ha β csökken, akkor a növekszik (β hegyesszög). *Tehát $\beta \geqq 30°$, akkor és csak akkor, ha*

(3) $$a \leqq 2 \sin (150° - \alpha) = \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha.$$

A (0), (1), (2), (3) állításokat összevetve, a feladatot megoldottuk.

II. megoldás (Útmutatás)

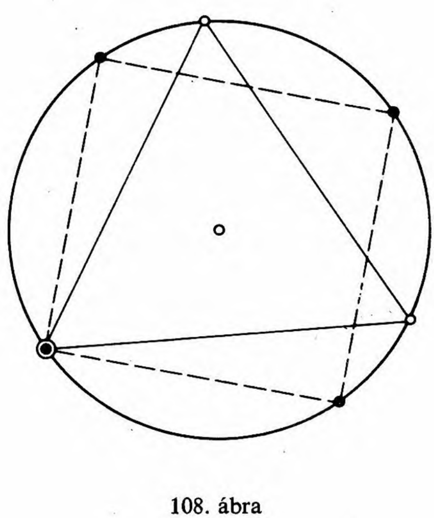
Az $AB = a$ és $AD = 1$ oldalak hosszát rögzítve változtassuk az α szöget. Az α szög és a BD oldal segítségével kifejezhetjük az ABD körül írt kör r sugarát.

175. Ugyanabba az egységsugarú körbe tetszőlegesen beírtunk egy n-oldalú és egy $n+1$ oldalú szabályos sokszöget. Bizonyítandó, hogy a kör így keletkezett ívei között van olyan, amelynek a mérőszáma nem nagyobb, mint $\frac{\pi}{n(n+1)}$.

Megoldás

Megoldásunk alapgondolata a „skatulya"-elv.

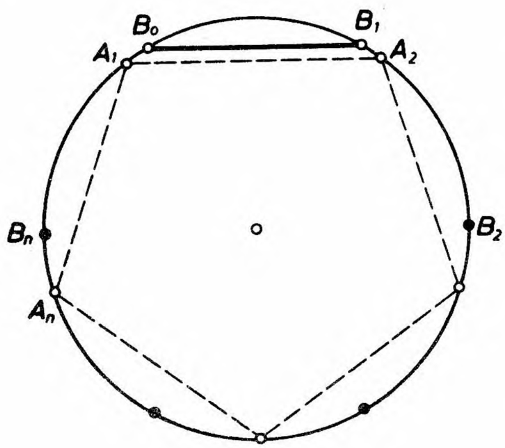
A feladat értelmezésében gondot okoz, vajon a csúcsok egybeesésekor adódó 0 hosszúságú elfajult ívet is ívnek tekintsük-e, vagy sem. Ha $n = 3$, a közös csúcsú szabályos háromszög és négyzet *108. ábra* szerinti elhelyezése mutatja, hogy a fellépő $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ hosszúságú ívek egyike sem kisebb a feladat állításában szereplő $\frac{\pi}{3 \cdot 4} = \frac{\pi}{12}$ korlátnál. Tehát az állítás csak úgy lehet igaz, ha egybeeséskor 0 hosszúságú ívről is beszélünk.



108. ábra

A körbe írt szabályos sokszögeket S_n, illetve S_{n+1}, S_n csúcsait $A_1, A_2, \ldots, A_n$; S_{n+1} csúcsait $B_0, B_1, \ldots, B_n$ jelölje egy megadott körüljárás szerint *(109. ábra)*.

Az S_n sokszög csúcsai a kört n ívre osztják (a megadott körüljárás mentén a kezdőpontot az ívhez számítjuk, a végpontot nem). *Az S_{n+1} sokszögnek*



109. ábra

van csúcsa az előbbi n ív mindegyikén, hiszen különben S_{n+1} valamelyik íve tartalmazná S_n valamelyik ívét, $\frac{2\pi}{n+1} \geqq \frac{2\pi}{n}$ viszont nem igaz.

Mivel S_{n+1} csúcsainak száma 1-gyel több, mint S_n íveinek száma, ezért S_n-nek egyetlen ívén — mondjuk $\widehat{A_1A_2}$-n — *S_{n+1}-nek két szomszédos csúcsa van,* mondjuk B_0 és B_1 *(109. ábra).*

Ekkor az A_1B_0 és B_1A_2 ívek együttes hossza

$$\widehat{A_1A_2} - \widehat{B_0B_1} = 2\pi\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2\pi}{n(n+1)},$$

tehát a mondott két ív közül az egyik biztosan nem nagyobb, mint $\frac{\pi}{n(n+1)}$.

Megjegyzés

1. Az állításnál többet bizonyítottunk be, megadtuk a kérdéses korlátnál kisebb ív helyzetét, sőt az is kiolvasható, hogy legfeljebb két ív nem nagyobb a szóban forgó korlátnál, ti. az előbbi A_0B_0, illetve A_1B_1, ha egyenlők.

2. A skatulya-elv fentihez hasonló alkalmazása érdekes számelméleti eredményekhez is elvezet *(21. jegyzet).*

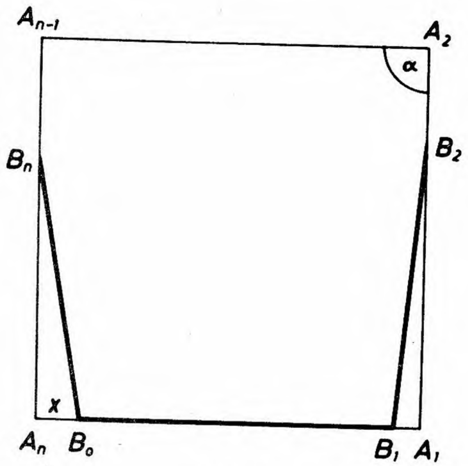
176. Jelöljön n egy 2-nél nagyobb egész számot. Egy szabályos n-szög kerületét $n+1$ ponttal egyenlő részekre osztjuk. Hogyan kell az osztópontokat megválasztani, hogy az általuk meghatározott konvex $(n+1)$-szög területe a lehető legnagyobb legyen, és hogyan ahhoz, hogy ez a terület a lehető legkisebb legyen?

Megoldás

Feltesszük, hogy az S_n szabályos n-szög oldalai egységnyi hosszúságúak. Tehát a beírt T_{n+1} $(n+1)$-szög csúcsai az n hosszúságú kerületet $\frac{n}{n+1}$ hosszúságú darabokra osztják.

A skatulya-elv értelmében az S_n valamelyik oldalán T_{n+1}-nek két csúcsa lesz. Ezt az oldalt jelöljük A_nA_1-gyel, a T_{n+1} sokszög rajta levő oldala B_0B_1. A többi

csúcs pozitív körüljárás szerint A_2, $A_3, \ldots, A_{n-1}$, illetve $B_2, B_3, \ldots, B_n$ *(110. ábra). Jelölje x az* A_nB_0 *távolságot.* Világos, hogy $B_1A_1 = 1 - \left(x + \frac{n}{n+1}\right)$, és x-re fennáll



110. ábra

$$(1) \qquad 0 \leqq x \leqq 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Célszerű a T_{n+1} sokszög területének vizsgálata helyett a levágott háromszögek $\Delta(x)$ területösszegét vizsgálni. A háromszögek területét két oldal és a közbezárt szög sinusának szorzata adja, az oldalak összege mindegyik esetben $\frac{n}{n+1}$, s így $\Delta(x)$ másodfokú függvénye lesz x-nek.

Nézzük sorban az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ csúcsnál kialakuló $B_1A_1B_2$, $B_2A_2B_3, \ldots$, $B_nA_nB_0$ háromszögek oldalait:

$$(2) \qquad B_1A_1 = 1 - \left(x + \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - x; \quad A_1B_2 = \frac{n}{n+1} - B_1A_1 = \frac{n-1}{n+1} + x;$$

$$B_2A_2 = 1 - A_1B_2 = \frac{2}{n+1} - x; \quad A_2B_3 = \frac{n}{n+1} - B_2A_2 = \frac{n-2}{n+1} + x;$$

és így tovább,

$$B_nA_n = 1 - A_{n-1}B_n = \frac{n}{n+1} - x; \quad A_nB_0 = \frac{n}{n+1} - B_nA_n = \frac{n-n}{n+1} + x = x.$$

Jelöljük α-val S_n belső szögeit: $\alpha = \pi\frac{n-2}{n}$.

A levágott háromszögek területösszege:

$$(3) \qquad \Delta(x) = \frac{1}{2}\sin\alpha\left[\left(\frac{1}{n+1} - x\right)\left(\frac{n-1}{n+1} + x\right) + \left(\frac{2}{n+1} - x\right)\left(\frac{n-2}{n+1} + x\right) + \right.$$

$$\left. + \ldots + \left(\frac{n}{n+1} - x\right)\left(\frac{n-n}{n+1} + x\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\alpha\left[-nx^2 + x\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \ldots + \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n+1} - \ldots - \frac{1}{n+1}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\sin\alpha}{2(n+1)^2}\left[1(n-1) + 2(n-2) + \ldots + (n-1)(n-(n-1)) + n(n-n)\right] =$$

$$= \frac{n}{2}\sin\alpha\left[-x^2 + \frac{1}{n+1}x + \frac{(n-1)}{6(n+1)}\right].$$

Bár a szélsőérték helyének meghatározásához nem szükséges, kiszámítottuk a konstans tagot zárt alakban. Tudniillik

$$\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\sum_{i=1}^{n} i(n-i)=\frac{1}{(n+1)^2}\left[n\sum_{i=1}^{n} i-\sum_{i=1}^{n} i^2\right]=\frac{n(n-1)}{6(n+1)}.$$

Tudjuk ugyanis, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}\,;\quad \sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Az utolsó lépésben ezeket írtuk be, és elvégeztük a lehetséges összevonásokat.

Láthatjuk, hogy a $\Delta(x)$ függvény képe „lefelé szélesedő" parabola, a szélsőértékeket pl. teljes négyzetté alakítással megállapíthatjuk:

$$\Delta(x)=\frac{n}{2}\sin\alpha\left[-\left\{\frac{1}{2(n+1)}-x\right\}^2+\frac{2n^2+1}{12(n+1)^2}\right]. \tag{4}$$

Leolvashatjuk, hogy a $0\leqq x\leqq\frac{1}{n+1}$ szakasz középpontjában

$$x=\frac{1}{2(n+1)}$$

mellett $\Delta(x)$ maximális, és

$$\max\Delta=\sin\alpha\,\frac{n(2n^2+1)}{24(n+1)^2}.$$

Ebben az esetben a B_0B_1 szakasz az A_nA_1 szakasz „közepében" helyezkedik el (az A_nA_1 oldal felező merőlegese, közös szimmetriatengelye S_n-nek és T_{n+1}-nek).

T_{n+1} területe, t_{n+1} ekkor minimális $\left(S_n \text{ területe } \frac{n}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$\min t_{n+1}=\frac{n}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha\,\frac{n(2n^2+1)}{24(n+1)^2},\quad \alpha=\pi\,\frac{n-2}{n}.$$

$\Delta(x)$ a $0\leqq x\leqq\frac{1}{n+1}$ szakasz végpontjaiban minimális, és

$$\min\Delta=\sin\alpha\,\frac{n(n-1)}{12(n+1)}.$$

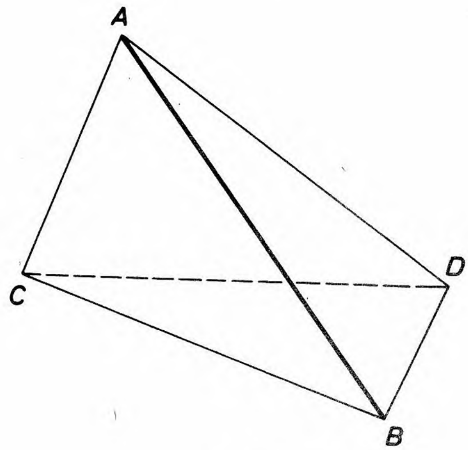
Ebben az esetben a B_0B_1 szakasz az A_nA_1 szakasz valamelyik szélén van (pl. $A_1\equiv B_1$. Az A_1-nél levő szögfelező S_n és T_{n+1} közös szimmetriatengelye).

T_{n+1} területe ekkor maximális:

$$\max t_{n+1}=\frac{n}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\sin\alpha\,\frac{n(n-1)}{12(n+1)},\quad \alpha=\pi\,\frac{n-2}{n}.$$

Ezzel feladatunkat megoldottuk.

177. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraédernek van olyan csúcspontja, amelybe futó élekkel mint oldalakkal háromszöget lehet szerkeszteni.



111. ábra

Megoldás

Három szakaszból akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha a legnagyobb szakasz kisebb a másik kettő összegénél (esetleg több leghosszabb szakasz is van). *Szemeljük ki a tetraéder egyik leghosszabb élét,* ennek végpontjai A, B, a másik két csúcs C és D *(111. ábra). Megmutatjuk, hogy az AB, AC, AD és BA, BC, BD élhármasok valamelyikéből háromszög szerkeszthető.*

Ellenkező esetben teljesülne

$$AB \geqq AC + AD, \quad BA \geqq BC + BD,$$

és a két egyenlőtlenség összeadásával

$$2AB \geqq AC + AD + BC + BD. \tag{1}$$

A tetraéder ABC és ABD lapjai viszont háromszögek, tehát fennáll

$$AB < AC + CB \quad \text{és} \quad AB < BD + DA,$$

és a két egyenlőtlenség összeadásával

$$2AB < AC + CB + BD + DA. \tag{2}$$

De (1) és (2) ellentmond egymásnak. Ezzel állításunkat igazoltuk, a tetraédernek van olyan csúcspontja — A vagy B ilyen —, amelybe befutó élekkel mint oldalakkal háromszög szerkeszthető.

Megjegyzés

A feladat meglepő egyszerűséggel mutatja be az indirekt bizonyítás lényegét. A szövegezés persze sugallja az indirekt bizonyítást, a leghosszabb oldal kitüntetése nélkül azonban nem jutnánk célhoz ilyen egyszerűen.

178. Adott egy kúp. Írjunk bele gömböt, majd e gömb köré hengert úgy, hogy annak alaplapja egybeessék a kúpéval. Jelölje V_1 a kúp, V_2 pedig a henger térfogatát.

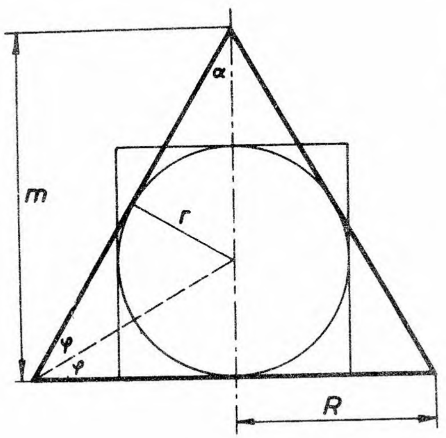
a) Bizonyítsuk be, hogy V_1 nem lehet egyenlő V_2-vel.

b) Állapítsuk meg annak a k számnak a legkisebb értékét, amelyre még fennállhat a $V_1=kV_2$ egyenlőség, és ha k ezt a minimális értéket veszi fel, szerkesszük meg azt a szöget, melyet a kúp alkotói a tengellyel bezárnak.

I. megoldás

Nem az alaplapok, hanem az alaplapok síkjának egybeeséséről van szó.

Legyen a kúp alapsugara R, magassága m, a gömb sugara r *(112. ábra)*. Így a kúp alkotója: $\sqrt{R^2+m^2}$, a henger sugara r, magassága $2r$.



112. ábra

A kúp tengelymetszete egyenlő szárú háromszög, és a gömbből így kimetszett főkör a háromszög beírt köre, tehát sugara egyenlő a háromszög területének és félkerületének hányadosával.

$$r=\frac{Rm}{R+\sqrt{R^2+m^2}},$$

innen

$$r\sqrt{R^2+m^2}=R(m-r),$$

és

$$R^2=\frac{r^2m}{m-2r}.$$

Így a kérdéses térfogatok k aránya:

$$k=V_1:V_2=\frac{\pi}{3}R^2m:2\pi r^3=$$

$$=\frac{r^2m^2}{3(m-2r)}:2r^3=\frac{m^2}{6mr-12r^2}.$$

Ebből

$$k=\frac{1}{6\frac{r}{m}-12\left(\frac{r}{m}\right)^2}.$$

Tehát k a kúp alakját meghatározó $\frac{r}{m}$ függvénye.

Ennek a függvénynek a minimumát keressük. Ezt megfogalmazhatjuk így is: Melyik az a minimális pozitív k érték, amely mellett a $12k\left(\frac{r}{m}\right)^2-6k\frac{r}{m}+1=0$ $\left(\frac{r}{m}\right)$*-ben másodfokú egyenletnek van megfelelő megoldása?*

A megoldó képlet alapján

(1) $$\frac{r}{m}=\frac{1}{12k}\left(3k\pm\sqrt{3k(3k-4)}\right).$$

Mivel k nyilván pozitív, azért valós megoldás csak $3k-4\geqq 0$, azaz $k\geqq\frac{4}{3}$ esetén van. Tehát $k=1$ lehetetlen, $V_1\neq V_2$. Ezt kellett bizonyítanunk az *a)* esetben.

A $k_{\min}=\frac{4}{3}$ esetben (1)-ből $\frac{r}{m}=\frac{1}{4}$ tehát a kúp csúcsának a gömb középpontjától való távolsága $m-r=3r$. A kívánt szöget úgy kapjuk, hogy egy tetszés szerinti r sugarú körhöz egy a középponttól $3r$-nyire levő pontból meghúzzuk az érintőket, és szögüket megfelezzük.

II. megoldás

Legyen az alkotók hajlásszöge az alaphoz $2\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{4}\right)$.

Ekkor $m=R$ tg 2φ, $r=R$ tg φ, *és így*

$$k=\frac{\pi}{3}R^3\,\mathrm{tg}\,2\varphi : 2\pi R^3\,\mathrm{tg}^3\,\varphi=\frac{\mathrm{tg}\,2\varphi}{6\,\mathrm{tg}^3\,\varphi}=$$

$$=\frac{2\mathrm{tg}\,\varphi}{6(1-\mathrm{tg}^2\,\varphi)\,\mathrm{tg}^3\,\varphi}=\frac{1}{3\,\mathrm{tg}^2\,\varphi(1-\mathrm{tg}^2\,\varphi)}.$$

k akkor a legkisebb, ha $\mathrm{tg}^2\,\varphi\,(1-\mathrm{tg}^2\,\varphi)$ *szorzat a legnagyobb.* A φ-re vonatkozó feltételeink miatt a második tényező is pozitív. A tényezők összege állandó: 1, tehát a pozitív számok számtani és mértani közepének nagyságviszonyára ismert tétel szerint a szorzat a tényezők egyenlősége esetén a legnagyobb *(24. jegyzet).*

$$\mathrm{tg}^2\,\varphi=1-\mathrm{tg}^2\,\varphi\text{-ből}\quad \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{tg}\,2\varphi=\frac{4}{\sqrt{2}}.$$

Innen a keresett α fél nyílásszöge: $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\frac{1}{8}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$; α bármelyikből egyszerűen szerkeszthető.

Megjegyzés

1. A gömböt (és vele a hengert is) állandónak véve, meghatározhatjuk a gömb köré írt minimális térfogatú forgáskúpot. Legyen $r=1$, ekkor $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{R}$, $m=R$. $\operatorname{tg}2\varphi=2\frac{R^2}{R^2-1}$, és így

$$V_1=\frac{2\pi R^4}{3(R^2-1)},\quad \text{amiből } R^2=\frac{1}{4\pi}\left[3V_1\pm\sqrt{3V_1(3V_1-8\pi)}\right].$$

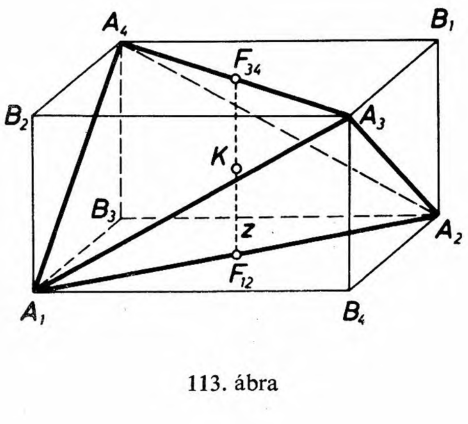
Tehát $V_1\geqq\frac{8\pi}{3}$, $V_{\min}=\frac{8\pi}{3}$. Másrészt $V_2=2\pi$, tehát $K_{\min}=\frac{4}{3}$.

2. A gömb térfogata $V=\frac{2}{3}V_2$, azért a $\frac{V_1}{V}=\frac{3k}{2}$ arány legkisebb értéke 2. *Eszerint a kúpba írt gömb térfogata legfeljebb fele lehet a kúp térfogatának.* A fenti szerkesztéssel éppen a maximumot adó fél nyílásszöget adtuk meg.

179. Bizonyítsuk be, hogy egy szabályos tetraéder köré írt gömb középpontja és a csúcsok közti távolságok összege kisebb, mint a tér bármely más pontjából a tetraéder csúcspontjaiba vezető távolságok összege.

I. megoldás

Egy téglatest csúcsai közül válasszunk ki négyet úgy, hogy azok közül semelyik kettő se legyen szomszédos. Így egy speciális tetraéder csúcsait ragadtuk ki, egy ún. *egyenlő oldalú tetraéderét.* (Ennek lapjai egybevágó háromszögek) *(53. jegyzet). Abban az esetben, ha a téglatest kocka, akkor az így származtatott tetraéder éppen egy szabályos tetraéder. Minden szabályos tetraéder kockából származtatható (113. ábra).*

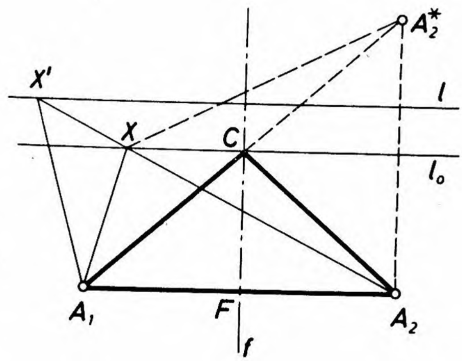


113. ábra

Ez az előzetes megjegyzés lehetővé teszi, hogy feladatunk állítását az egyenlő oldalú tetraéderre mondjuk ki, és ezt az általános tételt bizonyítsuk be.

A bizonyítást segédtételekkel készítjük elő.

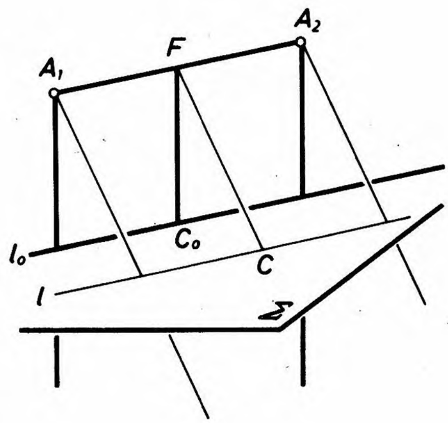
(1) Ha $A_1A_2 \parallel l_0 \parallel l$, akkor — feltéve, hogy az l_0 egyenes közelebb esik az A_1A_2 egyeneshez, mint az l egyenes — az l_0 és l egyenesek összes pontjait tekintve, azok A_1 és A_2-től való távolságösszege, XA_1+XA_2 az l_0 egyenesen veszi fel minimumát, mégpedig C-ben, ahol l_0-t az A_1A_2 szakasz felező merőlegese metszi, *(114. ábra)*.



114. ábra

Ez a változó $A_1XA_2^*$ töröttvonal segítségével belátható, ha A_2^* az A_2 pont l_0-ra való tükörképét jelenti.

(2) Ha l szerepét Σ sík veszi át, tehát $A_1A_2 \parallel \Sigma$, akkor — a *115. ábra* és a *114. ábra* egybevetéséből világos — a Σ sík C_0 pontjában lesz az A_1 és A_2-től vett távolság a minimális. Ez a pont nem más, mint az A_1A_2 szakasz felezőpontjának, F-nek Σ-ra eső merőleges vetülete: C_0.



115. ábra

(3) Tekintsük a téglatestből származtatott tetraéder — mondjuk — A_1A_2 és A_3A_4 éleit. Egy a mondott két éllel párhuzamos sík, Σ messe a téglatestet az $S_1S_3S_2S_4$ téglalapban *(116. ábra)*. Legyen X a Σ sík tetszőleges pontja. Határozzuk meg a síkon azt a helyet, ahol az

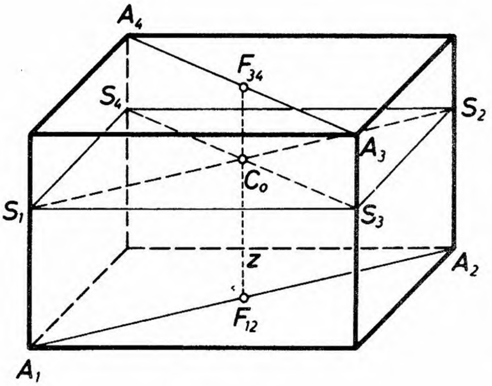
$$XA_1+XA_2+XA_3+XA_4$$

távolságösszeg felveszi a minimumát.

A (2)-ben mondottakat egyszer az A_1A_2 és Σ-ra, egyszer az A_3A_4 és Σ-ra alkalmazva — és feltéve, hogy $C_0 \neq X$ —, világos, hogy

$$C_0A_1+C_0A_2<XA_1+XA_2 \quad \text{és} \quad C_0A_3+C_0A_4<XA_3+XA_4,$$

tehát



116. ábra

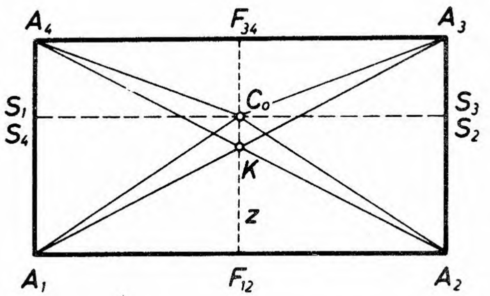
$$C_0A_1+C_0A_2+C_0A_3+C_0A_4<$$
$$<XA_1+XA_2+XA_3+XA_4,$$

ahol C_0 az a pont, melyben az F_{12} és F_{34} lapközéppontokat összekötő z egyenes a Σ síkot metszi. *Következésképpen a minimális távolságösszegnek megfelelő pont: a z laptengely és a Σ sík közös pontja.*

(4) *Végül a tér ama X pontját keressük, melyben az*

$$XA_1+XA_2+XA_3+XA_4$$

távolságösszeg minimális. Evégből a (3)-ban a *116. ábrá*ról mondottakat használjuk fel.



117. ábra

Tekintsük az $A_1A_2S_2S_1$ és $A_3A_4S_4S_3$ téglalapokat, továbbá az általuk kifeszített síkok metszésvonalát, a z egyenest. E metszésvonal körül a két sík egymásra forgatható és előáll a *117. ábrán* látható alakzat. (Az $A_1A_2A_3A_4$ téglalap magassága a téglatest magassága, alapja a téglatest egy lapátlójának a hosszával egyenlő.) Ebből az ábrából már nyilvánvaló, hogy a Σ-val párhuzamos síkok mindegyikéhez más-más távolságösszeg-minimum tartozik, s a *legkisebb minimum* akkor lép fel, ha $C_0=K$. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk, hiszen a tetraéder köré írt gömb középpontja a téglatest középpontja.

Megjegyzés

A tetraéder csúcsainak a tér egy pontjától való távolságait tekintve, fölvethetjük a következő két szélsőérték-feladatot.

1. *Melyik az a pont, melyben e távolságok négyzetösszege,*
2. *melyben e távolságok összege a legkisebb?*

Az 1.-re felelet: a tetraéder súlypontja.

A 2.-nak megfelelő pontnak nincs külön neve.

Láttuk, hogy egyenlő oldalú tetraéder esetében e két extremális pont egybeesik. Szép feladat — de azzal itt már nem foglalkozunk —, hogy mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a két extremális pont egybeessék.

II. megoldás

Fektessünk az $ABCD=T$ szabályos tetraéder minden egyes csúcsán át párhuzamos segédsíkot a szemben fekvő lappal, és legyen a tetszés szerinti P pontnak ezektől való távolsága rendre t_a, t_b, t_c, t_d. *Egy pont egy sík bármely pontjától legalább olyan távol van, mint a síktól, ezért $PA \geqq t_a, \ldots, PD \geqq t_d$. Egyenlőség mindenütt akkor és csak akkor teljesül, ha P rajta van azon a merőlegesen, amelyet az illető csúcsban állítunk a rajta felvett segédsíkra;* azaz pl. $PA=t_a$ akkor és csak akkor igaz, ha PA merőleges a BCD lap síkjára, vagyis P rajta van T-nek A-ból húzott magasságvonalán. Tehát

$$PA+PB+PC+PD \geqq t_a+t_b+t_c+t_d. \tag{1}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha P rajta van T-nek mind a négy magasságvonalán, vagyis azonos T-nek O középpontjával, hiszen szabályos tetraéder magasságvonalai — mint forgatási szimmetriatengelyek — átmennek az O-n.

A négy segédsík egy újabb $A_1B_1C_1D_1=T_1$ szabályos tetraédert határoz meg, mert pl. az A-n át felvett segédsík a BCD sík 3-szorosára nagyított képe — O-ból mint hasonlósági középpontból — úgy, hogy a megfelelő pontokat O elválasztja egymástól. Valóban, O T-nek mindegyik magasságát $1:3$ arányban osztja, mert a magasságvonalak egyben súlyvonalak, és az O súlypont is. Ismert az a tétel, hogy a tetraéder súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ez a pont mindegyik súlyvonalat $1:3$ arányban osztja (ahol 1 rész a lap felé, 3 rész a csúcs felé esik) *(**159.** feladat).*

Legyen egyelőre P a T_1-nek belső vagy felületi pontja, ekkor alkalmazhatjuk a következő segédtételt, melyet később bizonyítunk.

Segédtétel: *A szabályos tetraéder tetszés szerinti belső vagy felületi pontjára nézve a négy laptól mért távolság összege állandó; egyenlő a tetraéder m magasságával.*

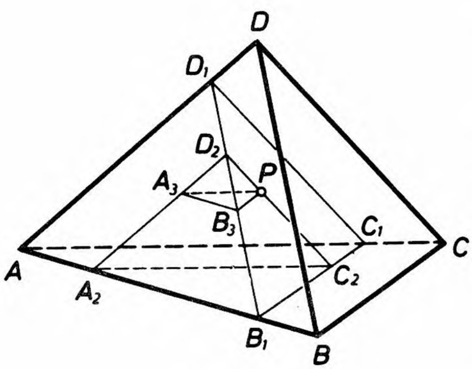
O-nak T_1 lapjain levő vetülete — az előbbiek miatt — rendre az A, B, C, D csúcs, eszerint (1) jobb oldala egyenlő T_1 magasságával, $m_1=OA+OB+OC+$ $+OD$-vel, tehát (1) éppen a feladat állítását fejezi ki. Segédtételünk a T_1-en

kívüli P pontokra is érvényes, ha negatívnak vesszük mindazoktól a lapsíkoktól mért távolságokat, melyek a pontot elválasztják T_1 negyedik csúcsától. Állításunkban viszont a távolságok abszolút értéke szerepel. Ezt írva a negatívnak vett távolságok helyére, az összeg növekszik, nagyobb lesz m_1-nél, tehát

$$PA+PB+PC+PD>m_1$$

mindig fennáll.

A segédtétel bizonyítása (118. ábra):



118. ábra

Legyen az $ABCD$ tetraédernek a P-n átmenő, a BCD lappal párhuzamos metszete $B_1C_1D_1$, az $AB_1C_1D_1$ tetraéder ACD-vel párhuzamos metszete P-n át $A_2C_2D_2$ és az $A_2C_2D_2B_1$ tetraéder $A_2B_1C_2$-vel párhuzamos metszete P-n át A_3B_3P. Mivel $PD_2 \parallel CD$, P és D_2 egyenlő távol van az ACD és BCD lapoktól. D_2 az $A_3B_3PD_2$ tetraéder magasságával van távolabb az ABC laptól, mint P. P viszont ugyanennyivel van az ABD laptól távolabb, mint D_2. Így D_2-nek a tetraéder lapjaitól mért távolságösszege ugyanannyi, mint P távolságösszege. De D_2 most már az ABD lapon van.

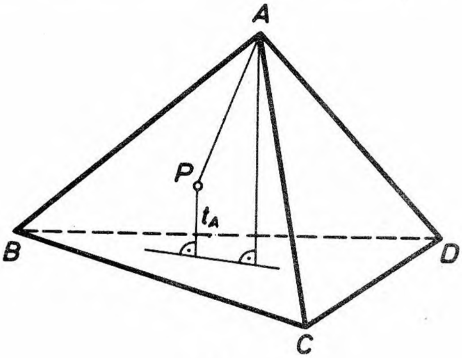
Hasonlóan látható, hogy a távolságösszeg nem változik, ha D_2-ről B_1-re, majd B_1-ről A-ra térünk át. Előbb az $A_2B_2C_2D_2$, majd az $AB_1D_1C_1$ tetraéder játssza az előbbi szerepet $A_3B_3PD_2$ helyett. A-nak viszont 3 laptól mért távolsága zérus, a negyediktől mért távolsága pedig a tetraéder magassága. Ezzel segédtételünket bebizonyítottuk. Hasonlóképpen előjeles távolságokkal látható be, hogy a segédtétel a tetraéderen kívül levő pontra is érvényes.

III. megoldás

Felhasználjuk az előző megoldás segédtételét, amely szerint a P pontnak a BCD, ACD, ABD, ABC lapoktól mért (előjeles) t_A, t_B, t_C, t_D *távolságainak összege független a P pont helyzetétől (119. ábra).*

Adjuk ezeket a távolságokat a csúcsoktól mért távolságok összegéhez, akkor a módosított összeg ugyanakkor lesz a legkisebb, mint az eredeti. De $AP+t_A$ nagyobb, mint a tetraéder m magassága, kivéve, ha P a magasságvonalon van, amikor

$$AP+t_A=m.$$



119. ábra

Hasonló érvényes a $PB+t_B, PC+t_C, PD+t_D$ összegekre. A teljes összeg tehát minden más pontra nagyobb, mint a magasságok metszéspontjára, de ez azonos az O középponttal.

Megjegyzés

1. Mutassuk meg, hogy ha P a tetraéderen kívüli pont, akkor mindig megadható olyan T-beli pont, melyre nézve a távolságösszeg kisebb, mint P-re nézve. Így nincs szükség arra, hogy a segédtételt külső pontokra is bizonyítsuk.

2. A segédtétel vektorok segítségével messzemenően általánosítható *(48. jegyzet)*.

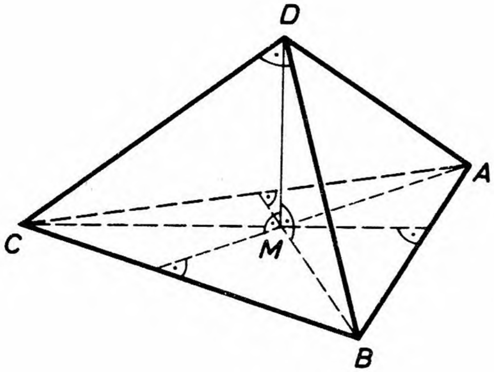
180. Az $ABCD$ tetraéderben a BDC szög derékszög. A D csúcsból az ABC síkra bocsátott merőleges talppontja egybeesik az ABC háromszög magasságpontjával. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

(1) $$(AB+BC+CA)^2 \leqq 6(AD^2+BD^2+CD^2).$$

Mely tetraéderek esetén érvényes itt az egyenlőségjel?

Megoldás

Érezzük, hogy az M magasságpontban az ABC háromszög síkjára állított merőlegesen a D pont helyzetét egyértelműen meghatározza az a feltétel, hogy a BDC szög derékszög. Olyan tetraédert kapunk, mint amikor a kocka egyik csúcsát egy síkkal levágjuk. Bebizonyítjuk, hogy az AD él merőleges a BCD síkra. Ehhez elegendő belátni, hogy $CD \perp AD$ (hiszen ugyanúgy látható be, hogy $BD \perp AD$) *(120. ábra).*



120. ábra

Tudjuk, hogy $DM \perp ABC$, ezért $DM \perp AB$, továbbá $CM \perp AB$, mivel M magasságpont. Ez azt jelenti, hogy AB merőleges a CMD sík DM és CM egyenesére, ezért a sík minden egyenesére merőleges, tehát $CD \perp AB$. De a feltétel szerint $CD \perp BD$, tehát CD merőleges az ABD sík minden egyenesére, így $CD \perp AD$. Tehát a D-ből kifutó élek mind merőlegesek egymásra.

Most *Pitagorasz* tételével (1) jobb oldalát könnyen átalakíthatjuk:

$$6(AD^2+BD^2+CD^2)=3[(AD^2+BD^2)+(BD^2+CD^2)+(CD^2+AD^2)]=$$
$$=3[AB^2+BC^2+CA^2].$$

Ez pedig azt jelenti, hogy (1) ekvivalens a következő egyenlőséggel:

(2) $$\frac{AB+BC+CA}{3} \leqq \sqrt{\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{3}}.$$

Ez ismert állítás, a bal oldalon 3 szám számtani közepe, a jobb oldalon ezek négyzetes közepe áll *(24. jegyzet)*.

(2)-ben az egyenlőség $AB=BC=CA$ mellett áll fenn, ekkor pedig a szomszédos lapok egybevágók, sőt $AD=BD=CD$.

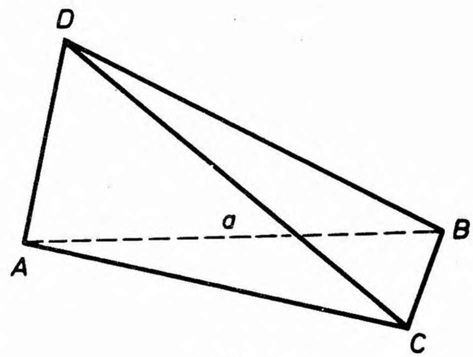
181. Valamely tetraéderen csak az egyik él mérőszáma nagyobb 1-nél. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a tetraéder térfogatának mérőszáma legfeljebb $\frac{1}{8}$.

Megoldás

Tetraéderünk térfogatát növelve (nem csökkentve) — *a megadott feltételek mellett* — $\frac{1}{8}$ *térfogatú tetraéderhez jutunk.*

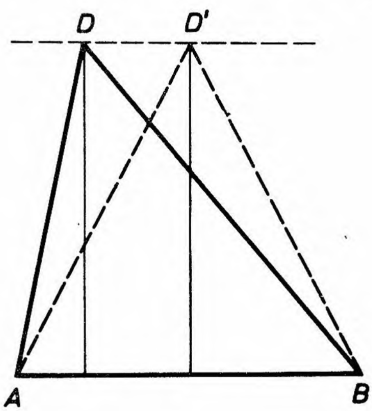
Tekintsük az $ABCD$ tetraéder 1-nél nagyobb CD élével szemközti AB élét. Tekintsük a tetraéder ABC és ABD lapjának szögét *(121. ábra)*. ***Ha ez nem derékszög, akkor forgassuk el az egyiket úgy, hogy a lapszög*** 90° ***legyen.*** Ekkor a tetraéder térfogatát nem csökkentettük, csak a leghosszabb él hossza változott.

Ezzel elértük, hogy a tetraéder magassága a háromszög magasságával esik egybe.



121. ábra

Most vizsgáljuk meg ezeket a háromszögeket. *Ha nem egyenlő szárú háromszögek, akkor — az alapot és a magasságot változatlanul hagyva — alakítsuk át ezeket egyenlő szárú háromszögekké.* Mivel a háromszögek alapját és magasságát nem változtattuk, nem változott a területük sem, és a tetraéder térfogata sem. Azáltal, hogy a háromszögekből egyenlő szárú háromszögeket készítettünk, a szárak hossza nem lett 1-nél nagyobb (a *122. ábrán* a DBD' háromszögben a $D'\sphericalangle > 90°$, tehát $1 \geqq DB > D'B$), tehát a feladat követelményein belül maradtunk.



122. ábra

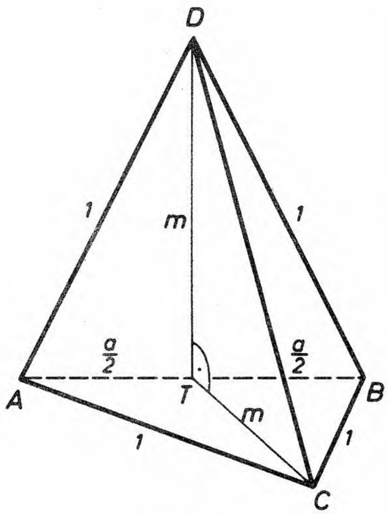
Ha a szárak hossza nem 1, *akkor nyújtsuk meg úgy, hogy mindegyik* 1 *hosszúságú legyen.* Ezekkel a módosításokkal a tetraéder térfogatát nem csökkentettük. Ezzel a *123. ábrán* látható tetraéderhez jutottunk.

Erre a tetraéderre igaz, hogy $AB = a \leqq 1$, a tetraéder leghosszabb oldala CD, az ADB és ABC egybevágó egyenlő szárú háromszögek, az ADB és ABC által meghatározott síkok hajlásszöge 90°.

Számoljuk ki ezek után a tetraéder V térfogatát mint az a függvényét; határozzuk meg az a-t úgy, hogy $a \leqq 1$ mellett a térfogat maximális legyen.

$V = \frac{1}{3} tm$, ahol t az ABC háromszög területe: $t = \frac{1}{2} am$, m a tetraéder ABC-hez tartozó magassága, egyben az ABC a-hoz tartozó magassága is. Így

$$m = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4 - a^2}{4}}.$$



123. ábra

Tehát

$$V=\frac{am^2}{6}=\frac{4a-a^3}{24},$$

ahol $0<a\leqq 1$.

Elegendő az $f(a)=4a-a^3$ függvény szélsőértékeit kiszámítani a $0<a\leqq 1$ tartományban. Bebizonyítjuk, hogy $f(a)$ ebben a tartományban szigorúan növő, azaz ha

$$0<a_1<a_2\leqq 1, \quad \text{akkor} \quad f(a_2)-f(a_1)>0.$$

Valóban

$$f(a_2)-f(a_1)=(4a_2-a_2^3)-(4a_1-a_1^3)=4(a_2-a_1)-(a_2^3-a_1^3)=$$
$$=(a_2-a_1)[4-(a_2^2+a_1a_2+a_1^2)]>(a_2-a_1)[4-3]=a_2-a_1>0.$$

$f(a)$ tehát az $a=1$ érték mellett veszi fel maximumát, ugyanígy V is.

$$V_{\max}=\frac{4-1}{24}=\frac{1}{8}.$$

Megjegyzés

1. A differenciálszámítás elemi ismereteit felhasználva is eljuthatunk a végeredményhez. A $V(a)=\frac{4a-a^3}{24}$ függvény első deriváltjának előjeléből az adott intervallumban megállapíthatjuk, hogy a függvény hogyan viselkedik *(25. jegyzet)*. $\frac{dV}{da}=\frac{1}{24}(4-3a^2)$. Ha $0<a\leqq 1$, akkor $4-3a^2\geqq 1$, tehát $\frac{dV}{da}>0$, a $V(a)$ függvény tehát a $0<a\leqq 1$ tartományban növekvő.

2. Ha nem tesszük meg az $a\leqq 1$ kikötést a $V(a)$ függvény a $0<a<\infty$ tartomány $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$ helyén veszi fel maximumát. Ugyanis $\frac{dV}{da}=0$, ha

$a=\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\frac{dV}{da}>0$, ha $a<\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\frac{dV}{da}<0$, ha $\frac{2}{\sqrt{3}}<a$. Ez a maximum

$$V^*_{max}=\frac{1}{24}\left[4\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}-\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\right]=\frac{2\sqrt{3}}{27}>\frac{1}{8}.$$

Ebből a következő állítást olvashatjuk ki. *Ha egy tetraéderben csak két szemközti él nagyobb* 1*-nél, akkor a tetraéder térfogatának mérőszáma legfeljebb* $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. Ha az 1-nél nagyobb éleket AB és CD jelöli, a maximális térfogatú tetraéderhez akkor jutunk, ha $AB=CD=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $AD=DB=BC=CA=1$, ekkor az ABD és ACD lapok merőlegességén kívül az ACD és BCD lapok is merőlegesek egymásra.

Mindez a megoldásban szereplő gondolatmenethez hasonlóan — differenciálszámítás nélkül — is igazolható, csak az utolsó lépést kell módosítani. Megint egy nevezetes *egyenlő oldalú tetraéderhez* jutottunk *(53. jegyzet).*

8. Mértani helyek a síkban és a térben

182. Írjunk adott hegyesszögű háromszögbe téglalapokat, amelyeknek egyik oldala meghatározott háromszögoldalon (és további két csúcsa is a háromszög kerületén) van.

a) Határozzuk meg a téglalapok középpontjainak mértani helyét.

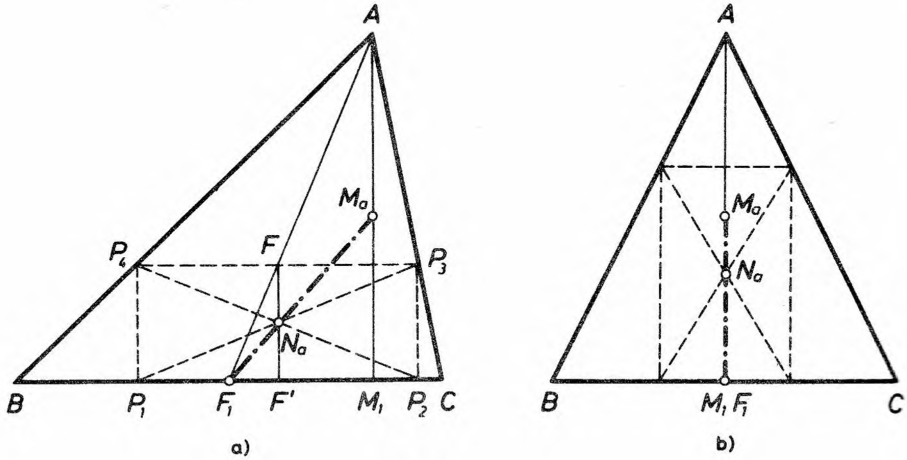
b) Írjunk az adott háromszögbe három olyan téglalapot, amelyeknek közös a körülírt körük.

Megoldás a feladat *a)* részére

A jelöléseket a *124. ábra* mutatja.

A feladat feltételeit kielégítő $P_1P_2P_3P_4$ *téglalap* P_3P_4 *oldalának felezőpontja rajta van az* ABC *háromszög* AF_1 *súlyvonalán.* (Az AP_3P_4 háromszöget az ACB háromszögbe vivő hasonlóság az F pontot F_1-be viszi.)

FF′ merőleges a téglalap P_1P_2 *oldalára, és így az* AM_1 *magasságvonallal párhuzamos. A téglalap* N_a *középpontja az FF′ felezőpontja, s így rajta van az* AF_1M_1 *háromszög* F_1M_a *súlyvonalán.*



124. ábra

Fordítva: Legyen N_a az F_1M_a szakasz tetszés szerinti belső pontja (feltesszük, hogy $AB \neq AC$), *meghatározzuk a feltételeknek megfelelő N_a középpontú $P_1P_2P_3P_4$ téglalapot* (ugyanazokat a jelöléseket használjuk, mint az előbb, bár más pontokról van szó).

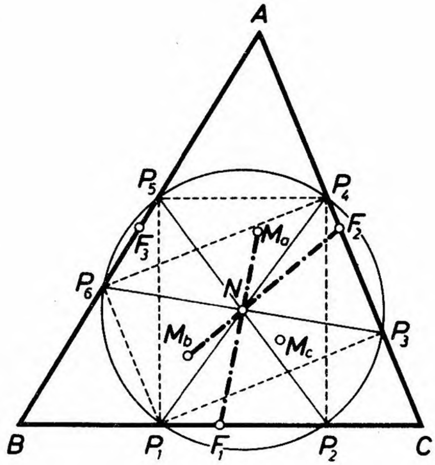
Az N_a-n átmenő BC-re merőleges egyenesnek BC és AF_1 közé eső szakasza legyen $F'F$. Az $F'F$ szakasznak N_a felezőpontja, mert N_a rajta van az AF_1M_1 háromszög F_1M_a súlyvonalán, és $FF' \parallel AM_1$. Hasonló meggondolás alapján az F pont is felezi a rajta keresztül BC-vel húzott párhuzamos egyenesnek az AB és AC közé eső P_4P_3 szakaszát. Ha a P_4, illetve P_3 pontokból merőlegest bocsátunk BC-re, akkor tehát olyan téglalapot kapunk, amelynek középpontja N_a, és amely kielégíti a feltételt. Azt is láttuk, hogy pontosan egy ilyen téglalap van.

Ha az $AB = AC$ *(124/b ábra)*, akkor látható, hogy a téglalapok középpontja az M_1M_a szakaszra esnek. Viszont ennek bármely N_a belső pontjára tükrözve az M_1 pontot, majd az így kapott F-en keresztül a BC-vel húzott párhuzamosnak a szárakkal való metszéspontjaiból merőlegest bocsátva BC-re, egyetlen kívánt tulajdonságú téglalapot kapunk.

Az F_1 és M_a végpontokhoz tartozó téglalapok szakasszá fajulnak. A bizonyítás két részét összevetve, mértani helyünket az F_1M_a szakasz belső pontjai alkotják.

Más megoldási lehetőség. Helyezzük el háromszögünket alkalmasan választott derékszögű koordináta-rendszerben, és írjuk fel azt az összefüggést, amit a mértani hely pontjainak koordinátái kielégítenek.

Ne feledjük el, hogy az összefüggést kielégítő pontok még nem biztos, hogy a keresett mértani helyhez tartoznak.



125. ábra

Megjegyzés

Ha megengedünk szakasszá fajult téglalapot, sőt olyan téglalapokat is, melynek csúcsai a háromszög oldalainak meghosszabbításaira esnek, akkor a teljes F_1M_a egyenes a mértani hely. Igazoljuk ezt az állítást.

Megoldás a feladat *b)* részére *(125. ábra)*

Ha vannak a feladat feltételeinek eleget tevő téglalapok, akkor nyilván ezek átlói egyenlők, és középpontjuk azonos. A feladat a) része szerint két keresett téglalap középpontja csak a két háromszögoldalhoz tartozó mértani helyek közös pontja lehet.

Hegyesszögű háromszögünk magasságvonalainak M_a, M_b, M_c felezőpontjai az oldalfelező pontok alkotta $F_1F_2F_3$ háromszög oldalainak belső pontjai. Így az F_1M_a és F_2M_b szakaszok biztosan metszik egymást egy N pontban. Tudjuk, hogy egyetlen olyan $P_1P_2P_3P_4$ téglalap van, amely az ABC háromszög a oldalán fekszik és középpontja N.

A b oldalnak egyetlen olyan pontja van, amelynek N-re vonatkozó tükörképe az a-n helyezkedik el, és a b-n levő előbbi P_4 pont ilyen. Ha most tekintjük a b oldalon fekvő N középpontú beírt téglalapot, akkor ennek egyik b-n levő csúcsával átellenes csúcsa az a-n van, és ezek egymás tükörképei N-re nézve. A fentebb említettek szerint a szóban forgó csúcspár csak a P_4 és P_1 lehet. Legyen tehát a b-n nyugvó téglalap $P_3P_4P_6P_1$.

Végül a $P_1P_2P_4P_5$ téglalap két átlójára $P_1P_4=P_2P_5$, a $P_3P_4P_6P_1$ téglalap átlóira pedig $P_3P_6=P_1P_4$, és mindhárom átlót felezi az N pont. Ennélfogva a $P_5P_6P_2P_3$ négyszög átlói is felezik egymást, tehát ez a négyszög is téglalap, amelynek egyik oldala az $AB=c$ háromszögoldalon van.

A kapott három téglalap középpontja közös, átlóik egyenlők, s így körülírt körük azonos. Ilyen téglalaphármas csak egy van, minthogy N, és ezzel együtt

minden téglalap helyzete, egyértelműen meg van határozva. Megszerkesztésük az *a)* rész megoldásának második fele szerint történhet, de felhasználhatjuk, hogy P_1 és P_4 középpontosan tükrös az N-re nézve. (Az N pont megszerkesztése triviális.)

Megjegyzés

1. *Eredményeinkből* — tekintettel arra, hogy mindhárom téglalapnak ugyanaz az N pont a középpontja — *az is következik, hogy az F_1M_a, F_2M_b, F_3M_c szakaszok egy N ponton mennek keresztül.* Az N a háromszög egy újabb nevezetes pontja.

2. Eredményeink nem hegyesszögű háromszögre is átfogalmazhatók.

Más megoldási lehetőségek a feladat *b)* részére:

1. Vegyük észre, hogy a $P_1P_3P_5$ háromszög hasonló ABC-hez *(125. ábra).*

2. Vegyük észre, hogy ha P_1 ismert, akkor P_5, P_6, P_4 már megszerkeszthető. Próbálkozzunk ezután hasonlósági szerkesztéssel.

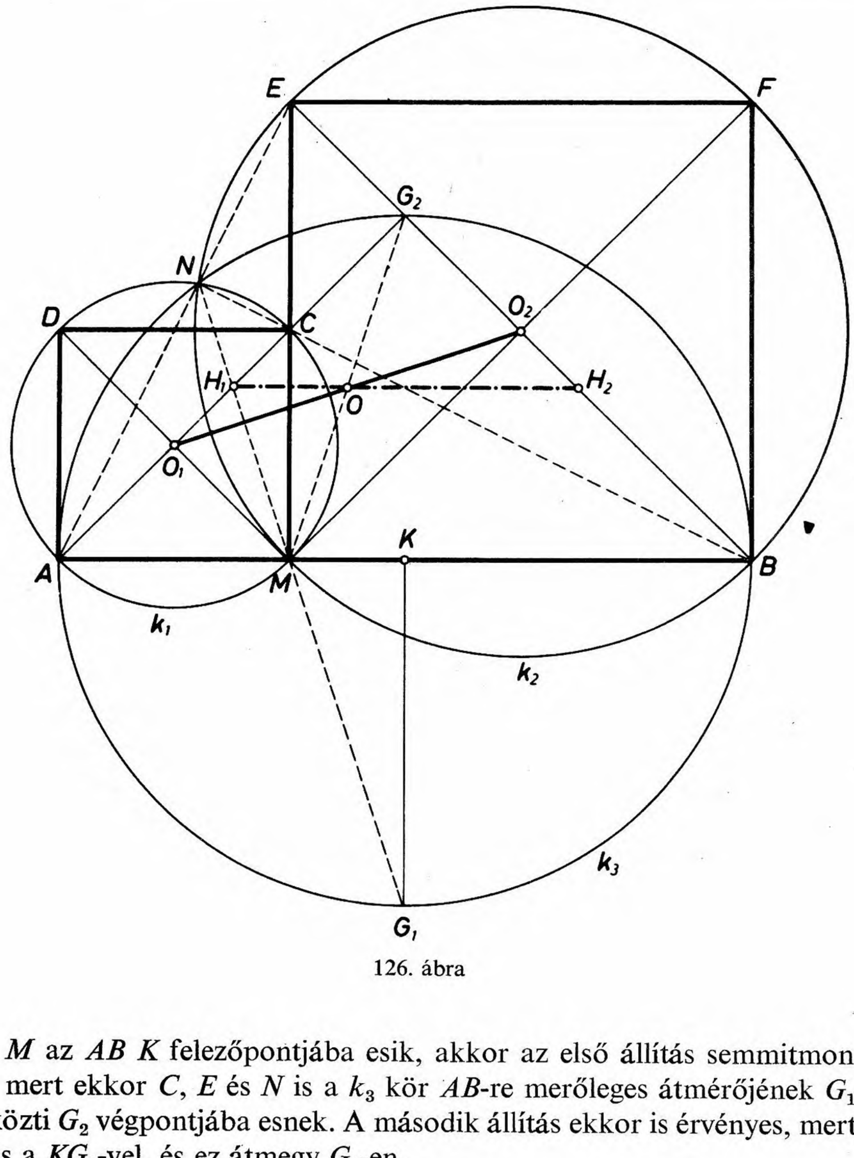
183. Az AB szakaszon mozog az M pont. Az AM és MB szakasz fölé az AB egyenes ugyanazon oldalán megszerkesztjük az $AMCD$ és $BMEF$ négyzeteket és körülírt körüket. A két kör M- és N-ben metszi egymást. Mutassuk meg, hogy az AE és BC egyenesek átmennek az N ponton. Mutassuk meg, hogy az MN egyenes átmegy egy állandó ponton. Mi a mértani helye a két négyzet középpontját összekötő szakasz felezőpontjának?

Megoldás

a) Mivel A és B szerepe szimmetrikus — az első két állítás bizonyításánál — feltehetjük, hogy M közelebb van A-hoz, mint B-hez. Legyen az $AMCD$ és $BMEF$ négyzet középpontja O_1 és O_2, körülírt körük k_1 és k_2 *(126. ábra).*

Az MBC háromszöget M körül 90°-kal elforgatva, a B pont E-be, C pedig A-ba jut. Eszerint a BC és AE egyenesek merőlegesek, és N^* metszéspontjukból (ami biztosan különbözik M-től, ha M az AB szakasz belső pontja) az AC négyzetátló is, BE is derékszögben látszik. N^* rajta van k_1-en és k_2-n, tehát azonos e körök M-től különböző N metszéspontjával.

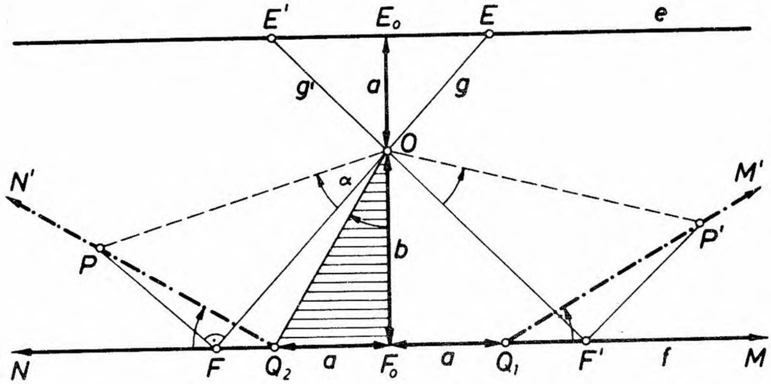
b) *N-ből a fentiek szerint AB is derékszögben látszik,* tehát N rajta van az AB fölötti k_3 *Thalész*-körön, *másrészt NM felezi az ANB szöget,* mert az ANM és MNB szögek a kerületi és középponti szögek tétele alapján feleakkorák, mint az AO_1M és MO_2B derékszögek. Eszerint MN a k_3-nak az ANB szög szárai között fekvő ívét az AB egyenesnek a négyzetekkel ellentétes oldalán fekvő félkörét is felezi. Ez a G_1 felezőpont független M helyzetétől.



126. ábra

Ha M az AB K felezőpontjába esik, akkor az első állítás semmitmondóvá válik, mert ekkor C, E és N is a k_3 kör AB-re merőleges átmérőjének G_1-gyel szemközti G_2 végpontjába esnek. A második állítás ekkor is érvényes, mert MN azonos a KG_2-vel, és ez átmegy G_1-en.

c) *Az $MO_2G_2O_1$ négyszög paralelogramma,* mert oldalai az $AMCD$ és $BMEF$ négyzetek átlói, és így a szemben levők párhuzamosak. Ezért O_1O_2-nek O felezőpontja a G_2M átlót is felezi, vagyis amíg M befutja AB-t, addig O befutja az ABG_2 háromszögnek AB-vel párhuzamos H_1H_2 középvonalát, hiszen M és O kapcsolata egy-egy értelmű. Mivel $M \equiv A$ és $M \equiv B$ esetén nincs értelme valamelyik négyzetnek, ezért H_1 és H_2 nem tartozik a mértani hely pontjaihoz.



127. ábra

184. Adva vannak az e, f párhuzamos egyenesek és köztük az O pont; O távolsága e-től a, f-től b. Az O-n át húzott g egyenes e-t E-ben, f-et F-ben metszi. F-ben merőlegest állítunk g-re, és erre az e-vel való metszéspontja irányában felmérjük az OE szakaszt, ennek végpontja P. Mi a P pont mértani helye, ha g az O körül forog?

Megoldás

A *127. ábrán* az O pontból merőlegest állítunk az e és f egyenesekre, E_0 és F_0 a talppontok. $OE_0 = a$, $OF_0 = b$.

Vegyük észre, hogy a mértani helyhez tartozó tetszőleges P pontra, a hozzá tartozó OFP derékszögű háromszögben $PF : OF = OE : OF = a : b$ (a párhuzamos szelők tételéből). *Ez azt jelenti, hogy az OFP háromszög alakja független a P választásától:* $OFP\triangle \sim OF_0Q_2\triangle$, ahol $F_0Q_2 = a$.

$$OP : OF = \sqrt{a^2+b^2} : b, \quad \text{és} \quad POF\sphericalangle = \alpha, \quad \text{ahol} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Ez azt jelenti, hogy az f egyenes F pontját O körüli α szögű forgatás, majd $OP : OF = \sqrt{a^2+b^2} : b$ *arányú középpontos hasonlóság viszi a mértani hely F-hez tartozó P pontjába.* Ha F' az F_0M félegyenes belső pontja, akkor a forgatás pozitív irányú, ha F az F_0N félegyenes belső pontja, akkor a forgatás negatív irányú (a feladat utasításának megfelelően). Az F-hez P-t rendelő fenti transzformáció — forgatásnyújtás (forgatva nyújtás) — félegyeneshez félegyenest rendel, mértani helyünk pontjai tehát az F_0M félegyenesnek megfelelő Q_1M' félegyenesen, illetve az F_0N félegyenesnek megfelelő Q_2N' félegyenesen vannak ($MQ_1M' = \alpha$, $NQ_2N' = \alpha$) *(29. jegyzet).*

A Q_1M' és Q_2N' félegyenesek minden pontja, a Q_1 és Q_2 pontok kivételével, hozzá tartozik a mértani helyhez. Ugyanis a forgatásnyújtás kölcsönösen egyértelmű leképezés. Pl. Q_1M' belső pontjait O középpontú $b: \sqrt{a^2+b^2}$ arányú negatív irányú α szögű forgatásnyújtás viszi az F_0M félegyenes belső pontjaiba. *Így bármely P^*-hoz meghatározhatjuk az F^* pontot és az $OF^*E^*=g^*$ egyenest, melyre $P^*F^*=OE^*$ és $F^*P^* \perp g^*$.*

A Q_1 és Q_2 pontok nem tartoznak a mértani helyhez, hiszen az F_0Q_1 és az F_0Q_2 egyenes (vagyis f) nem metszi e-t. Az O körül forgó g egyenes vagy metszi f-et, vagy párhuzamos vele. Az utóbbi helyzethez nem tartozik P pont.

Így minden esetet figyelembe vettünk.

Megjegyzés

1. A feladat könnyen általánosítható O tetszőleges helyzetére.
2. Oldjuk meg a feladatot koordinátageometriai módszerrel is.

185. Az adott OAB háromszög AOB szöge kisebb 90°-nál. Az OAB háromszög kerületének vagy belsejének tetszőleges, de O-tól különböző M pontjából merőlegeseket bocsátunk OA-ra és OB-re. Ezeknek a merőlegeseknek a talppontját jelöljük rendre P-vel, illetve Q-val. Legyen továbbá H az OPQ háromszög magasságpontja. Mi a H pontok mértani helye, ha M befutja

a) az AB oldalt;
b) az OAB háromszög belsejét?

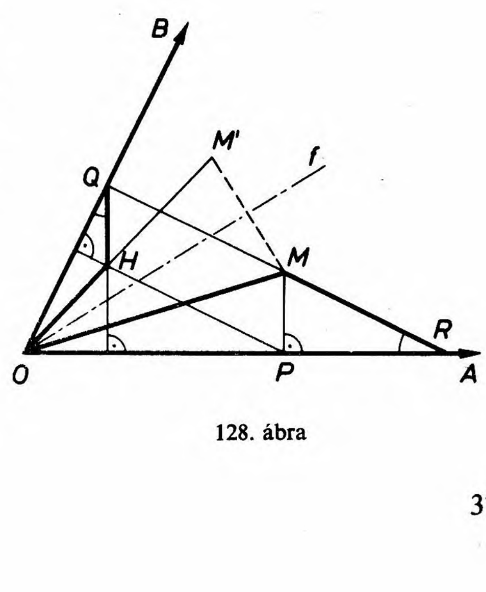
Megoldás

Az M és H közötti kapcsolatot egy hasonlósági transzformációval fogjuk megadni.

Legyen M az AOB szögtartomány tetszés szerinti belső pontja, és messe a feladat szerinti QM egyenes az OA szárat R-ben *(128. ábra)*. Így $OQH\sphericalangle = ORM\sphericalangle$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Az OQR és MPR háromszögek hasonlók, és az $MPHQ$ négyszög paralelogramma, így

$$OQ : OR = MP : MR = HQ : MR.$$

Az OQH és ORM háromszögek hasonlók, hiszen két-két oldal aránya és a közbezárt szög megegyezik. Megfelelő oldalaik aránya — OQ:



128. ábra

$: OR = \cos\omega$ *— független az M választásától, mert az $\omega = AOB\sphericalangle$ adott. Tehát az ORM háromszöget az $AOB\sphericalangle$ f szögfelezőjére történő tükrözés és az O középpontú,* $\cos\omega$ *arányú középpontos hasonlóság egymás utáni végrehajtásával, azaz tükröz és nyújtással vihetjük át az OQH háromszögbe (29. jegyzet).* Ez nyilvánvalóan akkor is helyes, ha M az AOB szögtartomány határán van.

A tükrözésnyújtás egy-egy értelmű hasonlósági transzformáció, szakaszt szakaszba, háromszögtartományt háromszögtartományba visz át. Ezért ha M befutja az AB szakaszt, illetve az OAB háromszög belsejét, akkor H az A_1B_1 szakaszt, illetve az OA_1B_1 háromszög belsejét futja be, ahol A_1, B_1 az A, illetve B pontoknak a fenti tükrözésnyújtással megszerkesztett képei, vagyis az A-ból OB-re, illetve B-ből OA-ra bocsátott merőlegesek talppontjai. (A *128. ábrán* ezeket nem tüntettük fel.)

186. Határozzuk meg egy egyenlő szárú háromszög belsejében fekvő ama pontok mértani helyét, melyekre a száraktól mért távolságok mértani közepe megegyezik az alaptól mért távolsággal.

Megoldás

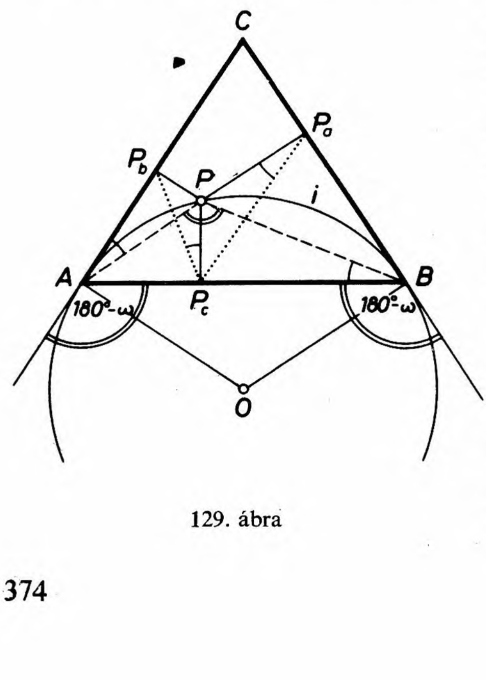
Az ABC egyenlő szárú háromszögben legyen az A-nál és B-nél levő két egyenlő szög ω. A P belső pontnak az oldalakra merőleges vetületeit P_a, P_b, P_c elölje a *129. ábra* szerint.

a) Ha a P pontra — a feladat feltételei szerint — $PP_b \cdot PP_a = PP_c^2$, azaz $PP_a : PP_c = PP_c : PP_b$ teljesül, akkor a PP_bP_c és PP_cP_a háromszögek hasonlók. Ugyanis a PP_bAP_c és PP_cBP_a négyszögek húrnégyszögek, minthogy P_b és P_c-ből az AP, P_c és P_a-ból a BP szakasz látszik derékszögben. E négyszögekben az A és B-nél levő szögek egyenlősége miatt $P_bPP_c\sphericalangle = P_cPP_a\sphericalangle$.

Ebből következik, hogy a P pontból az AB szakasz $180° - \omega$ szögben látszik, hiszen $PAP_b\sphericalangle = PP_cP_b\sphericalangle = PP_aP_c\sphericalangle = PBP_c\sphericalangle$, és így az ABP háromszögben

$$APB\sphericalangle = 180° - (BAP\sphericalangle + PBA\sphericalangle) = 180° - (P_cAP\sphericalangle + PAP_b\sphericalangle) = 180° - \omega.$$

Tehát P az AB szakaszhoz tartozó $180° - \omega$ látószögű i körív belsejében van.



129. ábra

b) Minthogy az A-nál és B-nél levő külső szög is $180° - \omega$, az AC és BC oldalak A-ban, illetve B-ben érintik az i ívet. *Ezek szerint i — végpontjai kivételével — az ABC háromszög belsejében van. Megmutatjuk, hogy az i körív tetszőleges Q belső pontja teljesíti a követelményt:* $QQ_b \cdot QQ_a = QQ_c^2$, ahol Q_a, Q_c, Q_b Q-nak a megfelelő oldalakra való vetületei.

Az a)-ban követett gondolatmenet megfordításával jutunk célhoz $P \to Q$ szerepcseréjével. Q az i íven van, ezért $AQB\sphericalangle = 180° - \omega$. Az ABQ háromszögből

$$QBQ_c\sphericalangle = 180° - (180° - \omega) - QAQ_c\sphericalangle = \omega - QAQ_c\sphericalangle = Q_bAQ\sphericalangle.$$

A Q_aQQ_cB és Q_bAQ_cQ húrnégyszögekből $Q_bQQ_c\sphericalangle = Q_cQQ_a\sphericalangle$, az előbbiből pedig $QQ_aQ_c\sphericalangle = QBQ_c\sphericalangle = Q_bAQ\sphericalangle = Q_bAQ\sphericalangle = Q_bQ_cQ\sphericalangle$.

Tehát a QQ_cQ_a és QQ_bQ_c háromszögek szögei egyenlők, hasonlóságukból $QQ_a : QQ_c = QQ_c : QQ_b$, azaz $QQ_b \cdot QQ_a = QQ_c^2$ következik.

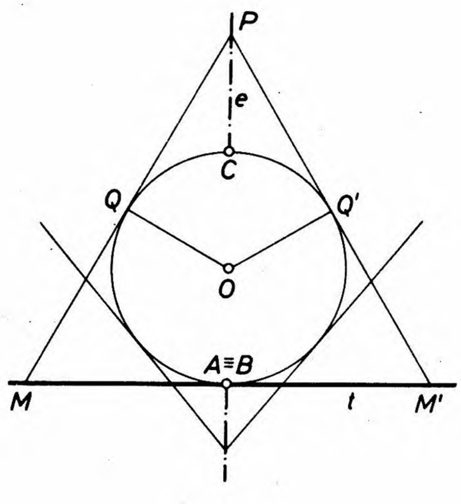
187. Egy k kör valamely t érintőjének két pontja A és M. Jelöljük M-nek A-ra vonatkozó tükörképét M'-vel. Tekintsük az M-ből és M'-ből a k-hoz húzott második érintőket. Mi ezek metszéspontjainak mértani helye, ha M végigfut t-n?

Megoldás

Jelöljük a k kör középpontját O-val, k és t érintési pontját B-vel, a k B-vel átellenes pontját C-vel, az M-ből és M'-ből vont második érintők és k érintési pontjait Q-val és Q'-vel, az MQ és $M'Q'$ érintők metszéspontját P-vel *(130—132. ábrák). Próbálgatások során arra a sejtésre juthatunk, hogy a P pontok egyenesen mozognak, mégpedig azért, mert PC || OA. Vegyük sorra az egyes eseteket.*

I. *Tegyük fel, hogy $A \equiv B$. Ekkor k, t, az M, M' pontpár és a belőlük húzott érintőpár is tükrös a BC egyenesre, tehát a P pont ezen az egyenesen van (130. ábra).*

Megfordítva: az egyenes bármely, a körön kívüli pontjából két szimmetrikus érintő húzható k-hoz, ezek szimmetrikus M, M' pontpárt metszenek ki t-ből. A B és C pontban csak egy-egy érintő húzható k-hoz. A C pontban vont érintő nem metszi t-t, ezért



130. ábra

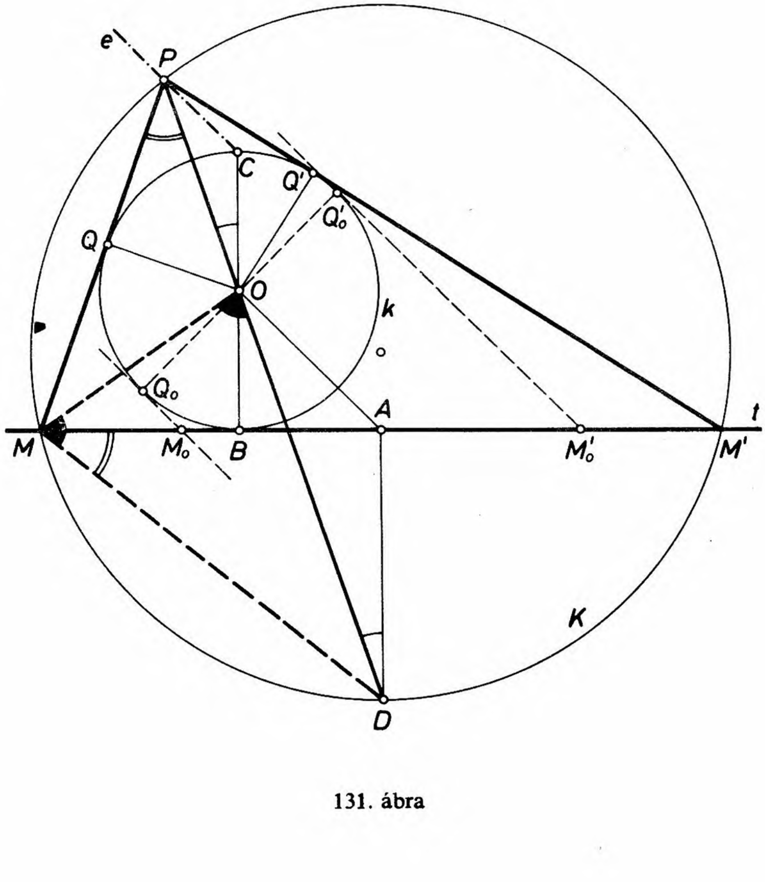
a C pont nem tartozik a mértani helyhez. A B pontban k-hoz húzott érintő maga a t. Érdektelen esethez jutunk. A BC egyenes k-n belüli szakasza sem tartozhat a mértani helyhez, mert belső pontból nem húzható érintő.

Tehát az $A=B$ esetben a keresett mértani hely a BC egyenes k-n kívüli két félegyenese.

II. *Tegyük fel a továbbiakban, hogy A és B különböző (131—132. ábrák).* Legyen k OA-ra merőleges átmérőjének két végpontja Q_0 és Q_0'. *A* k-hoz Q_0 és Q_0' pontokban vont érintők párhuzamosak az OA egyenessel, tőle egyenlő (sugárnyi) távolságra vannak, ezért az A-n átmenő t egyenest A-ra szimmetrikus M_0 és M_0' pontokban metszik.

MM' elhelyezkedése szempontjából a következő esetek lehetségesek:

1*a) Ha az M, M' pontpár az M_0, M_0' pontpárral azonos,* akkor az M_0-ból és M_0'-ből vont érintők párhuzamosak egymással *(131. ábra).*



131. ábra

b) Ha M és M' az $M_0M'_0$ szakaszon kívül vannak, akkor Q, Q' a C-t tartalmazó $Q_0Q'_0$ félkörön van, így a második érintők t-nek k-t tartalmazó partján metszik egymást. *Tehát k a PMM' háromszögnek beírt köre.*

2. *Ha M és M' az $M_0M'_0$ szakasz belsejében van*, akkor Q, Q' a B-t tartalmazó $Q_0Q'_0$ félkörön van, így a második érintők metszik egymást *(132/a, b, c ábrák).*

a) *Tegyük fel, hogy az M, M' pontpár közrefogja B-t.* Ekkor Q, Q' is közrefogja B-t a félkörön, és P a t k-t nem tartalmazó partján fekszik. *k a PMM' háromszög MM' oldalához írt kör.*

b) *Tegyük fel, hogy M, M' egyike B-be esik.* B-ből nem húzható t-től különböző érintő, de most tekintsük t-t második érintőnek is. *B-nek A-ra vonatkozó tükörképe a két második érintő metszéspontja is, tehát a mértani helyhez tartozó pont.*

c) *Tegyük fel, hogy M és M' egyike A és B közé esik.* Ekkor P a másik pontból húzott érintőnek az érintési pont és a t egyenes közé eső szakaszán keletkezik, *k a PMM' háromszög MM' oldalának meghosszabbítását érintő hozzáírt köre.*

Az M, M' pontpár A-hoz és B-hez viszonyított, illetve M_0-hoz és M'_0-höz viszonyított összes helyzetét figyelembe vettük. M és M' felcserélésével a hozzájuk tartozó P pont nem változik meg, ezért *elég azokat a P pontokat vizsgálni, amelyek az A-ból B-n át húzott félegyenesen levő M pontokhoz tartoznak.*

Az I. *és* II. 2 b) *esetet már tárgyaltuk.*

A többi esetben O a PMM' háromszög P-ből induló belső vagy külső szögfelezőjén van aszerint, hogy k az MM' szakaszt vagy annak meghosszabbítását érinti. A szögfelező és a PMM' háromszög K köré írt körének metszéspontját jelöljük D-vel.

Ha D belső szögfelezőn van, akkor D a P-t nem tartalmazó MM' ív felezési pontja *(131.* és *132/a ábrák).* Ha D külső szögfelezőn van, akkor D a P-t tartalmazó MM' ív felezési pontja *(132/c ábra)* (a külső és belső szögfelezők merőlegessége miatt).

D akár belső, akár külső szög szögfelezőjén van, a belőle MM'-re bocsátott merőleges t-t A-ban metszi. Állítjuk, hogy a COP és ADO háromszögek mindegyik esetben hasonlók, és $PC \parallel OA$.

Lássuk ezt be először a II. 1 *b) esetre (131. ábra). $COP\sphericalangle = ADO\sphericalangle$*, mert egyállású szögek. Elég belátni, hogy $\dfrac{PO}{OC}=\dfrac{OD}{DA}$.

187.

Az OPQ és DMA derékszögű háromszögek hasonlók, mert $DMA\sphericalangle =$ $= DMM'\sphericalangle = DPM'\sphericalangle = DPM\sphericalangle = OPQ\sphericalangle$. Ezért

$$\frac{PO}{OQ}=\frac{MD}{DA'}, \quad \text{és} \quad OQ=OC \quad \text{miatt} \quad \frac{PO}{OC}=\frac{MD}{DA}.$$

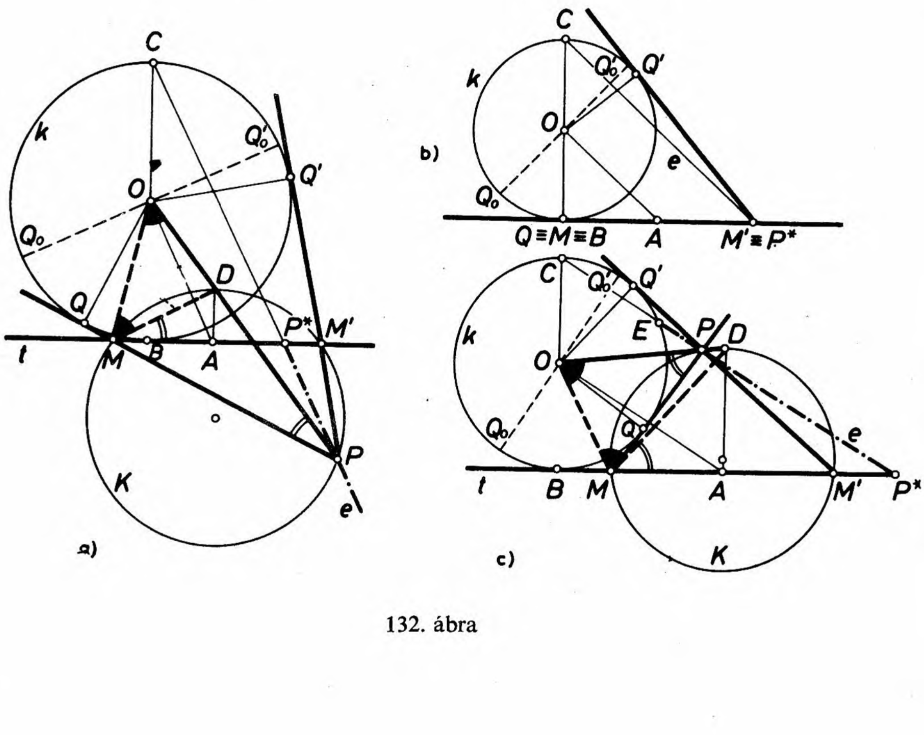
Elég megmutatni, hogy $OD=MD$, *ami egyenértékű azzal, hogy az* OMD *háromszögben* $DMO\sphericalangle = DOM\sphericalangle$. $MOD\sphericalangle = MPO\sphericalangle + OMP\sphericalangle = DMM'\sphericalangle +$ $+ M'MO\sphericalangle = DMO\sphericalangle$. Tehát az ADO és COP háromszögek hasonlók. DA és OC, ill. DO és OP egy irányú párhuzamosok, tehát $PC \parallel OA$.

Hasonlóan látjuk be ezt a II. 2 a) *esetre is (132/a ábra).* $COP\sphericalangle = ADO\sphericalangle$, mert váltószögek. Elég belátni, hogy

$$\frac{PO}{OC}=\frac{OD}{DA}.$$

Az OPQ és DMA derékszögű háromszögek hasonlók, mert $DMA\sphericalangle =$ $= DMM'\sphericalangle = DPM'\sphericalangle = DPM\sphericalangle = OPQ\sphericalangle$. Ezért

$$\frac{PO}{OQ}=\frac{MD}{DA}, \quad \text{és} \quad OQ=OC \quad \text{miatt} \quad \frac{PO}{OC}=\frac{MD}{DA}.$$



132. ábra

Elég megmutatni, hogy $OD=MD$, azaz $MOD\sphericalangle = DMO\sphericalangle$. $MOD\sphericalangle = 180° - (OPM\sphericalangle + PMO\sphericalangle) = 180° - (OPM\sphericalangle + PMM'\sphericalangle + M'MO\sphericalangle) = 180° - (M'MD\sphericalangle + PMM'\sphericalangle + OMQ\sphericalangle) = DMO\sphericalangle$. Tehát ADO és COP hasonló háromszögek, DA és OC, illetve DO és OP ellenkező irányú párhuzamosok, így $PC \parallel OA$ teljesül.

Állításunk bizonyítása a II. 2 c) *esetre (132/c ábra)* : $COP\sphericalangle = ADO\sphericalangle$, mert váltószögek. Elég belátni, hogy

$$\frac{PO}{OC}=\frac{OD}{DA}.$$

Az OPQ és DMA derékszögű háromszögek hasonlók, hiszen $DMA\sphericalangle = DMM'\sphericalangle = DPM'\sphericalangle = OPQ'\sphericalangle = OPQ\sphericalangle$. Tehát

$$\frac{PO}{OQ}=\frac{MD}{DA} \quad \text{és} \quad OQ=OC \quad \text{miatt} \quad \frac{PO}{OC}=\frac{MD}{DA}.$$

Lássuk be, hogy $MD=OD$, *vagyis* $MOD\sphericalangle = DMO\sphericalangle$.

$$MOD\sphericalangle = 180° - (OPM\sphericalangle + PMO\sphericalangle) = 180° - (M'MD\sphericalangle + OMB\sphericalangle) = DMO\sphericalangle.$$

Tehát az ADO és COP háromszögek hasonlók, DA és OC, illetve OD és PO is ellenkező irányú párhuzamosok, így teljesül a $PC \parallel OA$ állítás.

Eszerint P mindig a C ponton át az OA egyenessel párhuzamos e egyenesen van. (Ez teljesül a II. 2 b) esetben is, mert B-nek A-ra vonatkozó P^* tükörképe illeszkedik erre az egyenesre, ugyanis a CBP^* háromszög OA középvonala párhuzamos CP^*-gal.) *e-nek k-ba eső húrja nyilván nem tartozik a mértani helyhez, mert belső pontból nem húzható k-hoz érintő.*

Fordítva: Legyen P az e egyenes egy a körön kívüli, P^*-tól különböző, tetszőleges (nem t-n levő) *pontja.* Húzzuk meg P-ből k-hoz az egyik érintőt, és tükrözzük ennek t-vel való metszéspontját A-ra. Az így kapott pontpárt M, M'-nek választva, az ezekből húzott érintők metszik egymást, mert csak az OA-val (és így e-vel is) párhuzamos érintőpár nem metszi egymást. A metszéspont a bizonyítottak szerint e-n van, másrészt a meghúzott érintőn, tehát P éppen a metszéspont.

Vizsgáljuk meg végül e és k metszéspontjait. C nem tartozik a mértani helyhez, mert t-nek egyetlen pontjából sem tudunk C-n átmenő érintőt húzni. A másik E metszéspont nem más, mint az A-ból k-hoz húzott második érintő érintési pontja. Tükrözzük ugyanis B-t OA-ra. A tükörkép egyrészt k-n van, mert O-n átmenő egyenesre tükröztünk, másrészt e-re illeszkedik, mert a CBP^* háromszög B csúcsát a CP^* oldallal párhuzamos OA középvonalra tükröztük. Tehát B tükörképe E, AB tükörképe AE, k tükörképe önmaga, így AE E-ben érinti k-t. A-nak A-ra vonatkozó tükörképe önmaga, $M \equiv M'$, a belőlük húzott második érintők egybeesnek, így nincs határozott metszéspontjuk, tehát E nem tartozik a mértani helyhez.

A keresett mértani hely a C-n át AO-val párhuzamosan húzott egyenesnek a k-n kívül eső két félegyeneséből áll, a határpontokat nem engedjük meg.

Megjegyzés

1. A megoldás egyik leglényegesebb lépése az $MM'P$ háromszög beírt, illetve hozzáírt köre és a körülírt kör kapcsolatát jellemző $OD = MD$ összefüggés felismerése volt. Ez több más feladatban is szerepel (**139.**, **213.** feladat).

2. Meglepő, de a projektív geometria módszereivel a feladat lényegesen általánosítható kör helyett tetszőleges kúpszeletre, s az általánosabb feladat — nem sokkal mélyebb segédeszközökkel — egyszerűbben megoldható *(30., 39. jegyzet)*.

3. Kíséreljük meg a megoldást koordinátageometriai módszerrel. A számolás elég hosszadalmas, de nem okoz túl nagy nehézséget.

188. Legyen adva két egymásra merőleges egyenes és egy pont. A pont körül rajzoljunk kört tetszés szerinti sugárral, de úgy, hogy mind a két egyenest messe. E metszéspontokban emeljünk merőlegest az egyenesekre, és keressük meg ezek metszéspontjait. Milyen vonalat írnak le a metszéspontok, ha a kör sugarát változtatjuk?

Megoldás

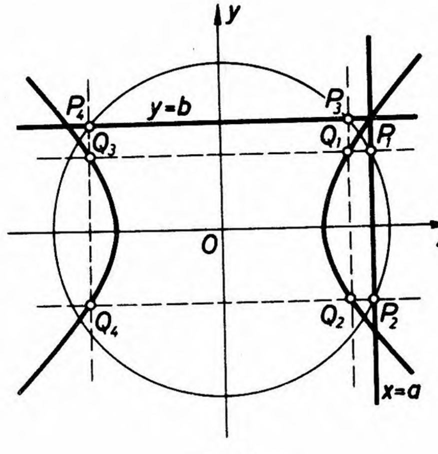
A feladatot koordinátageometriai úton oldjuk meg. Válasszuk origónak az adott pontot, és legyenek a tengelyek az adott egyenesekkel párhuzamosak (133. ábra).

A két egyenes egyenlete tehát $x=a$, illetve $y=b$, feltehető, hogy $a \geqq b \geqq 0$. Egy megfelelő kör egyenlete $x^2+y^2=r^2$, ahol $r \geqq a$. Az egyenesek és a kör metszéspontjának a koordinátái:

$$P_1\left(a;\ \sqrt{r^2-a^2}\right);\quad P_2\left(a;\ -\sqrt{r^2-a^2}\right);$$

$$P_3\left(\sqrt{r^2-b^2};\ b\right);\quad P_4\left(-\sqrt{r^2-b^2};\ b\right).$$

A metszéspontokban emelt merőlegesek metszéspontjainak koordinátái:



133. ábra

$$Q_1\left(\sqrt{r^2-b^2};\ \sqrt{r^2-a^2}\right);\quad Q_2\left(\sqrt{r^2-b^2};\ -\sqrt{r^2-a^2}\right);$$

$$Q_3\left(-\sqrt{r^2-b^2};\ \sqrt{r^2-a^2}\right);\quad Q_4\left(-\sqrt{r^2-b^2};\ -\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

Látható, hogy a kapott metszéspontok abszcisszái kielégítik az $x^2=r^2-b^2$, ordinátái pedig az $y^2=r^2-a^2$ egyenletet.

Ennélfogva a kapott pontok koordinátái kielégítik az $x^2-y^2=a^2-b^2$ egyenletet, azaz a keresett mértani hely pontjai $a^2 \neq b^2$ esetén az

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$$

egyenletű derékszögű hiperbolán, $a^2=b^2$ esetén az

$$x-y=0, \quad \text{illetve az} \quad x+y=0$$

egyeneseken vannak rajta.

Végül bebizonyítjuk, hogy ha az $(x_0;y_0)$ pont koordinátái kielégítik az $x^2-y^2=a^2-b^2$ egyenletet, akkor ez a pont hozzá tartozik a mértani helyhez. Bocsássunk merőlegest az $(x_0;y_0)$ pontból az adott egyenesekre. Ekkor a talppontok koordinátái: $(x_0;b)$, ill. $(a;y_0)$. Ezekre a pontokra nézve a feltételi egyenlet $(x_0^2-y_0^2=a^2-b^2)$ szerint $x_0^2+b^2=a^2+y_0^2$. Tehát a kapott talppontok rajta vannak az origó körül rajzolt $r=\sqrt{x_0^2+b^2}=\sqrt{a^2+y_0^2}$ sugarú körön, azaz az $(x_0;y_0)$ pont kielégíti a mértani hely feltételeit.

A keresett mértani hely tehát $a \neq b$ esetén derékszögű hiperbola, melynek középpontja az adott pont, tengelyei pedig párhuzamosak az adott egyenesekkel, és főtengelye hosszának fele $\sqrt{a^2-b^2}$. Ha $a=b$, akkor a mértani hely két, az adott ponton átmenő, a megadott egyenesek szögfelezőivel párhuzamos egyenes.

189. Adott a síkon két egymást metsző egyenes. Bizonyítandó, hogy azoknak a pontoknak mértani helye (a síkon), amelyekre nézve a két egyenestől mért távolságok négyzetösszege egy adott pozitív számmal egyenlő, ellipszis.

Megoldás

Az állítást koordinátageometriai úton bizonyítjuk. Az adott e és f egyenesek szögfelezői a keresett mértani helynek is szimmetriatengelyei, ezért ezeket választjuk koordinátatengelyeknek, úgyhogy e egyenlete : $y=mx$, f egyenlete: $y=-mx$ $(m>0)$ legyen *(134. ábra)*.

a) *A mértani hely P pontjának x, y koordinátái között keressünk összefüggést.*

Jelölje P merőleges vetületét e-n $E(u, mu)$, f-en pedig $F(v, -mv)$. Mivel $PE \perp e$, $PF \perp f$, ezért

$$\frac{y-mu}{x-u}=-\frac{1}{m}; \quad u=\frac{x+my}{m^2+1},$$

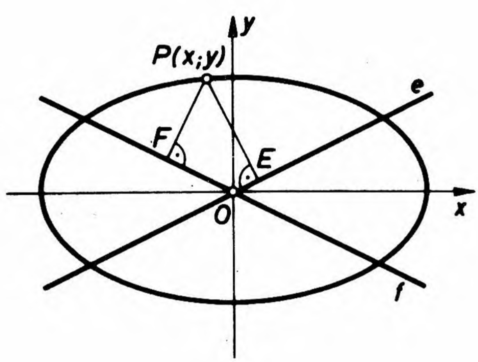
és

$$\frac{y+mv}{x-v}=\frac{1}{m}; \quad v=\frac{x-my}{m^2+1}.$$

Tehát E és F koordinátái:

$$E\left(\frac{x+my}{m^2+1}; \quad \frac{mx+m^2y}{m^2+1}\right),$$

$$F\left(\frac{x-my}{m^2+1}; \quad \frac{-mx+m^2y}{m^2+1}\right).$$



134. ábra

A két egyenestől mért távolságok négyzetösszegét p^2-tel jelöljük:

$$(1)\quad p^2=PE^2+PF^2=\left[\frac{m(mx-y)}{m^2+1}\right]^2+$$

$$+\left[\frac{y-mx}{m^2+1}\right]^2+\left[\frac{m(mx+y)}{m^2+1}\right]^2+$$

$$+\left[\frac{y+mx}{m^2+1}\right]^2=\frac{2m^2x^2+2y^2}{m^2+1}.$$

$$(2) \qquad \frac{2m^2}{p^2(m^2+1)}x^2+\frac{2}{p^2(1+m^2)}y^2=1.$$

Tehát ellipszis egyenletéhez jutottunk. Az ellipszis féltengelyei:

$$a=\frac{p}{m}\sqrt{\frac{m^2+1}{2}}, \quad b=p\sqrt{\frac{m^2+1}{2}}.$$

A főtengely az x tengelyen van, ha $0<m<1$, az y tengelyen van, ha $m>1$. Ha $m=1$, azaz $e\perp f$, akkor p sugarú körhöz jutunk.

b) *Látható, hogy a* (2) *egyenletnek eleget tevő* (x, y) *pontok kielégítik* (1)*-et is, tehát a keresett mértani hely a* (2) *egyenletű ellipszis.*

Megjegyzés

A számolás rendkívüli módon leegyszerűsödik, ha az egyenes vektoregyenletét használjuk $e(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $f(\cos\varphi, -\sin\varphi)$ normálvektor választás mellett *(47. jegyzet)*.

190. Állítsunk merőlegest egy parabola érintőjére az érintési pontban, és ezt messük el a fókuszon átmenő, az érintővel párhuzamos egyenessel. Mi a metszéspontok mértani helye, ha az érintési pont végigfut a parabolán?

I. megoldás

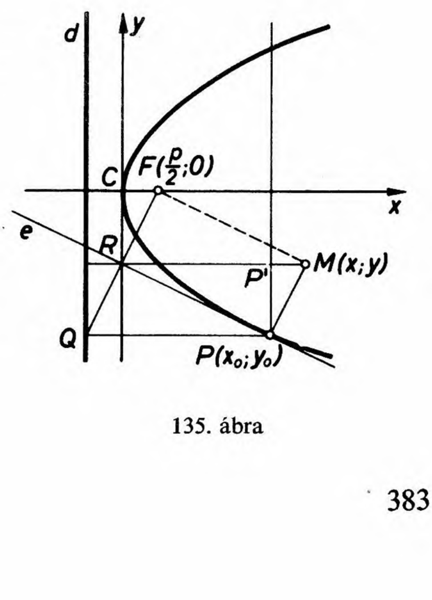
A parabolát úgy helyezzük el a koordináta-rendszerben, hogy $(x_0; y_0)$ pontjaira teljesüljön *(135. ábra)*:

$$(1) \qquad y_0^2-2px_0=0 \quad (p>0).$$

Tudjuk, hogy az $(x_0; y_0)$ parabolaponthoz tartozó érintő $(x_1; y_1)$ pontjaira teljesül

$$-p(x_1+x_0)+y_0y_1=0 \quad [\text{normálvektora: } (-p; y_0)].$$

a) *A keresett mértani hely* $(x_0; y_0)$*-ból származtatott* $(x; y)$ *pontja rajta van a* $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ *fókuszon átmenő, érintővel párhuzamos egyenesen*:



135. ábra

(2) $$-p\left(x-\frac{p}{2}\right)+y_0y=0,$$

és az érintési ponton áthaladó, érintőre merőleges egyenesen:

(3) $$y_0(x-x_0)+p(y-y_0)=0.$$

A (2), (3) egyenletrendszert megoldva, megkapjuk az $(x;y)$ metszéspontot. Szorozzuk meg (2)-at y_0-val (3)-at p-vel, majd adjuk őket össze.

$$y(p^2+y_0^2)-\frac{1}{2}p^2y_0-px_0y_0=0.$$

Felhasználva, hogy $px_0=\frac{1}{2}\cdot y_0^2$, $p^2+y_0^2\neq 0$-val osztva adódik

(4) $$y=\frac{1}{2}y_0.$$

Ezt (2)-be behelyettesítve (1) felhasználásával

(5) $$x=x_0+\frac{p}{2}.$$

A (4), (5) rendszer egy-egy értelmű kapcsolatot jelent $(x_0;y_0)$ és $(x;y)$ között:

(4′) $$y_0=2y;$$

(5′) $$x_0=x-\frac{p}{2}.$$

Tehát $(x;y)$ *kielégíti a* (4′) *és* (5′) (1)*-be helyettesítésével nyert*

(6) $$y^2=\frac{p}{2}\left(x-\frac{p}{2}\right)$$

egyenletet. Ez egy $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ *csúcsú,* $p'=\frac{p}{4}$ *paraméterű parabola egyenlete.*

b) *Fordítva, a* (6) *parabola tetszőleges* $(x';y')$ *pontja kielégíti a követelményeket.* Ugyanis az ehhez (4′) és (5′)-vel hozzárendelt $(x_0';y_0')$ pont — (6) miatt — kielégíti az (1) parabolaegyenletet, továbbá ebből az $(x_0';y_0')$ pontból kiindulva, az előbbi gondolatmenet megismétlésével éppen az $(x';y')$ pontot kapjuk vissza a (4) és (5) egyenletekből.

II. megoldás (Vázlat)

Ismert tétel, hogy F-et e-re tükrözve, Q-hoz jutunk *(135. ábra,* itt $PQ\perp d$ és $PQ=PF$). Ebből következik, hogy az FCR és $MP'P$ háromszögek egybevágók. Ezután az adott parabola pontjaiból a következőképpen jutunk mértani helyünk pontjaihoz: Először az x tengelyre 1 : 2 arányban zsugorítunk, majd

$CF=\frac{p}{2}$ nagyságú, CF irányú eltolást végzünk. Mutassuk meg, hogy így is parabolához jutunk.

Megjegyzés

A (4), (5) képlettel megadott $(x_0;\ y_0)\to(x;\ y)$ kapcsolat — amit fentebb geometriailag is leírtunk — egy affin leképezés *(30. jegyzet)*.

191. Egy vonal pontjainak derékszögű koordinátáit a következő kifejezések adják meg:

(1) $$x=\frac{1-u^2-v^2}{(1-u)^2+v^2};$$ (2) $$y=\frac{2v}{(1-u)^2+v^2},$$

ahol u, v paraméterek, és $\frac{v}{u}=m$ 0-tól különböző állandó. Adjuk meg a vonal egyenletét x és y, valamint m közötti összefüggés alakjában.

Megoldás

a) (1)-ben és (2)-ben a nevező nem 0, ha v és $(1-u)$ egyike nem 0. Mivel $m=\frac{v}{u}$ 0-tól különböző állandó, ezért u, v, m, y is 0-tól különbözők. (1) és (2) az $mu=v$ összefüggés alapján

(3) $$x=\frac{1-u^2(1+m^2)}{1-2u+u^2(1+m^2)};$$

(4) $$y=\frac{2mu}{1-2u+u^2(1+m^2)}$$

alakra hozható. Az u-t kell kiküszöbölnünk:

$$\frac{y}{m}+x=\frac{1+2u-u^2(1+m^2)}{1-2u+u^2(1+m^2)}=\frac{2-[1-2u+u^2(1+m^2)]}{1-2u+u^2(1+m^2)}=\frac{y}{mu}-1,$$

$$u=\frac{y}{mx+m+y},\text{ feltéve, hogy } mx+m+y\neq 0.$$

Célszerű u-t így helyettesíteni:

$$\frac{x}{y}=\frac{1-u^2(1+m^2)}{2mu}=\frac{(mx+m+y)^2-y^2(1+m^2)}{2my(mx+m+y)}.$$

A nevező feltevésünk szerint nem 0,

$$2mx(mx+m+y)=(mx+m+y)^2-y^2(1+m^2).$$

Ez a kijelölt műveletek elvégzésével, rendezéssel, majd $m^2>0$ számmal osztva:

(5) $$y^2+x^2-2\frac{y}{m}=1;\quad \left(y-\frac{1}{m}\right)^2+x^2=\frac{1}{m^2}+1$$

alakot ölt.

A kapott összefüggés egy $\left(0;\frac{1}{m}\right)$ *középpontú,* $\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}$ sugarú kör egyenlete.

b) *Az* $y\neq 0$*, mert* $v\neq 0$*, így a kör és az x tengely metszéspontjait ki kell zárnunk. Ha viszont ezeket az* $(1;0)$ *és* $(-1;0)$ *pontokat kizárjuk, a kör bármely más pontja kielégíti az eredeti feltételeket:* $y\neq 0$ biztosításával a kört $(-1;0)$ pontban érintő $mx+m+y=0$ egyenes pontjait is kizártuk, az $u=\frac{y}{mx+m+y}$ hányados értelmezhető, és zérustól különböző. A 0-tól különböző m állandóval való szorzás révén nyert $v=\frac{my}{mx+m+y}$ hányados is értelmezhető, és 0-tól különböző. Az így értelmezett u és v paramétereket (1)-be és (2)-be behelyettesítve, és (5)-öt felhasználva, azonossághoz jutunk.

Nézzük meg az eddig kizárt $mx+m+y=0$ esetet. (3) és (4) alapján:

$$mx+m+y=\frac{1}{1-2u+u^2(1+m^2)}\cdot 2m=0.$$

De ez az $m=0$ ellentmondáshoz vezet.

Tehát a keresett vonal az $\left(y-\frac{1}{m}\right)^2+x^2=\frac{1}{m^2}+1$ kör, kivéve az $(1;0)$ és $(-1;0)$ pontjait.

Megjegyzés

Vezessük be az $x+iy=z'$ és az $u+iv=z$ komplex számokat. Az (1) és (2) feltételek egy $z'(z)$ komplex változós, komplex értékű függvényt értelmeznek:

$$z'=x+iy=\frac{1-u^2-v^2+2vi}{(1-u)^2+v^2}=\frac{(1+u+iv)[1-(u-iv)]}{[1-(u+iv)][1-(u-iv)]}=\frac{1+z}{1-z};\qquad z\neq 1.$$

Ebből az inverz függvény is meghatározható:

$$z=\frac{z'-1}{z'+1}=\frac{x-1-yi}{x+1+yi}=\frac{(x-1+yi)(x+1-yi)}{(x+1+yi)(x+1-yi)}=\frac{x^2-1+2yi}{(x+1)^2+y^2};\qquad z'\neq -1.$$

Tehát a $z'(z)$ *függvény egy-egy értelmű kapcsolatot létesít a* $(z\neq 1)$ *lyukas* z *komplex számsík és a* $(z'\neq -1)$ *lyukas* z' *komplex számsík között.*

Ha a z-síkban megadunk egy görbét, akkor a megfelelő pontok a z'-síkban a képgörbét írják le *(és fordítva)*.

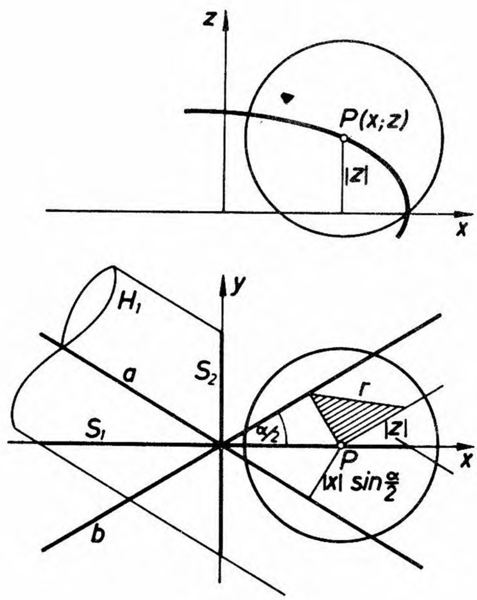
Feladatunk ebből a témakörből, a komplex függvénytan témaköréből származik, s itt messzemenően általánosítható is *(51. jegyzet)*.

192. Adott két egymást metsző, egymással α szöget bezáró egyenes. Mi a mértani helye azon r sugarú gömbök középpontjainak, amelyek mindkét egyenest érintik?

I. megoldás

Egy r sugarú gömb akkor és csak akkor érinti mindkét egyenest, ha P középpontja mindkét egyenestől r távolságra van. Azok a pontok, melyek a két egyenestől egyenlő távolságra vannak, a két egyenes szögfelező síkjain, az S_1 és S_2 síkon helyezkednek el. Ezek merőlegesek az adott egyenesek S síkjára, és az S síkot az x, illetve y szögfelezőkben metszik (feltesszük, hogy x a nem nagyobb szög felezője, *136. ábra*).

Ennek megfelelően választjuk meg a térbeli koordináta-rendszer x, y tengelyét, z tengelynek az S_1 és S_2 síkok metszésvonalát választjuk, ez merőleges S-re. A tengelyek irányítását vegyük a *136. ábra* szerint.



136. ábra

Tehát P csak az (x, z) és (y, z) síkok egyikében lehet. Az első esetben P-nek az S síkra eső vetülete az x tengelyen van, és e vetület távolsága az egyenesektől $|x|\sin\frac{\alpha}{2}$, P az S síktól $|z|$ távolságra van, és így P az egyenesektől

(1) $$r=\sqrt{\left(x\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+z^2}$$

távolságra van.

A keresett mértani hely S_1 síkban levő részének az egyenlete tehát

(2) $$\frac{x^2}{\left(\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2}+\frac{z^2}{r^2}=1.$$

Ellipszishez jutottunk, $\dfrac{2r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ a nagytengely hossza, $2r$ a kistengelyé.

Hasonló módon kapjuk a mértani hely (y, z) síkban levő részének az egyenletét:

$$(3) \qquad \frac{y^2}{\left(\dfrac{r}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2}+\frac{z^2}{r^2}=1.$$

Ez is ellipszis, nagytengelye $\dfrac{2r}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$, kistengelye $2r$ nagyságú.

A (2) egyenlet (1)-gyel ekvivalens, tehát a (2) ellipszis pontjai valóban r távolságra vannak az egyenesektől. Ugyanígy bizonyíthatjuk ezt a (3) ellipszis pontjaira is.

II. megoldás (Vázlat)

Az egyenesektől r távolságra levő pontok egy-egy forgáshenger felületén vannak (a *136. ábrán* csak az a tengelyű H_1 hengert szemléltetjük).

Ezek közös pontjai — mint már láttuk — az S_1, S_2 szimmetriasíkokban vannak. *Viszont S_1 és S_2 például a H_1 forgáshengert ellipszisekben metszik (30. jegyzet).*

193. Adott egy $ABCDA'B'C'D'$ kocka. Jelöljük X-szel a kocka AC lapátlójának tetszés szerinti pontját, Y-nal pedig a $B'D'$ lapátló egy tetszés szerinti pontját.

a) Mi a mértani helye valamennyi XY szakasz felezőpontjának?

b) Tekintsük valamennyi XY szakasznak azt a Z pontját, amelyre fennáll a $ZY=2\,XZ$ egyenlőség, és keressük meg ezeknek a Z pontoknak a mértani helyét!

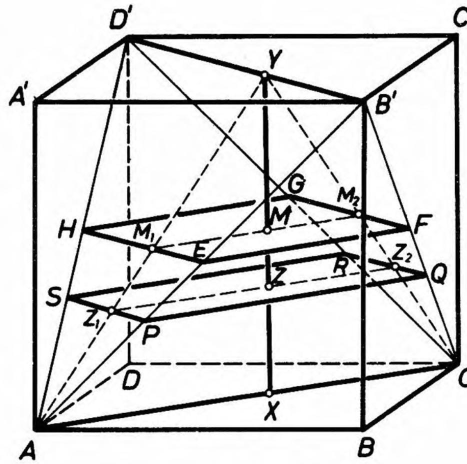
Megoldás

a) Használjuk a *137. ábra* jelöléseit. Legyen M az XY szakasz felezőpontja. *Először rögzítsük az Y pontot. Ha X befutja az AC szakasz pontjait, akkor M befutja az ACY háromszög M_1M_2 középvonalának pontjait,* hiszen M és X kapcsolata kölcsönösen egyértelmű. M_1 és M_2 az AY, illetve CY felezőpontja.

Ezután változtassuk az Y-t. Ha Y befutja a $B'D'$ szakasz pontjait, a hozzá tartozó M_1 és M_2 befutja a $B'D'A$ háromszög EH középvonalát, illetve a $B'D'C$ háromszög FG középvonalát. Az M_1M_2 szakasz tehát párhuzamos

helyzeteken át (hiszen AC-vel is párhuzamos) végigsúrolja az $EFGH$ négyzetet, hiszen Y és az M_1M_2 szakasz kapcsolata kölcsönösen egyértelmű.

$EFGH$ valóban négyzet. Ugyanis $EF \parallel AC \parallel AG$, $EF = HG = \frac{1}{2} AC$; továbbá $EH \parallel B'D' \parallel FG$, $EH = FG = \frac{1}{2} B'D'$; végül $AC = B'D'$ és $AC \perp B'D'$.



137. ábra

Az $EFGH$ négyzet tetszőleges M' pontját kiszemelve, egyértelműen meghatározhatjuk hozzá a négyzet M'-n átmenő, AC-vel párhuzamos $M_1'M_2'$ szakaszát, ehhez az Y' pontot majd az ACY háromszögben X'-t úgy, hogy M' éppen az $X'Y'$ felezőpontja.

b) *A bizonyítás gondolatmenete azonos az előbbivel,* csak most a középvonaltétel helyett a következő általánosabb segédtételt használjuk fel: *Fussa be P az ABC háromszög AB oldalszakaszát. Legyen Q a CP szakasznak az a pontja, melyre $CQ : CP = \lambda$.*

Állítás: a Q pontok mértani helye az az A_1B_1 szakasz lesz, melyre $A_1B_1 \parallel AB$; $CA_1 : CA = CB_1 : CB = A_1B_1 : AB = \lambda$.

Mindezek a középpontos hasonlóság tulajdonságaiból következnek *(29. jegyzet).*

Ezután legyen Z egy — a feltételeknek megfelelő — XY szakasznak az a pontja, melyre $ZY = 2\,XZ$, vagyis $YZ : YZ = 2:3$. Y-t rögzítve, X-et változtatva, Z az ACY háromszög AC-vel párhuzamos Z_1Z_2 szakaszán mozog ($YZ_1 : YA = YZ_2 : YC = 2:3$). Y-t változtatva, a hozzá tartozó Z_1Z_2 önmagával párhuzamosan mozogva végigsúrolja a $PQRS$ téglalapot, ahol

$$B'P : B'A = B'Q : B'C = D'R : D'C = D'S : D'A = 2:3\,.$$

$PQRS$ valóban téglalap, hiszen $PQ \parallel AC \parallel SR$, $PQ = \frac{2}{3} AC = SR$; $PS \parallel B'D' \parallel QR$, $PS = \frac{1}{3} B'D' = QR$, továbbá $AC \perp B'D'$ miatt $PQ \perp PS$.

A $PQRS$ tetszőleges Z' pontját kiszemelve, egyértelműen meghatározhatjuk hozzá a téglalap Z'-n átmenő, AC-vel párhuzamos $Z_1'Z_2'$ szakaszát, ehhez az Y' pontot, majd az ACY háromszögben az X'-t úgy, hogy Z'-re $Y'Z' : Y'X' = 2:3$, vagyis $Z'Y' = 2\,X'Z'$.

Az idézett tételekből könnyen következik, hogy

$$EFGH \parallel ABCD \parallel PQRS.$$

Megjegyzés

Az idézett segédtétel alapján könnyen általánosíthatjuk feladatunkat *(29., 30. jegyzet)*.

194. Adott az ε sík és a sík egyik oldalán az A, B, C pont, amelyek nincsenek egy egyenesen, és az általuk meghatározott sík nem párhuzamos ε-nal. A', B', C' legyen az ε sík három tetszés szerinti pontja. Az AA', BB', CC' szakaszok felezőpontja legyen L, M, illetve N, és az LMN háromszög súlypontja legyen G. (Figyelmen kívül hagyjuk az olyan A', B', C' pontharmasokat, amelyekre vonatkozóan L, M, N nem alkot háromszöget.) Mi a G pontok mértani helye, ha A', B', C' egymástól függetlenül befutja az ε síkot?

Megoldás

Felhasználjuk a következő segédtételt:

Legyen O egy adott pont, α egy adott sík, λ egy pozitív valós szám. Az α sík tetszőleges P pontjához rendeljük hozzá azt a P' pontot, melyre $OP' = \lambda OP$.

Állítás: Ez az előírás α-hoz egy vele párhuzamos α' síkot rendel kölcsönösen egyértelmű módon. Ha $OT \perp \alpha$, akkor $OT' \perp \alpha'$, és természetesen $OT' = \lambda OT$. O lehet az α pontja is, ekkor $\alpha' \equiv \alpha$.

Segédtételünk a térbeli középpontos hasonlóság létezéséből és ennek tulajdonságaiból következik. Mellékeredményként következik belőle, hogy ha α és β párhuzamos síkok, $P \in \alpha$, $Q \in \beta$, és X olyan pont, melyre $PX = \lambda PQ$, akkor az X pontok mértani helye az α és β-val párhuzamos sík, melynek helyzetét λ egyértelműen meghatározza.

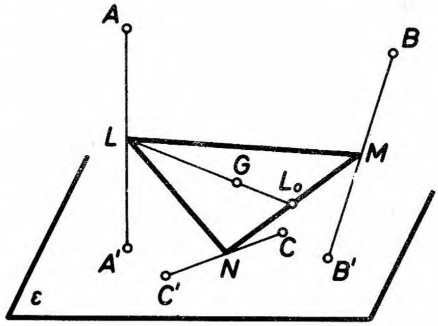
Ezután a keresett mértani helyet általánosan (az A, B, C-re vonatkozó korlátozó feltételektől függetlenül) *határozhatjuk meg.*

A *138. ábra* jelöléseit használva, legyen L_0 az MN felezőpontja. Ekkor az LMN háromszög G súlypontjára $LG = \frac{2}{3} LL_0$.

Most alkalmazzuk segédtételünket. Mivel $A' \in \varepsilon$ és $AL = \frac{1}{2} AA'$, L az A, ε és $\frac{1}{2}$

által egyértelműen meghatározott, ε-nal párhuzamos l síkban van. M, N esetében hasonlóan jutunk az ε-nal párhuzamos m, n síkokhoz. Mivel L_0 felezi MN-et, L_0 az m és n által egyértelműen meghatározott, ε-nal párhuzamos l_0 síkban van. Hasonlóan, G az l és l_0-lal párhuzamos, l_0-hoz közelebbi g harmadoló síkban van.

Megmutatjuk, hogy a g sík tetszőleges G^* pontja megfelel. Segédtételünket fordított irányban alkalmazzuk.



138. ábra

Legyen ugyanis L^* az l sík tetszőleges — *G^*-tól különböző* — pontja. Segédtételünk szerint az l_0 síkban egyetlen olyan L_0^* van, melyre $L^*G_0^* = \frac{2}{3} L^*L_0^*$ teljesül.

Legyen M^* az m sík tetszőleges — *$L^*L_0^*$-ra nem illeszkedő* — pontja. Az előzőkhöz hasonlóan egyetlen n-hez tartozó N^*-ra teljesül $M^*L_0^* = \frac{1}{2} M^*N^*$.

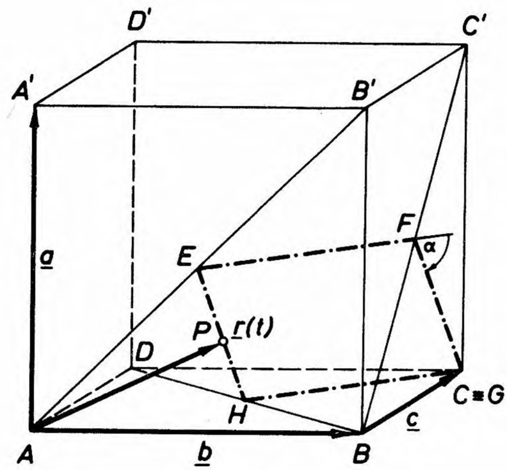
Végül AL^*, BM^* és CN^* egyértelműen meghatározzák az ε sík A^*, B^*, illetve C^* pontját. Az így kapott A^*, B^*, C^* pontokhoz a feladat feltételeinek megfelelően (a segédtétel alapján) az a nem elfajuló $L^*M^*N^*$ háromszög tartozik, melynek súlypontja éppen G^*.

Ha az A B, C pontok ε-tól mért *előjeles* távolságát a, b, c-vel jelöljük, akkor l, m, n távolsága rendre $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$; l_0 távolsága $\frac{b+c}{4}$, végül g távolsága

$$\frac{1}{3}\left[\frac{a}{2}+2\left(\frac{b+c}{4}\right)\right]=\frac{a+b+c}{6}.$$

Más megoldási lehetőség: vektorokkal.

195. Adott az $ABCDA'B'C'D'$ kocka: két szemben fekvő lapja $ABCD$ és $A'B'C'D'$, ahol $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Az X pont állandó sebességgel futja be az $ABCD$ négyzet kerületét a felírt körüljárási irányban, míg az Y pont ugyanakkora sebességgel a $B'C'CB$ négyzet kerületét futja be, szintén az itt felírt körüljárási irányban. Az X és az Y pont ugyanabban a pillanatban indul el az A, illetve B' pontból. Mi az XY szakasz Z felezőpontjának mértani helye?



139. ábra

Megoldás

A feladatot vektorok segítségével oldjuk meg. Válasszuk A-t kezdőpontnak. Legyen P mértani helyünk tetszőleges pontja. Az $\overrightarrow{AP}$ helyvektor az idő függvénye, jelöljük $\mathbf{r}(t)$-vel *(139. ábra)*. Vezessük be az $\overrightarrow{AA'}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}$ vektorokat. Tudjuk, hogy az egyenes vektoregyenletre írható $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t\cdot\mathbf{v}$ alakban, ahol $\mathbf{r}(t)$ a t paraméterhez tartozó pont; $\mathbf{v}$ az irányvektor (sebességvektor). Tegyük fel, hogy X, Y egységnyi idő alatt futja be a kocka egy élét. Így az $ABCD$ és $B'C'CB$ pályák vektoregyenletei a következők:

(1)
$$ABCD:\quad \mathbf{p}(t)=\begin{cases} t\cdot\mathbf{b}; & 0\leqq t\leqq 1\\ \mathbf{b}+(t-1)\cdot\mathbf{c}; & 1\leqq t\leqq 2\\ \mathbf{b}+\mathbf{c}-(t-2)\cdot\mathbf{b}; & 2\leqq t\leqq 3\\ \mathbf{c}-(t-3)\cdot\mathbf{c}; & 3\leqq t\leqq 4,\end{cases}$$

(2)
$$B'C'CB:\quad \mathbf{q}(t)=\begin{cases} \mathbf{a}+\mathbf{b}+t\cdot\mathbf{c}; & 0\leqq t\leqq 1\\ \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-(t-1)\cdot\mathbf{a}; & 1\leqq t\leqq 2\\ \mathbf{b}+\mathbf{c}-(t-2)\cdot\mathbf{c}; & 2\leqq t\leqq 3\\ \mathbf{b}+(t-3)\cdot\mathbf{a}; & 3\leqq t\leqq 4.\end{cases}$$

Minden időpillanatban a felezőpontokat kell tekintenünk, tehát

(3)
$$\mathbf{r}(t)=\frac{1}{2}\,[\mathbf{p}(t)+\mathbf{q}(t)]=\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot t; & 0\leqq t\leqq 1\\ \frac{1}{2}(\mathbf{a}+2\mathbf{b}+\mathbf{c})+\frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(t-1); & 1\leqq t\leqq 2\\ \mathbf{b}+\mathbf{c}-\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(t-2); & 2\leqq t\leqq 3\\ \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})+\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(t-3); & 3\leqq t\leqq 4.\end{cases}$$

Az alkalmazott módszer biztosítja, hogy mértani helyünk pontjai és csak ezek elégítik ki a (3) *egyenletrendszert.*

Elemezzük eredményünket: Mivel $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\overrightarrow{AE}$ (E az $ABB'A'$ középpontja), $\mathbf{b}+\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{c})=\overrightarrow{AF}$ (F a $B'C'CB$ középpontja) és $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\overrightarrow{EF}$, a $0\leqq t\leqq 1$ értékek mellett $\mathbf{r}(t)$ végpontja az EF szakasz pontjait futja be. Ehhez hasonlóan az $1\leqq t\leqq 2$ értékek mellett az $FG\equiv FC$ szakasz, $2\leqq t\leqq 3$ mellett a CH szakasz (H az $ABCD$ középpontja), $3\leqq t\leqq 4$ mellett a HE szakasz pontjaihoz jutunk. *Mértani helyünk tehát az EFGH zárt töröttvonal. Az egyes szakaszokhoz tartozó irányvektorokból leolvasható, hogy EFGH* 45° *szögű rombusz.* A szomszédos irányvektorok skalárszorzata: $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC}=\frac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{c}-\mathbf{a})=\frac{1}{4}$ (hiszen $\mathbf{ab}=\mathbf{bc}=\mathbf{ca}=0$, $\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2=\mathbf{c}^2=1$), és $|\overrightarrow{EF}|=\sqrt{\frac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|\overrightarrow{FC}|=\sqrt{\frac{1}{4}(\mathbf{c}-\mathbf{a})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha=45°$.

Megjegyzés

1. Természetesen vektorok használata nélkül is eljuthatunk a megoldáshoz, itt azonban különösen szerencsés az alkalmazás.

2. Az alábbi segédtétel is célhoz vezet:

Ha két pont mindegyike egyenletesen mozog egy-egy egyenesen, akkor a két pontot összekötő szakasz felezőpontja is egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Sőt, felezőpont helyett megadott arányú osztópontra is igaz a tétel. Ez vektorok nélkül is bizonyítható.

196. Adott a térben egy A pont és egy BC szakasz. Mi a mértani helye az összes olyan derékszög csúcsának, melyeknek egyik szára az A pontot, a másik szára pedig a BC szakasznak legalább egy pontját tartalmazza?

Megoldás

Legyen egy, az előírásnak megfelelő, derékszög csúcsa D, A-n átmenő szára a, másik szára e, és ennek a BC szakaszon levő pontja E.

E-t rögzítve és D-t mozgatva, D-ből az AE szakasz mindig derékszögben látszik, ezért D rajta van az AE átmérő fölötti g Thalész-gömb felületén. Fordítva, g felületének bármely D pontját véve, az ADE szög derékszög. Megfelel D gyanánt

pontja a $B'C'$ szakaszon van. E körök pontjainak összessége éppen h, a körök közül a két szélső a B' és C' középpont körüli k_b, illetve k_c. *Megrajzolva bármely olyan kört, amely átmegy A-n, és középpontja a $B'C'$ szakaszon van, azt látjuk, hogy a kör benne van a k_b és k_c által lefedett síkrészben, de nincs pontja k_b és k_c belsejének közös részében.* Bebizonyítjuk, hogy h-t azok és csak azok a pontok alkotják, amelyek

1. k_b és k_c kerületén vannak,
2. e körök egyikére nézve belső, másikára nézve külső pontok.

1. A k_b és k_c kerületi pontjaira állításunk nyilvánvaló.

2. *Legyen most D pl. a k_b belsejének egy k_c-n kívül levő pontja.* Be kell látnunk, hogy — megrajzolva a D-n és A-n átmenő k kört, melynek középpontja t-n van — k-nak az A-val átellenes E pontja a BC szakasz belsejében van, tehát az EDA derékszög megfelel a feltételnek.

Messe az AD egyenes k_b-t és k_c-t másodszor D_b-ben, illetve D_c-ben (az utóbbi azonos A-val, ha DA érinti k_c-t), és tekintsük a D, D_b, D_c pontok sorrendjét. Feltevésünk szerint D elválasztja A-t és D_b-t, viszont nem választja el A-t és D_c-t. Így D mindenesetre D_b és D_c között van, akár belül van A a D_bD_c szakaszon, akár kívül (a *140. ábrán* D, illetve D^* mutatja a kétféle helyzetet). A D_bB, DE és D_cC egyenesek párhuzamosak, mert *Thalész* tétele szerint mindegyik merőleges AD-re. Így DE a D_bB és D_cC között fekszik, E pedig valóban B és C között van. Ezek szerint D h-hoz tartozik.

Fordítva: legyen ADE egy tetszés szerinti derékszög, ahol E a BC szakasz egy belső pontja. A B-ből és C-ből AD-re bocsátott merőleges talppontja legyen D_b és D_c, akkor BD_b, CD_c és ED párhuzamosak, mert mindegyik merőleges AD-re, és D a D_b és D_c között van, mert E a B és C közé esik. Ekkor viszont D az AD_b és AD_c szakaszok egyikén rajta van, a másikon nincs (akár D_b és D_c közé esik A, akár nem). Így D feltétlenül a k_b és k_c körök egyikének belsejében, a másikon viszont kívül van.

Visszatérve a térbeli feladatra, a t körül való forgatással k_b és k_c az AB, ill. AC átmérő fölötti g_b, ill. g_c gömbfelületet írja le, k_b és k_c belső pontjai a megfelelő gömb belső pontjait súrolják. A mondottak szerint a *keresett H mértani helyet g_b és g_c felületi pontjai alkotják, továbbá azok a pontok, amelyek a gömbfelületek egyikére nézve belső, másikára nézve külső pontok.*

Ez a megállapítás érvényes akkor is, ha A a BC egyenesen van, sőt egybe is eshet B-vel vagy C-vel. Az utóbbi esetben a megfelelő gömbfelület egy pontra zsugorodik össze. Más szóval: H-t g_b és g_c felületi és belső pontjai alkotják, kivéve a két gömb közös részének belső pontjait — amennyiben ilyen közös rész létezik *(141. ábra)*.

A és *E* is, mert ekkor *a*, illetve *e* gyanánt vehetünk bármely, az *AE*-re merőleges, *A*-n, illetve *B*-n átmenő egyenest. Eszerint rögzített *E* esetén a mértani hely *g* felülete.

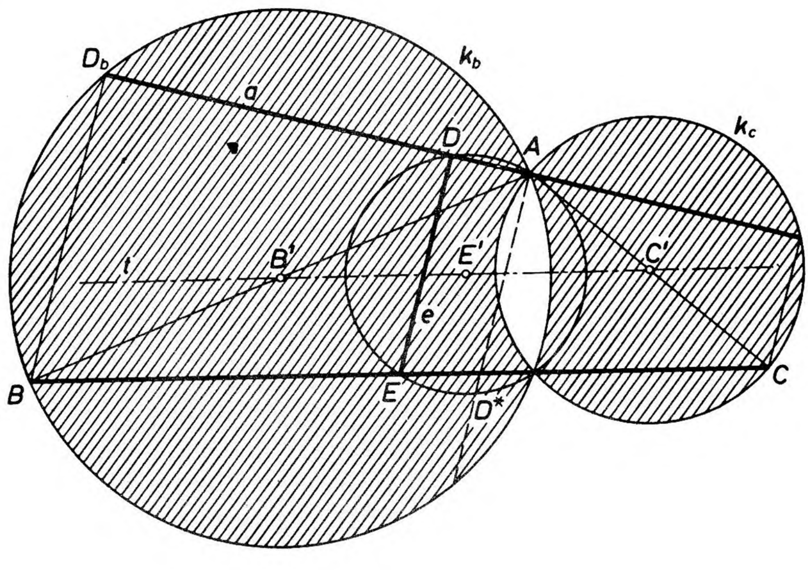
Végigtolva E-t a BC szakaszon, minden helyzethez tartozik egy gömbfelület. Mindezek pontjainak H halmaza alkotja a keresett mértani helyet, mert e pontok mind megfelelnek, más pont viszont nem felel meg.

Ezt a H halmazt írjuk most le közelebbről, hogy szemléletesebbé váljék.

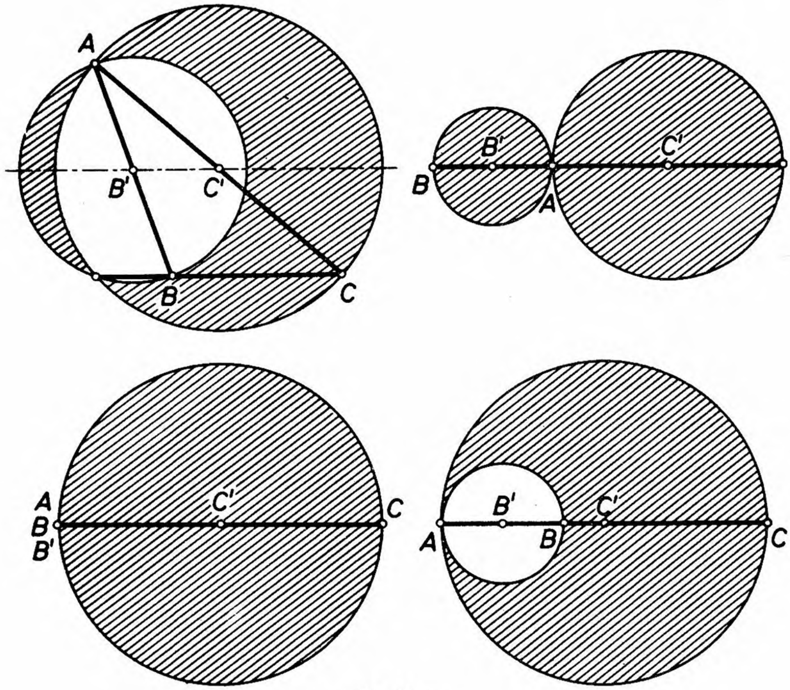
A g gömbök középpontjainak mértani helye az ABC háromszög BC-vel párhuzamos B′C′ középvonala. Itt *A* lehet a *BC* egyenesen is. *B′* és *C′* értelemszerűen *AB*, illetve *AC* felezőpontja.

A B′C′ = t egyenes a H mértani helynek forgástengelye, H-t *B′C′* körül forgatva, önmagába megy át, hiszen ez mindegyik *H*-hoz tartozó *g* gömbre külön is igaz. *Elegendő tehát megállapítanunk H* és *bármely, a t-n átmenő S sík közös pontjainak h halmazát, ezt t körül körülforgatva, megkapjuk H-t.* Ha *A* rajta van a *BC* egyenesen, akkor *t* azonos *BC*-vel, bármely *S* egyformán megfelelő; ha nincs rajta, akkor *S szerepére az ABC síkot célszerű választani.* Így a feladatot egyelőre síkra szorítkozva oldjuk meg, hiszen *D*, *E* és velük a derékszög is benne van *S*-ben *(140. ábra)*.

S minden *g*-ből egy főkört metsz ki, amely átmegy *A*-n, és amelynek közép-



140. ábra



141. ábra

197. Az $y=x^2+cx^{-2}$ függvények görbéi egy görbesereget alkotnak, ha c befutja az összes pozitív számot. Messük el egy az y tengellyel párhuzamos egyenessel a sereg minden görbéjét, és valamennyi metszéspontban húzzuk meg az illető görbe érintőjét. Bizonyítsuk be, hogy az érintők egy ponton mennek át.

Megoldás

Messük el az $y=x^2+cx^{-2}$ függvény képét az $x=x_0$ egyenessel $(x_0 \neq 0)$. A metszéspont koordinátái (x_0, y_0), ahol

(1) $$y_0=x_0^2+cx_0^{-2}.$$

A függvény deriváltja $y'=2x-2cx^{-3}$, az (x_0, y_0) pontbeli érintő egyenlete:

(2) $$y=2(x_0-cx_0^{-3})(x-x_0)+(x_0^2+cx_0^{-2})=2(x_0-cx_0^{-3})x-x_0^2+3cx_0^{-2}.$$

Ugyanígy, az érintő egyenlete egy másik, c_1 paraméterű görbénél

(3) $$y=2(x_0-c_1x_0^{-3})x-x_0^2+3c_1x_0^{-2}.$$

(2) és (3) metszéspontjának (ξ_0, η_0) koordinátáit számítjuk ki. A ξ_0 koordinátára:

$$2x_0^{-3}(c_1-c)\xi_0-3x_0^{-2}(c_1-c)=0.$$

Mivel $2x_0^{-3}(c_1-c)\neq 0$, az egyenletet ezzel elosztva:

(4) $\qquad \xi_0=\frac{3}{2}x_0,\quad$ és behelyettesítéssel $\quad \eta_0=2x_0^2.$

Ez a pont független c-től, a görbék választásától, tehát minden szóban forgó érintő ezen a (ξ_0, η_0) *ponton megy át.*

Megjegyzés

1. Ha x_0-t változtatjuk ($x_0\neq 0$), látható, hogy a ξ_0, η_0 pontok az

$$\eta_0=2\left(\frac{2}{3}\xi_0\right)^2=\frac{8}{9}\xi_0^2$$

parabolát írják le a (0, 0) csúcs kivételével.

2. A (2) érintők akkor és csak akkor haladnak át egy (ξ_0, η_0) ponton, ha erre a ξ_0-ra

$$2(x_0-cx_0^{-3})\xi_0-x_0^2+3cx_0^{-2}$$

c-től független η_0 állandó, azaz a kifejezés c szerinti deriváltja zérus. Ebből is megkaphatjuk a

$$\xi_0=\frac{3}{2}x_0,\quad \text{majd (2)-ből az}\quad \eta_0=2x_0^2 \quad \text{összefüggést.}$$

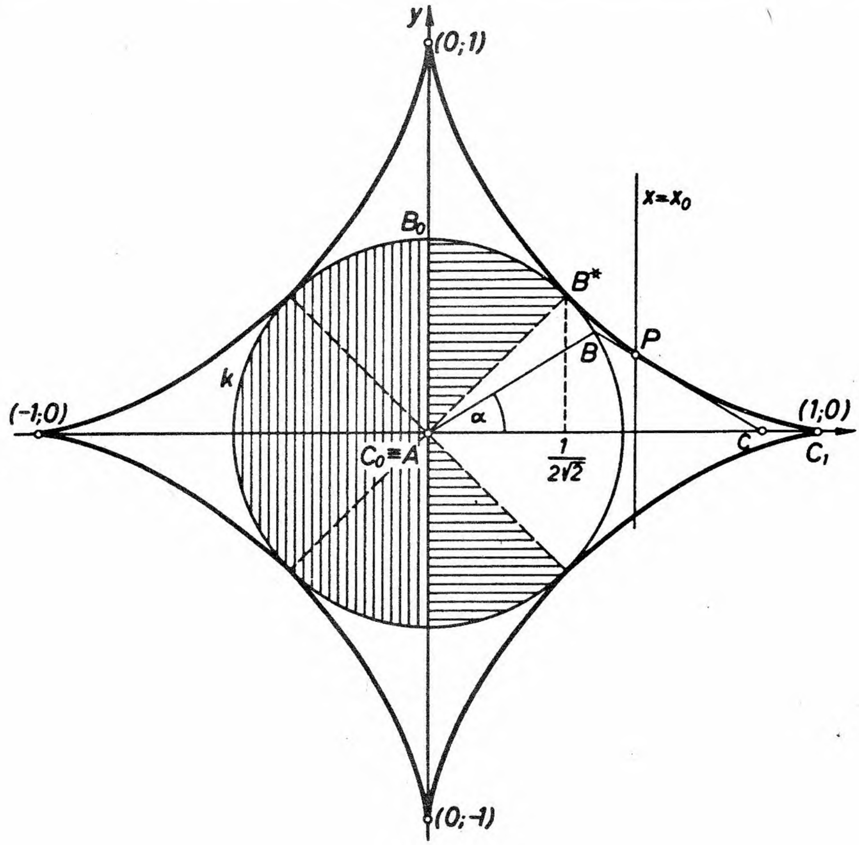
3. Feladatunk szorosan kapcsolódik a differenciálegyenletek elméletéhez, és ott messzemenően általánosítható *(57. jegyzet)*.

198. Az S síkban levő AB és BC egyenlő szakaszok B-ben csuklósan csatlakoznak. Az A pont rögzített, a C pont egy A-ból kiinduló félegyenesen mozog. Milyen idomot súrol a BC szakasz?

Megoldás

Válasszuk koordináta-rendszerünk kezdőpontjának az A pontot, a C pont a pozitív x tengelyen mozogjon. Az egységeket úgy választjuk, hogy az AB és BC szakaszok közös hossza $\frac{1}{2}$ legyen *(142. ábra)*.

Szimmetriaokokból feltehetjük, hogy a B pont ordinátája nem negatív. Sőt feltesszük, hogy B abszcisszája is pozitív, az ellenkező eset akkor és csak akkor



142. ábra

teljesül, ha a kezdőpont körül forgatjuk az egymást fedő $AB \equiv CB$ szakaszokat, és így az $\frac{1}{2}$ sugarú k körlemezt súroljuk.

Ezután tekintsük a keresett idom tetszőleges $P(x; y)$ pontját, mely a $CAB\sphericalangle = \alpha$ szöggel jellemzett csukló BC szakaszán van. B és C koordinátái:

$$B\left(\frac{1}{2}\cos\alpha; \frac{1}{2}\sin\alpha\right); \quad C(\cos\alpha; 0).$$

$P(x; y)$ kielégíti a BC egyenes egyenletét:

$$(1) \qquad y = \sin\alpha - x \operatorname{tg}\alpha \quad \left(0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad 0 < x \leqq 1\right),$$

és az

(2) $$\frac{1}{2}\cos\alpha \leqq x \leqq \cos\alpha$$
egyenlőtlenséget.

Rögzítsük az $x = x_0$ egyenest. Az α szög változtatásával a BC szakasz ezt

(1′) $$y(\alpha) = \sin\alpha - x_0 \operatorname{tg}\alpha, \quad 0 < x_0 \leqq 1$$

ordinátájú pontban metszi, de (2) alapján akkor és csak akkor, ha az α szögre még teljesül

(2′) $$x_0 \leqq \cos\alpha \leqq 2x_0.$$

Az $y(\alpha)$ folytonosan differenciálható függvény deriváltjának előjeléből megállapíthatjuk a növekedési és fogyási viszonyokat a bővebb ($0 \leqq \cos\alpha < 1$) *tartományban, majd a függvény értékkészletét a* (2′) *értelmezési tartományban (25. jegyzet).*

(3) $$\frac{dy}{d\alpha} = (\cos^3\alpha - x_0)\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

A $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ felülről nyílt szakaszon egyetlen olyan α_0 szög van, melyre

(4) $$x_0 = \cos^3\alpha_0, \quad \cos\alpha_0 = \sqrt[3]{x_0}.$$

Ha $0 \leqq \alpha < \alpha_0$, azaz $1 \geqq \cos\alpha > \sqrt[3]{x_0}$, akkor $\frac{dy}{d\alpha} > 0$, $y(\alpha)$ növő;

ha $\alpha_0 \leqq \alpha < \frac{\pi}{2}$, azaz $\sqrt[3]{x_0} > \cos\alpha > 0$, akkor $\frac{dy}{d\alpha} < 0$, $y(\alpha)$ fogyó;

ha $\alpha = \alpha_0$, akkor $\frac{dy}{d\alpha} = 0$, a függvénynek helyi maximuma van.

a) *Ha α_0-ra teljesül* (2′) (ennek első fele $x_0 \leqq 1$ miatt mindig igaz):

$$x_0 \leqq \cos\alpha_0 = \sqrt[3]{x_0} < 2x_0, \quad \text{azaz} \quad 1 \geqq x_0 > \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

akkor α_0 az $y(\alpha)$ függvény (2') értelmezési tartományába esik, és $y_0=y(\alpha_0)$ a maximális függvényérték. (1')-be helyettesítéssel

$$(5) \qquad y_0=\sin^3\alpha_0=\left(1-x_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

b) *Ha* $2x_0\leqq\cos\alpha_0=\sqrt[3]{x_0}$, *azaz* $x_0\leqq\frac{1}{2\sqrt{2}}$, *akkor az $y(\alpha)$ függvény az értelmezési tartomány végpontjában veszi fel a maximumát,* a $\cos\alpha=2x_0$ végpontban:

$$y_0=\frac{1}{2}\sqrt{1-4x_0^2}\geqq\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

A $\cos\alpha=x_0$ *most és az előző* a) *esetben is a* (2') *értelmezési tartomány végpontja, és itt a függvényérték* 0.

Mivel $y(\alpha)$ folytonos függvény, maximális és minimális értéke között minden más értéket is felvesz. *Ez azt jelenti, hogy a BC szakasz — α változtatásával — minden olyan $P(x, y)$ ponton áthalad, melyre*

a) $$\frac{1}{2\sqrt{2}}<x\leqq 1, \quad 0\leqq y\leqq\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

b) $$0<x\leqq\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad 0\leqq y\leqq\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}.$$

Előzetes megjegyzésünk szerint a keresett idomhoz tartozik még a

c) $$-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 0, \quad 0\leqq y\leqq\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$$

körnegyed; továbbá az előbbiek x tengelyre vonatkozó tükörképei.

Megjegyzés

1. Ha a *BC* szakaszt újabb $\frac{1}{2}$ nagyságú *BD* szakasz hozzátoldásával (éppen az y tengelyig) meghosszabbítanánk, és az így nyert *CD* pálcát úgy mozgatjuk, hogy *C* az x, *D* az y tengelyen csússzon, akkor az *a)*-ban kapott (4) és (5) összefüggés mintájára a *CD* pálca mozgása közben alulról érinti az

$$\left\{\begin{matrix} x_0=\cos^3\alpha_0 \\ y_0=\sin^3\alpha_0 \end{matrix}; \; 0\leqq\alpha_0<2\pi\right\}, \quad \text{azaz } x_0^{\frac{2}{3}}+y_0^{\frac{2}{3}}=1$$

egyenletű *asztroid* görbét (nevét csillagalakjáról kapta). Idomunkat

ennek két íve határolja *(142. ábra)*. Az asztroidnak másféle származtatásai is vannak *(56. jegyzet)*.

2. Feladatunkkal együtt megoldottuk azt is, milyen pályát súrolnak az autóbusz csuklós ajtói.

9. Szerkesztések

199. Adva van egy egyenlő szárú trapéz szára, átlóinak metszéspontja és a köré írt kör. Szerkesszük meg a trapézt!

Megoldás

A feladat szövegében a „trapéz szára" helyett helyesebb a „trapéz szárának hossza" kifejezés, hiszen éppen a szár helyzetét kell meghatároznunk.

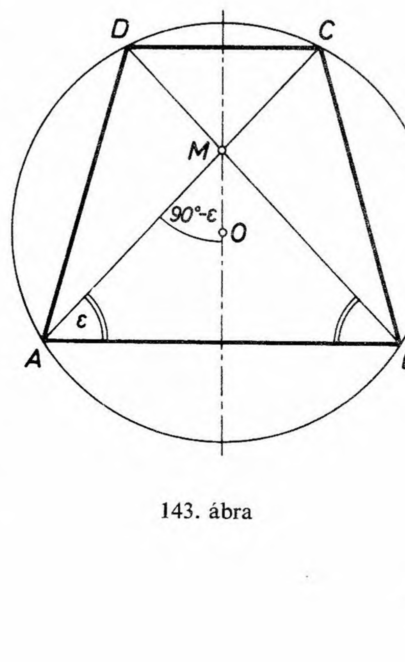
A keresett ABCD trapéz szimmetrikus az átlók adott M pontját és a körülírt kör O középpontját összekötő OM egyenesre (143. ábra). A szár hossza adott, és ezzel adott a hozzá tartozó látószög is, ezzel meghatározhatjuk a szár helyzetét is.

Bárhol veszünk fel a körben a trapéz szárával megegyező nagyságú húrt *(ennek nyilván a kör átmérőjénél kisebbnek kell lennie)*, a hozzá tartozó, 90°-nál kisebb ε kerületi szög megszerkeszthető. De akkor megszerkeszthető az $AMO\sphericalangle = 90° - \varepsilon$ szög is, hiszen a szimmetria miatt $MO \perp AB$.

Az MO szimmetriatengely két oldalán az M pontban felmérve a $90° - \varepsilon$ szögeket, megkaphatjuk a trapéz csúcsait, *ha az M pont a kör belsejében van.*

Az így kapott trapéz valóban szimmetrikus, a szerkesztés miatt szára adott hosszúságú, hiszen egyenlő kerületi szögekhez egyenlő húrok tartoznak.

A feladatnak egyetlen megoldása van a — húr hosszára és az M pont helyzetére vonatkozó — már említett feltételek mellett. Ez akkor is áll, ha M és O egybeesik. Ilyenkor az adott hosszú-



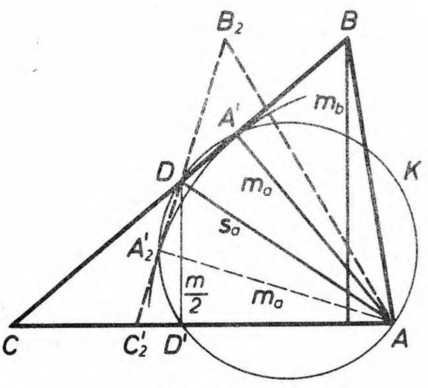
143. ábra

ságú szárat bárhol felvehetjük, s trapézunk téglalap lesz, de az így lehetséges téglalapok forgatással egymásba vihetők.

200. Adva van az ABC háromszögnek az A és B csúcsból kiinduló m_a, m_b magasságvonala és az A csúcsból kiinduló s_a súlyvonala. Szerkesszük meg a háromszöget.

Megoldás

Képzeljük a feladatot megoldottnak, és legyen a BC oldal felezőpontja D, A vetülete BC-n A', továbbá D vetülete AC-re D' *(144. ábra).*



144. ábra

A' és D' az $AD=s_a$ átmérő fölötti k Thalész-körön vannak, úgyhogy $AA'=m_a$ és $DD'=\frac{1}{2}m_b$. E kör megrajzolása és rajta A', D' kijelölése után a DA' és AD' egyenesek metszéspontja C, végül C-nek D-re való tükörképe B.

Így ugyanis $CB\equiv DA'\perp AA'$, tehát m_a valóban magasság. A tükrözés folytán D felezi BC-t, és így DA súlyvonal, végül B-nek AC-től való távolsága DD' kétszerese, tehát m_b.

A szerkesztés végrehajtható, ha $m_a\leqq s_a$ és $\frac{1}{2}m_b\leqq s_a$. Általában két megoldás van, ugyanis A' és D' eshetnek AD azonos vagy különböző partjára is (144. ábra). Részletesebben:

Ha $m_a=s_a$ és $m_b<2s_a$, akkor $A'\equiv D$, és DA' szerepét a k-hoz D-ben húzott érintő játssza. Ilyenkor a második megoldás elmarad, a kapott háromszög egyenlő szárú.

Hasonlóan $\frac{1}{2}m_b=s_a$ és $m_a<s_a$ esetén $D'\equiv A$, AD' szerepét k-nak A-beli érintője játssza, és lényegében egy megoldás van, mert a két megoldás egymás tükörképe.

$m_a=s_a$ és $\frac{1}{2}m_b=s_a$ egyidejű fennállása esetén nincs megoldás, mert a két érintő párhuzamos, C nem jön létre.

Végül $m_a=\frac{1}{2}m_b<s_a$ esetén csak egy megoldás van, mert az egyik esetben AD' és DA' párhuzamosak. D' és A' egybeesése természetesen lehetséges.

201. Szerkesszük meg a derékszögű háromszöget, ha adott az átfogója, és tudjuk, hogy az átfogóhoz tartozó súlyvonal mértani középarányos a két befogó között.

Megoldás

Az $AB=c$ átfogó ismeretében csak a derékszög C csúcsát kell megszerkesztenünk. Erre mértani hely az AB fölötti Thalész-kör, a háromszög k körülírt köre *(145. ábra).*

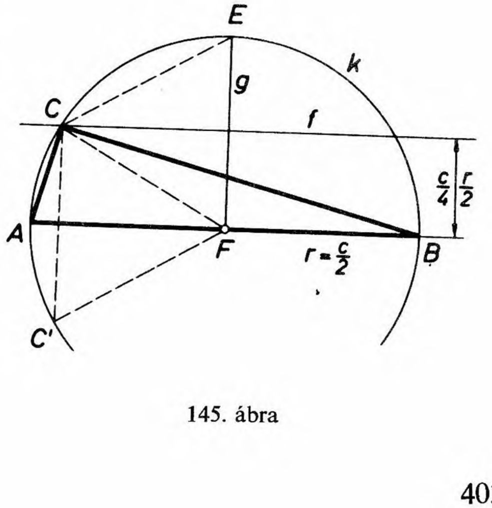
Az átfogó F felezőpontja egyben k középpontja, ezért a CF súlyvonal egyenlő az átfogó felével. Így a feltétel szerint

$$ab=\left(\frac{1}{2}c\right)^2=\frac{1}{4}c^2.$$

A bal oldal a háromszög kétszeres területét jelenti, az pedig másképpen cm_c, ahol m_c a c-hez tartozó magasságvonal.

$$cm_c=\frac{1}{4}c^2, \quad \text{ebből} \quad m_c=\frac{c}{4}=\frac{r}{2}.$$

Ennek alapján a háromszöget a következőképpen szerkeszthetjük meg: Az $AB=2r$ átfogó felett megrajzoljuk a k *Thalész-kört.* Az AB-vel párhuzamos $\frac{r}{2}=\frac{c}{4}$ távolságban haladó egyenespár metszi ki a k körből a megfelelő C pontokat. Az így kapott négy megoldás mind egybevágó, úgyhogy a feladatnak egy megoldása van.



145. ábra

A nyert háromszög (ABC) megfelelő, mert derékszögű, továbbá c-re merőleges magassága $\frac{r}{2}=\frac{c}{4}$, kétszeres területe $c\cdot\frac{c}{4}=\frac{1}{4}c^2$, és ez egyenlő ab-vel. Innen a befogók mértani

középarányosa: $\sqrt{ab}=\frac{c}{2}$, és ezzel teljesül a követelmény, mert a kérdéses súlyvonal hossza ugyancsak $\frac{c}{2}$.

Megjegyzés

1. A *145. ábrá*ról könnyen leolvasható, hogy a C csúcsot az AB ívét felező E pont ismeretében is megszerkeszthetjük, hiszen $EC=r$. Ugyancsak leolvasható, hogy a $CFA\sphericalangle=30°$, ez is egyszerű szerkesztéshez vezet.

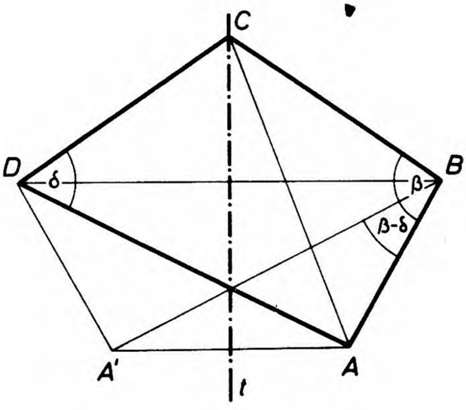
2. Oldjuk meg a feladatot a befogók kiszámításával és a mértani középre vonatkozó ismert tételek felhasználásával is.

202. Az $ABCD$ konvex négyszögben $BC=CD$. Adottak az AB és AD oldalak, továbbá a B és D csúcsnál levő szögek. Szerkesszük meg a négyszöget!

I. megoldás

Legyen $ABCD$ egy a követelményeknek megfelelő négyszög. *A betűzést válasszuk úgy, hogy $AB\leqq AD$ legyen. Jelöljük a B-nél és D-nél levő szögeket β-val, illetve δ-val. Az utóbbiak nagyságviszonya már nem tetszőleges. A megoldás kulcsa, hogy a szög- és oldaladatokat „egymáshoz közelebb" vigyük.*

1. *Tegyük fel először, hogy $AB<AD$.* Ekkor az ABD háromszögben a kisebb AB oldallal szemben kisebb szög van, mint a nagyobb AB oldallal szemben, ezért $ADB\sphericalangle<DBA\sphericalangle$. Mivel a négyszögben $BC=DC$, ezért $CDB\sphericalangle=CBD\sphericalangle$.



146. ábra

A négyszög konvex, tehát a DB átló elválasztja az A és C pontokat. Ennek alapján $\delta=CDB\sphericalangle+BDA\sphericalangle=$ $=CBD\sphericalangle+BDA\sphericalangle<CBD\sphericalangle+$ $+DBA\sphericalangle=\beta$.

A feladat megoldhatóságának $AB<AD$ esetben szükséges feltétele tehát, hogy $\delta<\beta$ legyen (146. ábra). Tegyük fel, hogy ez teljesül.

Tükrözzük a négyszöget a BD átló t felező merőlegesére. Ekkor A tükörképe a tőle különböző A' ($AB<<AD$), a B pont D-be, D B-be jut, C helyben marad ($BC=CD$ miatt). $A'BC\sphericalangle$ az $ADC\sphericalangle$ tükörképe, így

$A'BC\sphericalangle = \delta$. A négyszög konvex, A-val együtt A' is a BCD konvex szögtartományban van. Ebből következik, hogy $ABA'\sphericalangle = \beta - \delta$, tehát *az ABA' háromszög megszerkeszthető.*

A szerkesztés menete: Az ABA' háromszöget az $ABA'\sphericalangle = \beta - \delta$ szög és az azt közrefogó AB és $A'B = AD$ oldalak ismeretében megszerkeszthetjük. Az AA' szakasz t felező merőlegesére tükrözve B-t, megkapjuk D-t.

Mérjük fel az AB szakasz B végpontjában a β szöget úgy, hogy D ebbe a szögtartományba essen. *Ha ez nem lenne lehetséges, mert $\beta \leqq DBA\sphericalangle$, akkor a feladat nem megoldható.*

Ha a β szög A-t nem tartalmazó szára metszi t-t, akkor megkapjuk a C csúcsot. *Ha a β szög A-t nem tartalmazó szára nem metszi a t egyenest, akkor a feladat nem oldható meg.*

2. *Tegyük fel, hogy $AB = AD$.* Ekkor a négyszög deltoid, melynek szimmetriatengelye az AC átló. *Ekkor δ és β egymás AC-re vonatkozó tükörképei, tehát egyenlőknek kell lenniük,* különben nem oldható meg a feladat.

Tegyük fel, hogy $\beta = \delta$. CA szimmetriatengely, ezért felezi a $DCB\sphericalangle$-et és a $DAB\sphericalangle$-et. *Az ABC háromszögben csak AB és a β szög adott.* A β szög A-t nem tartalmazó szárán C-t tetszőlegesen felvehetjük, csak arra kell vigyázni, hogy A-nál és C-nél hegyesszög legyen. A B pontot AC-re tükrözve, megfelelő négyszöget kapunk. *A feladatnak* a 2. esetben *végtelen sok megoldása van.*

II. megoldás (Útmutatás)

Forgassuk el a CBA háromszöget C körül úgy, hogy B D-be kerüljön. Az így kapott $A'DA$ háromszög két oldal és a $\beta + \delta$ közbezárt szög ismeretében megszerkeszthető.

Megjegyzés

Látható, hogy a feladat nehezebb részét a szerkeszthetőség kérdése, a diszkusszió jelenti.

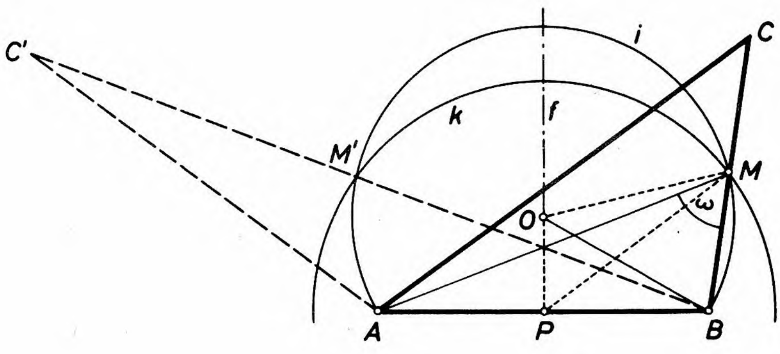
203. Szerkesztendő az ABC háromszög, ha adva van két oldalának $AC = b$, $AB = c$ hossza és az $AMB = \omega$ szög, ahol M a BC szakasz középpontja; ω hegyesszög. Bizonyítandó, hogy a feladat akkor és csak akkor oldható meg, ha

$$b \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \leqq c < b. \tag{1}$$

Milyen esetben áll fenn az egyenlőségi jel?

I. megoldás

Az AB szakasz középpontját P-vel jelölve, *az ABM háromszög MP súlyvonala egyben az ABC háromszögnek középvonala, s így $\frac{b}{2}$ hosszúságú (147. ábra)*. Ennek alapján a háromszög megszerkeszthető:



147. ábra

Az $AB=c$ szakaszt felvéve, *M rajta van egyrészt az AB szakaszhoz tartozó ω látószögű i köríven, másrészt a P körül $\frac{b}{2}$ sugárral írt k körön.* (Elég mindkettőt az AB egyenes egyik partján megszerkeszteni. A másik parthoz tartozó megoldások egybevágók a mi megoldásainkkal.) Ezután C a B pont M-re vonatkozó tükörképe.

A szerkesztés helyessége nyilvánvaló. A megoldások száma 2, 1 *vagy* 0 *i és k közös pontjainak száma szerint.* (Ha 2 metszéspont van, akkor az ABM és BAM' háromszögek az AB szakasz f felező merőlegesére tükrösek, és így egybevágók, az ABC és ABC' háromszögek azonban nem egybevágók, és mindkettő megfelel.)

Megvizsgáljuk, mi az M pont létrejöttének szükséges és elégséges feltétele. Először megmutatjuk, hogy (1) *szükséges feltétel.*

Az AMB és AMC háromszögekben az MA oldal közös, $MB=MC$. A közbezárt szögek közül $AMB=\omega$ hegyesszög, az AMC szög tompaszög, így $AB<AC$, másképpen

(2) $$c<b.$$

Legyen az i körív középpontja O. Ha az M metszéspont létrejön, akkor

$$(3) \qquad PO+OM \geqq PM = \frac{b}{2}.$$

Mivel ω hegyesszög, azért O az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint i. A középponti és kerületi szögek közti összefüggés szerint a $POB\sphericalangle = \omega$, tehát

$$PO = PB \operatorname{ctg} \omega = \frac{c}{2} \operatorname{ctg} \omega, \quad OM = OB = \frac{PB}{\sin \omega} = \frac{c}{2 \sin \omega}.$$

Ezeket (3)-ba beírva (és a két oldalt felcserélve),

$$\frac{b}{2} \leqq \frac{c}{2}\left(\operatorname{ctg} \omega + \frac{1}{\sin \omega}\right) = \frac{c}{2} \cdot \frac{1+\cos \omega}{\sin \omega}.$$

A $\cos \omega = 2\cos^2 \frac{\omega}{2} - 1$ és a $\sin \omega = 2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}$ azonosságot alkalmazva,

$$\frac{b}{2} \leqq \frac{c}{2} \frac{2\cos^2 \frac{\omega}{2}}{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}} = \frac{c}{2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}},$$

ez pedig (1) első egyenlőtlenségének átrendezett alakja.

Fordítva: ha az (1) teljesül, akkor (3) is, de akkor a P-ben AP-re emelt merőleges előbb metszi i-t, mint k-t, viszont (2) folytán A és B, az i körív végpontjai, k belsejében vannak, tehát i-nek és k-nak van közös pontja.

Az egyenlőség (1)*-ben akkor és csak akkor teljesül, ha* (3)*-ban is egyenlőség áll fenn, azaz M éppen a PO félegyenesre esik.* Ekkor k és i érintkeznek, a feladatnak egy megoldása van, a kapott ABC háromszögben a $CAB\sphericalangle = 90°$.

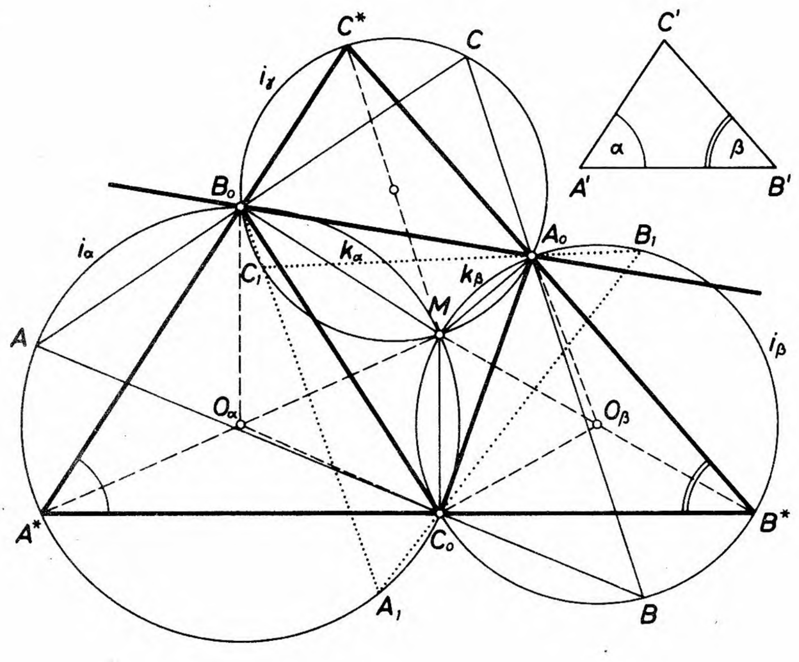
II. megoldás (a szerkesztésre)

Húzzuk meg egy tetszés szerinti B^*C^* szakasz M^* felezőpontjából az M^*B^*-gal ω szöget bezáró félegyenest. Messe ez a B^* és C^* alappontokhoz és a $c:b$ arányhoz tartozó *Apollóniosz*-kört A-ban. Ekkor $A^*B^*C^*$ a keresetthez hasonló háromszög. A^*-tól a B^*, illetve a C^* irányában felmérve az $A^*B = c$, illetve $A^*C = b$ szakaszt, az A^*BC háromszög nyilván megfelelő.

204. Adottak az $A_0B_0C_0$ és $A'B'C'$ hegyesszögű háromszögek. Szerkesszünk az $A_0B_0C_0$ háromszög köré olyan ABC háromszöget, amely hasonló az $A'B'C'$ háromszöghöz (az A, B, C pontok rendre az A', B', C' pontoknak feleljenek meg), és C_0 az AB oldalnak, A_0 a BC oldalnak, és végül B_0 a CA oldalnak belső pontja. Szerkesszük meg ezután az ilyen ABC háromszögek közül azt is, amelyiknek legnagyobb a területe.

Megoldás

a) *A keresett háromszögek A csúcsa feltétlenül a B_0C_0 szakasz fölé kifelé rajzolt $C'A'B' \sphericalangle = \alpha$ látószögű i_α köríven van,* a B csúcs pedig a C_0A_0 szakasz fölé kifelé rajzolt $A'B'C' \sphericalangle = \beta$ látószögű i_β köríven *(148. ábra).*



148. ábra

Ha a C_0 csúcson át olyan egyenest veszünk fel, amely az i_α körívet az A, az i_β körívet pedig a B pontban metszi, az AB_0 és BA_0 egyenesek metszéspontját C-vel jelöljük, akkor egy ABC háromszöghöz jutunk.

b) *Világos, hogy az $A'B'C'$ és a nyert ABC háromszög hasonló, és az AB, BC, CA egyenesek rendre átmennek a C_0, A_0, B_0 pontokon, de A_0 és B_0 akkor és csak akkor lesz a BC, illetve CA oldalnak belső pontja, ha C az A_0B_0 egyenes C_0-lal ellentétes partjára kerül, azaz A és B mindegyike az A_0B_0 egyenesnek ugyanazon a partján van, mint C_0.* (A *148. ábrán* az $A_1B_1C_1$ háromszög esete mutatja, hogy ez nem mindig teljesül.) Láthatjuk, hogy tetszőlegesen sok megfelelő háromszög szerkeszthető, hiszen csak az i_α, i_β íveknek az A_0B_0 egyenes C_0-lal szemköztes partján levő pontjait kell kizárnunk.

c) *Az előbbi ABC háromszögek egymáshoz is hasonlók, ezért közülük az a*

legnagyobb területű, amelyikben például az AB oldal a legnagyobb. Ennek megkereséséhez segítségül vesszük az i_α és i_β íveket tartalmazó k_α és k_β körök C_0-tól különböző M metszéspontját.

1. *Bebizonyítjuk, hogy M i_α, i_β mindegyikének a kiegészítő ívén, az $A_0B_0C_0$ háromszög belsejében van.* Jelölje O_α és O_β a k_α, illetve k_β körök középpontjait. Mivel α, β, γ és az $A_0B_0C_0$ háromszög α_0, β_0, γ_0 szögei is hegyesszögek, ezért

$$O_\alpha C_0 O_\beta \sphericalangle = O_\alpha C_0 B_0 \sphericalangle + B_0 C_0 A_0 \sphericalangle + A_0 C_0 O_\beta \sphericalangle = \\ = (90° - \alpha) + \gamma_0 + (90° - \beta) = \gamma + \gamma_0 < 180°.$$

Ebből következik, hogy M létezik, és nem lehet i_α és i_β metszéspontja.

Nem lehet M például i_α és az i_β-t kiegészítő ív metszéspontja sem, mert akkor B_0 csak az A_0C_0 húr és a $180° - \beta$ látószögű ív közé eshetne, de akkor B_0-ból az A_0C_0 szakasz $180° - \beta$-nál nem kisebb, tompaszögben látszana.

Tehát M a $B_0C_0A_0$ szögtartományba esik, továbbá

$$360° > B_0MC_0 \sphericalangle + C_0MA_0 \sphericalangle = (180° - \alpha) + (180° - \beta) = 180° + \gamma > 180°.$$

Ebből következik, hogy M az A_0B_0 szakasz C_0 felőli oldalán van, és

(1) $$A_0MB_0 \sphericalangle = 180° - \gamma.$$

M tehát az A_0B_0 szakasz fölé kifelé rajzolt $B'C'A' \sphericalangle = \gamma$ látószögű i_γ körív kiegészítő ívén van (a teljes kör k_γ).

2. *A C_0-on áthaladó AB oldal változása közben az ABM háromszögek egymáshoz hasonlók,* hiszen M helyzete miatt az MAC_0 és MBC_0 kerületi szögek állandók. AB tehát akkor a legnagyobb, ha MA a legnagyobb, azaz k_α-ban átmérő.

3. *Az így kapott maximális területű $A^*B^*C^*$ háromszögről még be kell látnunk, hogy valódi körülírt háromszöge $A_0B_0C_0$-nak.* Mivel MA^* átmérő k_α-ban, ezért *Thalész*-tétele (és megfordítása) alapján

$$MB_0 \perp A^*C^*, \quad MC_0 \perp A^*B^*, \quad MA_0 \perp B^*C^*,$$

hiszen MB^* is átmérő k_β-ban. A *b)*-ben mondottak szerint meg kell mutatnunk, hogy A^* és B^* az A_0B_0 egyenesnek ugyanazon a partján van, mint C_0.

Valóban az

$$A_0B_0A^* \sphericalangle = A_0B_0M \sphericalangle + MB_0A^* \sphericalangle < \beta_0 + 90° < 180°, \\ B_0A_0B^* \sphericalangle = B_0A_0M \sphericalangle + MA_0B^* \sphericalangle < \alpha_0 + 90° < 180°.$$

Ezzel a megoldást befejeztük.

Megjegyzés

1. A feladat megoldása túlságosan „precízkedőnek" tűnhet, hiszen az egyes pontok, alakzatok elhelyezkedésére vonatkozóan olyasmiket bizonyítottunk, ami szemmel láthatólag igaz. Másoknak viszont hiányérzetük marad, hiszen az elfogadott állítások nem mindig maguktól értetődőek. Ajánljuk az olvasónak, hogy az egyes lépések szükségességét ellenpéldákkal támassza alá, vizsgálja meg azokat az eseteket, ahol az $A_0B_0C_0$ és $A'B'C'$ háromszögek valamelyike tompaszögű.

2. Nem használtuk ki a megoldásban, de azonnal látszik, hogy az *a)* pontban szerkesztett ABC háromszög C csúcsa mindig rajta van a k_γ körön. Általánosabban igaz a *Miquel-tétel:* ha az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesének egy-egy tetszőleges, a csúcsoktól különböző pontja C_0, A_0, B_0, akkor az $A_0B_0C_0$, C_0AB_0 és B_0CA_0 háromszögek köré írt köröknek van egy közös M pontja.

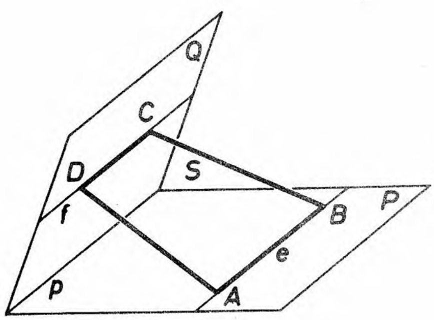
Az M pontot *Miquel-pontnak* is mondják. A körgeometriában *(51. jegyzet)* a tétel még tovább általánosítható.

205. A P és Q sík egymást a p egyenesben metszi, és A a P síknak, C a Q síknak olyan pontja, mely nincs rajta p-n. Megszerkesztendő az az $ABCD$ szimmetrikus trapéz ($AB \parallel CD$), melynek B csúcsa a P, D csúcsa a Q síkban van, és amelybe kört írhatunk.

Megoldás

a) A keresett trapéz S síkja metszi a P síkot, mert van pontja P-ben: A, és van pontja P-n kívül: C. A metszésvonal éppen a meghatározandó $AB = e$ egyenes *(149. ábra)*. Ugyanígy S a Q síkot a keresett $CD = f$ egyenesben metszi.

Az e és f egyenesek és így az S sík is párhuzamosak p-vel. Ha ugyanis pl. AB metszené p-t E-ben, akkor E a Q-nak is pontja volna, tehát S-nek és Q-nak CD metszésvonala azonos lenne CE-vel, vagyis AB és CD metszenék egymást. Ezek szerint e és f egyértelműen megszerkeszthetők, és *a feladat síkbeli szerkesztéssé egyszerűsödik.*

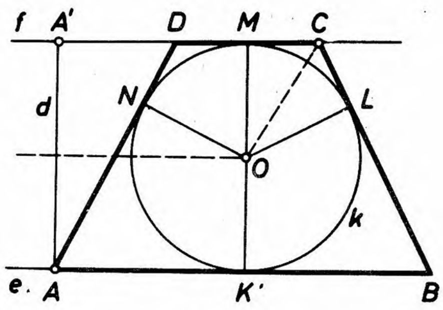


149. ábra

b) Tekintsük a feladatot megoldottnak, és használjuk a *150. ábra* jelöléseit. A vetülete f-en legyen A'.

A trapéz szimmetrikus voltából nyilvánvaló, hogy szimmetriatenge-

lye átmegy a beírt kör középpontján és a K és M érintéspontokon is, tehát K és M felezik a párhuzamos oldalakat. A KM tengely elválasztja A-t és C-t, és így A'-t és C-t is. AA' párhuzamos KM-mel, ezért $MA'=KA$; a szimmetriából $KA=KB$. Végül a B és C-ből húzott érintőszakaszok egyenlőségéből $KB=LB$ és $CM=CL$. Ezekből egyrészt $MA'=LB$, másrészt



150. ábra

$$CA'=CM+MA'=CL+LB=CB.$$

c) Eszerint B rajta van a C körül CA' sugárral írt körön. B-t ismerve, D-t a C-nek AB felező merőlegesére való tükörképe adja meg. Így eljárást kaptunk a keresett trapéz megszerkesztésére.

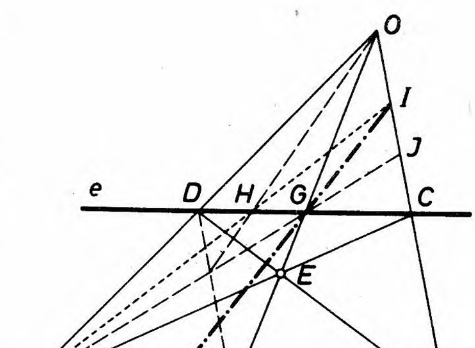
B-re 2, 1, illetve 0 megoldást kapunk aszerint, hogy a C körül CA' sugárral írt kör metszi, érinti, illetve nem metszi e-t, más szóval, hogy CA' nagyobb, egyenlő, illetve kisebb az e, f egyenespár $d=AA'$ távolságánál. B-ből D szerkesztése mindig egyértelmű. Ha $CA'=d$, akkor az $ABCD$ trapéz négyzet.

d) A b)-ben követett gondolatmenetet megfordítva beláthatjuk, hogy az így szerkesztett trapéz megfelel a követelményeknek: A $BCA'\sphericalangle$ felezőjének és az e, f egyenesek középpárhuzamosának O metszéspontja rajta van az AB szakasz felező merőlegesén, így a DC, CB, BA oldalakat érintő kör az AD oldalt is érinti.

206. Adva van egy egyenesszakasz és egy ezzel párhuzamos egyenes. Szerkesszük meg csak vonalzó segítségével a szakasz harmadrészét.

I. megoldás

Vetítsük az AB szakaszt egy tetszőleges O pontból az adott e egyenes DC szakaszára (151. ábra). Az $ABCD$ pontok által meghatározott trapéz nem



151. ábra

párhuzamos oldalainak O metszéspontját az átlók E metszéspontjával összekötő egyenes — mint ismeretes — *felezi a trapéz alapjait.* Legyenek a felezőpontok *F* és *G*. Ismételjük meg az előbbi szerkesztést az *AFGD* trapézra, és jelöljük a *DG* szakasz felezőpontját *H*-val. A *HG* szakasz a *HC* szakasznak harmadrésze.

Ha az *AH* egyenes az *OB* szakaszt *I*-ben, az *IG* egyenes az *AB* szakaszt *K*-ban metszi, akkor

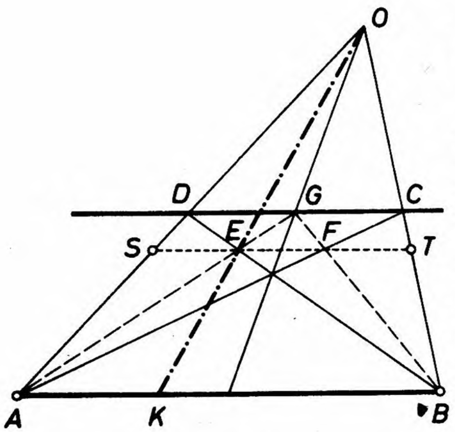
$$AK : KB = HG : GC = 1 : 2,$$

így az *AK* szakasz az *AB* szakasz harmadrésze.

II. megoldás

A CD szakaszt felező G pont megszerkesztése után (152. ábra) tekintsük a DB és AG szakaszok E metszéspontját. Azt állítjuk, hogy a keresett K pontot az OE egyenes metszi ki az AB szakaszból.

Ha ugyanis az *E* ponton átmenő *AB* szakasszal párhuzamos egyenes az *AO*, illetőleg a *BO* szakaszokat az *S*, illetve *T* pontban metszi, akkor az *ST* szakasz és a *GB* szakasz *F* metszéspontjára *SE*=*EF* (az *ABGD* trapézból), és hasonlóan *EF*=*FT*. (Ezek az egymással egyenlő *DG* és *GC* vetületei a *B* pontból.) Ennélfogva *AK*: *KB*=*SE*: *ET*= =1 : 2, és ezt akartuk bizonyítani.



152. ábra

Megjegyzés

1. Amíg az első megoldásban tíz egyenes vonalat használtunk fel a szerkesztéshez, addig a második megoldásban csak hét szükséges.

2. A vonalak száma hét akkor is, ha a *151. ábrán E* és *G* megszerkesztése után az *AG* egyenes és *BO J* metszéspontját *E*-vel összekötjük. Igazoljuk, hogy így is az *AB* szakasz *K* harmadoló pontjához jutunk.

3. A feladatot mindkét megoldás módszerével általánosíthatjuk: Csupán vonalzóval az előbbi AB szakasz n egyenlő részre osztható ([17] 2., *33. jegyzet*).

207. Az $ABCD$ síkbeli négyszög A csúcsának B-re, B-nek C-re, C-nek D-re és D-nek A-ra vonatkozó tükörképét jelöljük rendre A_1, B_1, C_1, D_1-gyel. Szerkesszük meg az $ABCD$ négyszöget, ha adott az A_1, B_1, C_1 és D_1 pont.

I. megoldás

A 153. ábrán megrajzoltuk a feltételeknek megfelelő ABCD és $A_1B_1C_1D_1$ négyszögeket. A megadott osztóviszonyok alapján a párhuzamos szelők tétele segítségével meghatározzuk az A, B, C, D pontok helyzetét kijelölő osztóviszonyokat.

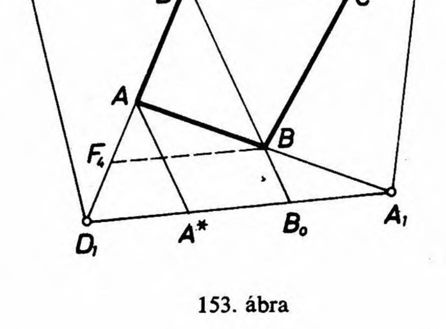
Hosszabbítsuk meg a BD átlót, majd az A, illetve C csúcson keresztül húzzunk ezzel párhuzamost a D_1A_1, illetve B_1C_1 egyenesig. A metszéspontokat a *153. ábra* szerint B_0, D_0, A^*, C^* jelöli.

Alkalmazzuk a párhuzamos szelők tételét. $AB=BA_1$ miatt $A^*B_0=B_0A_1$, $D_1A=AD$ miatt $D_1A^*=A^*B_0$. Tehát A^* és B_0 harmadolják a D_1A_1 szakaszt. Hasonlóan látható be, hogy C^* és D_0 is harmadolják a B_1C_1 szakaszt. Ugyancsak a párhuzamos szelők tétele miatt a B-n áthaladó, D_1A_1-gyel párhuzamos egyenes a D_1A szakaszt F_4-ben felezi, a D-n áthaladó, B_1C_1-gyel párhuzamos egyenes a B_1C szakaszt F_2-ben felezi; továbbá

$$B_0B : BD = D_1F_4 : F_4D = 1 : 3; \quad BD : DD_0 = BF_2 : F_2B_1 = 3 : 1.$$

Ezután az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög ismeretében már az ABCD négyszög megszerkeszthető. Az előbbi B_0, D_0 harmadoló pontok megszerkesztése után a B_0D_0 szakaszt öt részre osztjuk, a B_0-hoz és D_0-hoz legközelebbi osztópontok B, ill. D, a BB_1 szakasz felezőpontja C, a DD_1 szakasz felezőpontja A.

Az így szerkesztett ABCD négyszög valóban megfelel. Ezt az előbbi gondolatmenet visszafelé olvasásával, a felhasznált állítások megfordításával könnyen beláthatjuk: B valóban felezi az AA_1 szakaszt, D pedig felezi a CC_1 szakaszt.

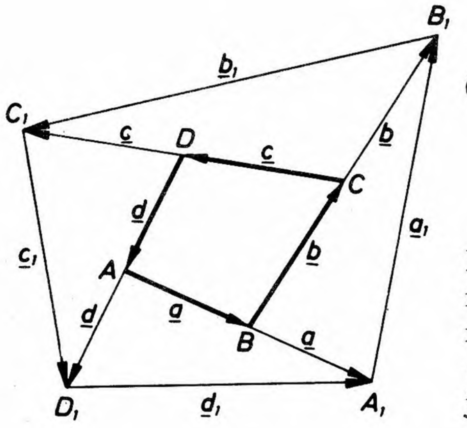


153. ábra

II. megoldás

A kész ábra elemzése és a szerkesztés is elvégezhető a vektor-alapműveletek segítségével.

A *154. ábrán* az $ABCD$ négyszög és az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög oldalszakaszait is egymáshoz fűzött vektorokkal jellemeztük. A feladat feltételei alapján felírhatjuk az alábbi vektor-egyenletrendszert, melyből $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1$ ismeretében $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$-t kell kifejezni:



154. ábra

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= -\mathbf{a}+2\mathbf{b}, \\ \mathbf{b}_1 &= -\mathbf{b}+2\mathbf{c}, \\ \mathbf{c}_1 &= -\mathbf{c}+2\mathbf{d}, \\ \mathbf{d}_1 &= -\mathbf{d}+2\mathbf{a}. \end{aligned}$$

Ha az első egyenlethez hozzáadjuk a második kétszeresét, a harmadik 4-szeresét, a negyedik 8-szorosát, akkor $\mathbf{a}_1+2\mathbf{b}_1+4\mathbf{c}_1+8\mathbf{d}_1=15\mathbf{a}$. Hasonlóan fejezhető ki a többi ismeretlen is. Az (1) rendszer megoldásai:

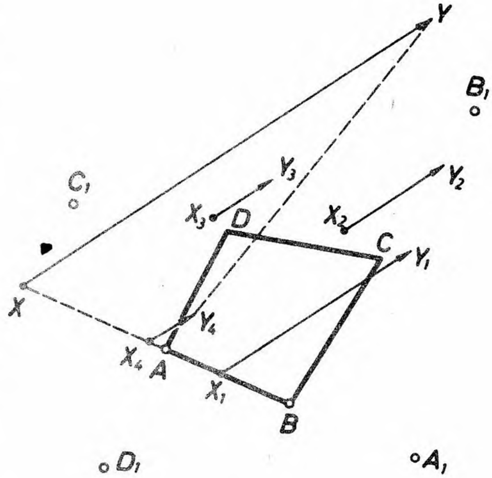
$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{15}(\mathbf{a}_1+2\mathbf{b}_1+4\mathbf{c}_1+8\mathbf{d}_1), \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{15}(8\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1+2\mathbf{c}_1+4\mathbf{d}_1), \\ \mathbf{c} &= \frac{1}{15}(4\mathbf{a}_1+8\mathbf{b}_1+\mathbf{c}_1+2\mathbf{d}_1), \\ \mathbf{d} &= \frac{1}{15}(2\mathbf{a}_1+4\mathbf{b}_1+8\mathbf{c}_1+\mathbf{d}_1). \end{aligned}$$

Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1$ vektorok ismeretében az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok meg is szerkeszthetők, ezért nem okoz gondot $A_1B_1C_1D_1$ ismeretében az $ABCD$ négyszög szerkesztése sem.

III. megoldás

Feltételeinket a geometriai transzformációk nyelvén fogalmazzuk meg. A keresett A ponthoz az A_1 középpontú, 1 : 2 arányú középpontos hasonlóság a B pontot rendeli. Ugyanúgy a B_1, majd a C_1 és D_1 középpontú középpontos hasonlóság B-hez C-t, majd C-hez D-t, illetve D-hez A-t rendeli *(155. ábra)*.

A négy középpontos hasonlóság egymás utáni végrehajtása egyetlen középpontos hasonlósággal helyettesíthető, hiszen ha egy tetszőleges XY szakaszra alkalmazzuk a fenti transzformációkat, a kapott X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3, X_4Y_4 képek egyirányúak az XY szakasszal, hosszuk pedig annak rendre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ része. A keresett A pont éppen az XY-hoz X_4Y_4-et rendelő középpontos hasonlóság középpontja, tudniillik ez az egyetlen pont, amelyhez a leképezés önmagát rendeli *(29. jegyzet)*.



155. ábra

A fentiekből és az ábrából már könnyen leolvasható az A pont szerkesztése és a B, C, D pontok szerkesztése is.

Megjegyzés

1. Mindhárom megoldás módszere alkalmazható akkor is, ha $A_1B_1D_1C_1$ elfajuló vagy hurkolt négyszög, természetesen ekkor $ABCD$ is lehet elfajuló vagy hurkolt négyszög is.

2. A megoldások összehasonlítása arra is rámutat, hogy az első megoldásból adódik a legegyszerűbb szerkesztés, a másik két megoldás viszont könnyebben általánosítható a következőképpen: Ha $AA_1 = \lambda AB$, $BB_1 = \lambda BC$ stb., és λ adott szám ($\lambda = 2$ mellett az eredeti feladatot kapjuk), az A_1, B_1, C_1, D_1 pontok ismeretében hogyan szerkeszthető A, B, C, D?

208. Adva van egy háromszög és három párhuzamos egyenes. Szerkesszünk olyan háromszöget, amely az adott háromszöghöz hasonló, és csúcsai az adott egyeneseken vannak.

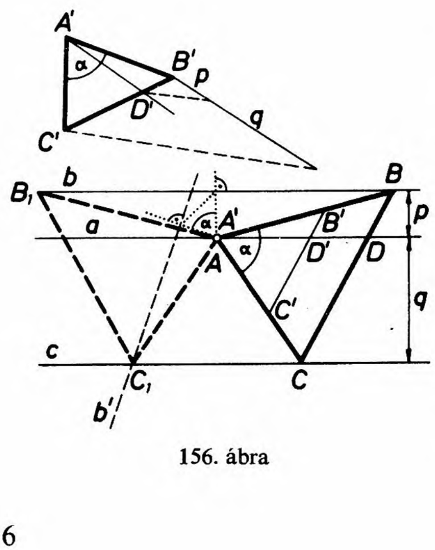
I. megoldás

Ha a, a középső párhuzamos egyenes a szélsőktől, b-től és c-től p, illetve q távolságra van, akkor a középső egyenesnek a BC-vel való metszéspontját D-vel jelölve, felírhatjuk a következőt:

$$BD : DC = p : q.$$

A szerkesztés menete a következő (156. ábra): Az adott $A'B'C'$ háromszög $B'C'$ oldalának megszerkesztjük azt a D' pontját, amelyre $B'D' : D'C' = p : q$. Ezután az a egyenesre rámásoljuk az $A'D'$ szakaszt, majd átmásoljuk az $A'D'B'$, illetve az $A'D'C'$ háromszöget. Messe $A'B'$ a b egyenest B-ben, és az A' középpontból nagyítsuk ki az $A'B'C'$ háromszöget $A'B : A'B'$ arányban (kicsinyítsük). $BD : DC = B'D' : D'C' = p : q$, így a C'-nek megfelelő C pont a c egyenesre esik. Tehát az ABC háromszög kielégíti a feltételt.

Tetszés szerint lehet kiválasztani, hogy melyik csúcs megfelelője melyik egyenesre essék, ezért hatféle megoldás lehetséges. Az ezekből transzformációval keletkező megoldások már mind egybevágók az előbbi 6 háromszög valamelyikével (pl. a *156. ábrán* ABC és AB_1C_1 egybevágók).



156. ábra

II. megoldás

A B_1 pont úgy vihető át C_1-be, hogy A körül elforgatjuk a $B_1AC_1\sphericalangle = B'A'C'\sphericalangle$ szöggel, és aztán $AC_1 : AB_1 = A'C' : A'B'$ arányban nagyítjuk (kicsinyítjük) *(29. jegyzet).*

Az A pontot rögzítsük az a egyenesen *(156. ábra),* majd végezzük el a b egyenes minden pontjával a fent leírt A középpontú $B'A'C'\sphericalangle$ szögű, $A'C' : A'B'$ arányú *forgatásnyújtást.* A C_1 pont tehát rajta lesz az így nyert b' egyenesen is. C_1 tehát b' és c metszéspontja

lesz. Ezután könnyen megkaphatjuk B_1-et. B_1 a b egyenesnek az a pontja, melynek transzformáltja C_1.

III. megoldás (Útmutatás)

Képzeljük a feladatot megoldottnak, és rajzoljuk meg az ABC háromszög köré írt kört. Messe ez a középső a egyenest másodszor D-ben. Ekkor $ACB\sphericalangle = = ADB\sphericalangle$ és $CBA\sphericalangle = CDA\sphericalangle$.

209. Adva van a síkban A és B pont. Hol kell elhelyezni a síkban a C pontot, hogy a CA távolság 2,6-szerese legyen a CB távolságnak, és a BAC szög a lehető legnagyobb legyen?

I. megoldás

Ismert a következő tétel: Legyen A és B a sík két pontja, λ tetszőleges, 1-től különböző pozitív valós szám. Azoknak a P pontoknak összessége, amelyekre $PA : PB = \lambda$, egy kör. Neve *Apollóniosz*-féle kör. Ezt a kört pl. úgy kaphatjuk meg, hogy az AB egyenesen megszerkesztjük a mértani helyhez tartozó M és N pontokat (tehát $MA : MB = NA : NB = \lambda$), majd az MN szakasz fölé *Thalész*-kört szerkesztünk. M és N szerkesztése történhet negyedik arányos szerkesztése segítségével *(157. ábra)* [6].

A keresett C pont tehát a $\lambda = 2{,}6$ értékhez tartozó *Apollóniosz*-körön van, s mivel A a kör külső pontja, és A, B, O egy egyenesen van, a $BAC\sphericalangle$ akkor lesz maximális, ha AC a kör érintője, és C az érintési pont.

A feltételeknek így két pont is megfelel: C_1 és C_2.

II. megoldás

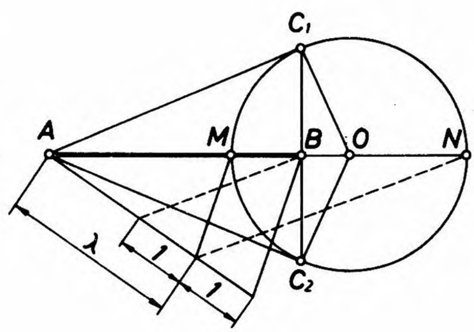
Alkalmazzuk a sinustételt az ABC háromszögre. $CAB\sphericalangle = \alpha$, $ABC\sphericalangle = \beta$ jelöléssel:

$$\sin\alpha : \sin\beta = CB : CA = 1 : \lambda.$$

Tehát

$$\sin\alpha = \frac{1}{\lambda}\cdot\sin\beta.$$

Mivel $\frac{1}{\lambda} < 1$ most teljesül, ezért $\alpha < \beta$, α nem lehet tompaszög. α akkor lesz maximális, ha $\sin\alpha$ is az. Ez utóbbi



157. ábra

pedig $\sin\beta = 1$, vagyis $\beta = 90°$ mellett következik be. C helyzetét a CB szakasz hosszával jellemezzük. A feltételek szerint

$$\frac{CA^2}{CB^2} = \frac{AB^2 + CB^2}{CB^2} = \lambda^2.$$

Innen

$$CB^2 = \frac{1}{\lambda^2 - 1} AB^2,$$

$$CB = AB\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 - 1}}.$$

$\lambda = 2{,}6$ mellett

$$CB = \frac{5}{12} AB.$$

Két megfelelő pontunk van AB két partján.

Megjegyzés

A kétféle megoldás összevetésében érdekes az az eredményünk, hogy az I. megoldásban *(157. ábra)* $C_1B \perp AB$. A és B az *Apollóniosz*-körre nézve inverz pontpár: $OB \cdot OA = OM^2$ *(52. jegyzet)*.

210. Az $ABCD$ négyzet belsejében levő P pontnak az A, B, C csúcsoktól való távolsága rendre 2, 3, 4. Szerkesszük meg e négyzetet, és számítsuk ki a területét.

I. megoldás

Kiszámítjuk a négyzet oldalát, a-t. A *158. ábrán* látható jelölést használva felírhatjuk a következőket:

(1) $$x^2 + (a-y)^2 = 4; \quad x^2 + y^2 = 9; \quad (a-x)^2 + y^2 = 16.$$

(2) $$0 < x < a; \quad 0 < y < a.$$

Ebből az egyenletrendszerből akarjuk kiszámítani a^2-et. A második egyenletből levonva az elsőt, majd a harmadikból levonva a másodikat, a következőket kapjuk:

$$\begin{cases} 2ay - a^2 = 5, \\ a^2 - 2ax = 7. \end{cases} \quad \text{Innen} \quad \begin{cases} y = \dfrac{a^2 + 5}{2a}, \\ x = \dfrac{a^2 - 7}{2a}. \end{cases}$$

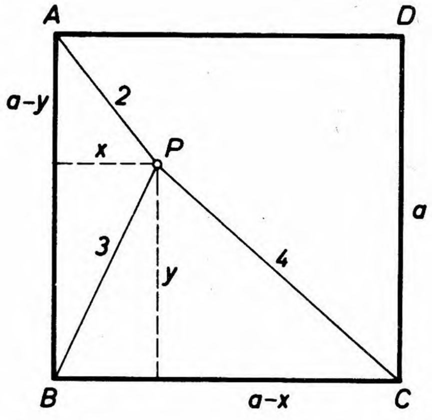
Ezt behelyettesítve a második egyenletbe, és rendezve:

$$2a^4-40a^2+74=0.$$

Tehát

$$a^2=10\pm\sqrt{63},$$

azaz $\begin{cases} a_1^2=10+3\sqrt{7}\ (\approx 17{,}94), \\ a_2^2=10-3\sqrt{7}\ (\approx 2{,}06). \end{cases}$



158. ábra

Az a_2 oldalú négyzetnek P nem lehet a belsejében, mert (2) nem teljesül. A fenti a_1, $x=\dfrac{a_1^2-7}{2a_1}$, $y=\dfrac{a_1^2+5}{2a_1}$ kielégíti az (1), (2) rendszert, a *158. ábra* $ABCP$ alakzata megszerkeszthető.

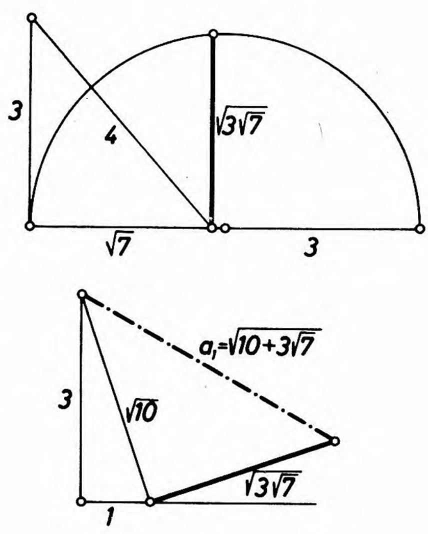
A négyzet megszerkesztése: Megszerkesztjük az $a_1=\sqrt{10+3\sqrt{7}}$ távolságot — ezt például a *159. ábra* módszerével tehetjük meg —, majd pl. az ABP háromszöget.

Hasonlóan szerkeszthetnénk meg az $a_2=\sqrt{10-3\sqrt{7}}$ szakaszt, de erre nincs szükségünk.

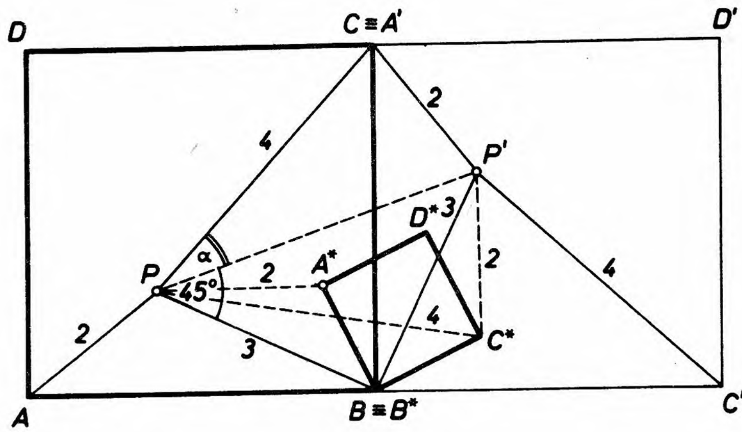
II. megoldás

Szerkesztés: A feladatot megoldottnak képzeljük, és elforgatjuk a négyzetet a B csúcs körül 90°-kal úgy, hogy A elforgatottja a C-be kerüljön (160. ábra). A PBP' háromszög és a C csúcs is könnyen szerkeszthető.

A szerkesztés menete: Egyenlő szárú derékszögű háromszöget szerkesztünk $PB=BP'=3$ hosszúságú szárakkal. Ezután megkeressük azokat a pontokat, amelyek P-től 4, P'-től 2 egység távolságra vannak. Ezek C és C^*. A négyzet



159. ábra



160. ábra

további csúcsai már könnyen szerkeszthetők. Visszaforgatással meggyőződhetünk a szerkesztés helyességéről. Csak az $ABCD$ négyszög tartalmazza a P pontot.

A terület kiszámítása: A BPC háromszögből cosinustétellel *(160. ábra)*

$$a^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cos(\alpha+45°)=25-12\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha).$$

A $PP'C$ háromszögből

$$\cos\alpha=\frac{16+18-4}{24\sqrt{2}}=\frac{5}{4\sqrt{2}};$$

α tehát hegyesszög.

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{25}{32}}=\sqrt{\frac{7}{32}}=\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}.$$

Ezeket felhasználva:

$$a^2=25-12\sqrt{2}\left(\frac{5}{4\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}\right)=10+3\sqrt{7}.$$

(A szerkesztés második megoldása a $45°-\alpha$ szögnek felel meg.)

III. megoldás (Útmutatás)

Használjuk fel, hogy a megszerkesztendő négyzetben $PA:PB=2:3$, $PB:PC=3:4$. *Ezután induljunk ki egy tetszőleges négyzetből, és szerkesszük meg ebben P megfelelőjét Apollóniosz-*körökkel (**209.** I. megoldás).

Megjegyzés

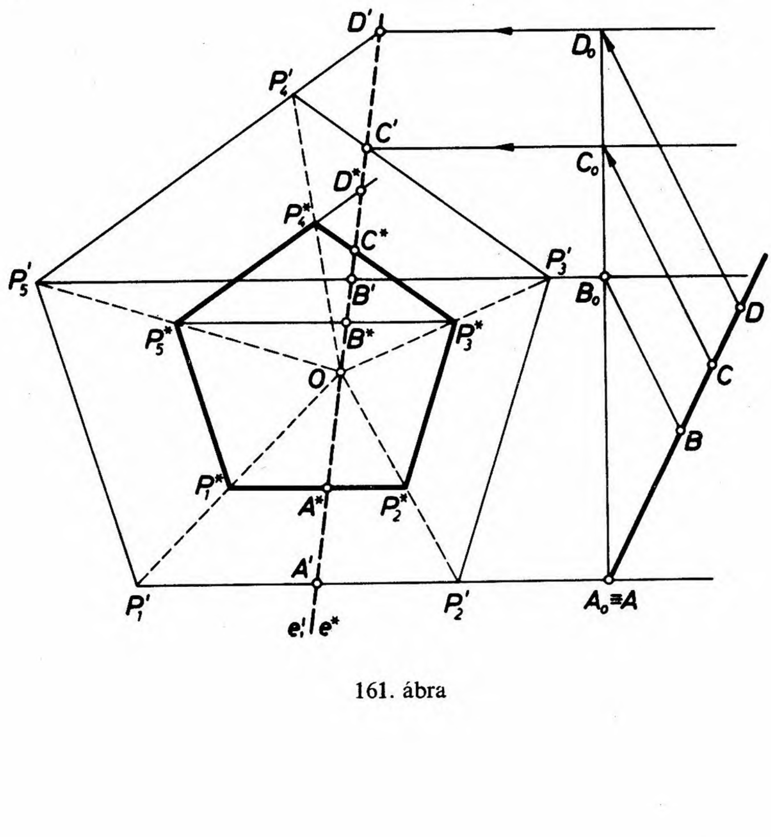
A szerkesztés és a számolás is elvégezhető a bemutatott megoldások bármelyikével akkor is, ha 2, 3, 4 helyett más, $AP=p$, $BP=q$, $CP=r$ távolság van adva. A és C szimmetrikus helyzete miatt feltehető, hogy $p \leqq r$. Ekkor a második megoldásból azonnal adódik a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele:

$$p+r \geqq \sqrt{2}\, q \quad \text{és} \quad p+\sqrt{2}\, q \geqq r.$$

211. Adott egy egyenes négy pontja a következő sorrendben: A, B, C, D. Az egyenes egy szabályos ötszög szelője, és az A pontban metszi az egyik oldal egyenesét, B-ben az előbbi oldallal párhuzamos átló egyenesét; C-ben és D-ben pedig az első oldallal nem szomszédos oldalak egyeneseit. Szerkesztendő a szabályos ötszög.

Megoldás

Vegyünk fel egy tetszőleges $P_1'P_2'P_3'P_4'P_5'$ szabályos ötszöget (161. ábra). Szerkesszük meg azt az e' egyenest, amely az A, B, C, D pontsorhoz hasonló A', B', C', D' pontsorban metszi rendre a $P_1'P_2'$ oldal és a $P_3'P_5'$ átló egyenesét, illetve a $P_1'P_2'$



161. ábra

oldallal nem szomszédos oldalak egyenesét. Ezután az A', B', C', D' pontsort A, B, C, D-vel egybevágó A^*, B^*, C^*, D^* pontsorba vivő középpontos hasonlósággal a $P_1'P_2'P_3'P_4'P_5'$ ötszöget a szerkesztendővel egybevágó $P_1^*P_2^*P_3^*P_4^*P_5^*$ ötszögbe viszszük át. Ezután már csak egy egybevágósági transzformáció kell, mely az $A^*B^*C^*D^*$ pontsort az $ABCD$ pontsorba viszi. Ez a transzformáció $P_1^*P_2^*P_3^*P_4^*P_5^*$-ot éppen a keresett $P_1P_2P_3P_4P_5$ ötszögbe viszi *(29. jegyzet).*

A szerkesztést így h..jthatjuk végre: felveszünk a $P_1'P_2'$ egyenesen egy tetszőleges A_0 pontot. Egy $A_0 = A$ kezdőpontú segédegyenesre másoljuk át az A, B, C, D adott pontsort (a segédegyenes ne legyen merőleges $P_1'P_2'$-re).

Legyen a $P_1'P_2'$ egyenesre A_0-ban állított merőleges $P_3'P_5'$-vel való metszéspontja B_0. A C_0 és D_0 pontokat a párhuzamos szelők tétele alapján úgy szerkesztjük, hogy az A, B, C, D és A_0, B_0, C_0, D_0 pontsorok hasonlók legyenek. A C_0 és D_0 pontokon keresztül $P_1'P_2'$ egyenessel húzott párhuzamosok kimetszik a C' és D' pontokat a $P_1'P_2'$-vel nem szomszédos oldalak egyeneséből. ($P_1'P_2'$ szakasz felező merőlegesére tükrös e_1' és e_2' egyenesek adódnak. Ezek közül pl. az e_1' egyenest választjuk ki.) Ezek után pl. O-ból kiindulva, végrehajtjuk az említett hasonlósági transzformációt.

A szerkesztés helyessége az előzők alapján nyilvánvaló, két, az adott egyenesre tükrös helyzetű szabályos ötszöget kapunk. Ezek esetleg egybeesnek.

212. Adott a síkban két kör. Mutassuk meg, hogy ha elhelyezhető egy rombusz úgy, hogy egyik átlójának a végpontjai az egyik körön legyenek, a másiké a másik körön, akkor végtelen sok ilyen helyzetű rombusz van, és ezek oldalai mind egyenlők. Szerkesszünk így elhelyezkedő négyzetet.

Megoldás

A rombusz A_1B_1 átlójának végpontjai az O_1 középpontú, r_1 sugarú k_1 körön, A_2B_2 átlójának végpontjai az O_2 középpontú, r_2 sugarú k_2 körön legyenek.

Minthogy a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, O_1 az A_2B_2 egyenesen, O_2 az A_1B_1 egyenesen, az átlók P-vel jelölt metszéspontja pedig az $O_1O_2 = d$ átmérőjű k körön van. A P pont a k_1 és k_2 körnek is húrfelező pontja, tehát belső pontja.

Létezik olyan P középpontú π körlemez, amely k_1 és k_2 belsejében van, hiszen bármelyik $(r_1 - O_1P)$-nél és $(r_2 - O_2P)$-nél kisebb sugarú kör megfelel. A k körnek a körlemezzel végtelen sok közös pontja van. *Még inkább végtelen sok*

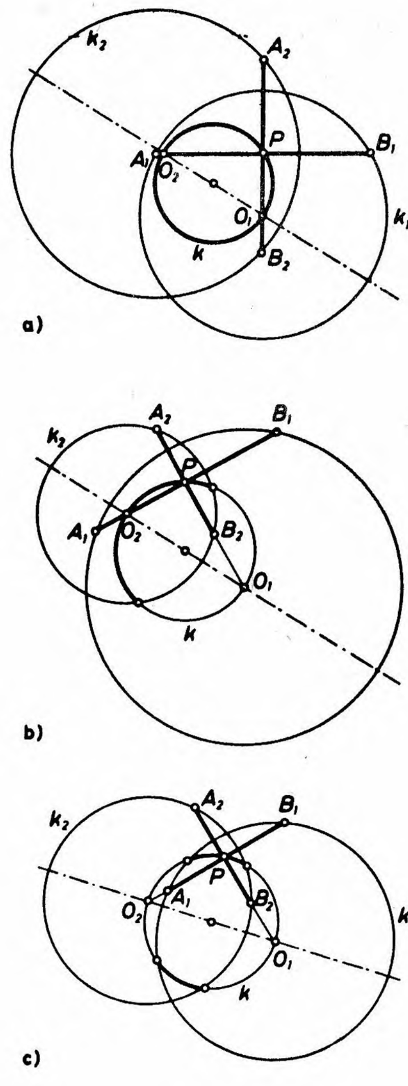
pontból áll az a **H** *halmaz, mely k-nak a k_1 és k_2 körlemezek közös részéhez tartozó belső pontjaiból áll.* (A *162/a, b, c ábrákon* részleteztük a lehetséges eseteket attól függően, hogy k_1, k_2 közül valamelyik tartalmazza-e a másik középpontját vagy sem. A **H** halmaz a k körön ettől függően alakul: vastag ívek.)

Szemeljük ki a **H** *halmaz tetszőleges P′ pontját.* Az O_1P' egyenes metszi k_2-t az A_2', B_2' pontokban, O_2P' metszi k_1-et az A_1', B_1' pontokban, hiszen P' mindkét körnek belső pontja. Továbbá, az $A_1'B_1'$ és $A_2'B_2'$ szakaszok merőlegesen felezik egymást P'-ben, hiszen P' pontja k-nak is.

Az $A_1'A_2'B_1'B_2'$ pontok tehát a követelményeknek megfelelő rombuszt alkotnak, s mivel **H**-nak végtelen sok pontja van, végtelen sok ilyen rombusz van.

Számítsuk ki az $A_1A_2B_1B_2$ rombusz oldalának négyzetét Pitagorasz tételével.

(1) $$A_1A_2^2 = A_1P^2 + PA_2^2 = (O_1A_1^2 - O_1P^2) + (O_2A_2^2 - O_2P^2) = r_1^2 + r_2^2 - (O_1P^2 + O_2P^2) = r_1^2 + r_2^2 - d^2 > 0.$$



162. ábra

Ez minden megfelelő rombuszra azonos érték. Ezzel a feladat első részét bebizonyítottuk.

A keresett $A_1^*A_2^*B_1^*B_2^*$ négyzet **H**-*hoz tartozó Q középpontját ezután már könnyen megszerkeszthetjük,* mert a négyzet oldala és félátlója is ismert:

$$A_1^*A_2^* = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - d^2}, \quad A_1^*Q = \sqrt{\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2 - d^2)}.$$

Ezután már derékszögű háromszög szerkesztésével megszerkeszthető az O_1Q és O_2Q szakasz is —

$$(2) \qquad O_1Q=\sqrt{r_1^2-\frac{1}{2}(r_1^2+r_2^2-d^2)}=\sqrt{\frac{1}{2}(r_1^2-r_2^2+d^2)};$$

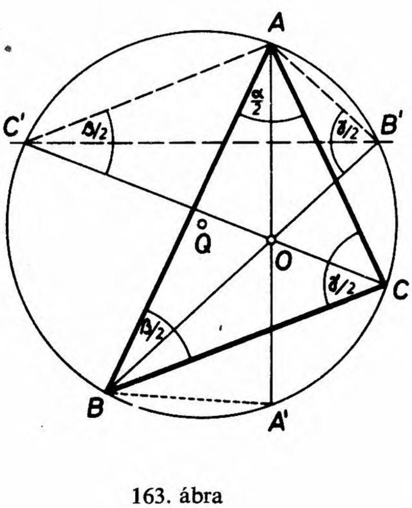
$$O_2Q=\sqrt{\frac{1}{2}(r_2^2-r_1^2+d^2)}\ \text{—},$$

de akkor és csak akkor, ha még $A_1^*Q<r_1$ és $A_1^*Q<r_2$, azaz (1)-en kívül teljesül még az alábbi két feltétel is:

$$(3) \qquad r_1^2+d^2>r_2^2, \quad r_2^2+d^2>r_1^2.$$

Összefoglaljuk eredményeinket. Ha adott a k_1 és k_2 körök r_1, r_2 sugara, továbbá középpontjaik d távolsága, akkor a feladatban megkívánt tulajdonságú rombusz létezésének szükséges feltétele (1), és az ottani számításból látható, hogy a feltétel elégséges is: ha (1) teljesül, végtelen sok kívánt rombusz létezik. Ezek között a rombuszok között akkor és csak akkor van négyzet, ha (1) és (3) teljesül. Legfeljebb két megfelelő négyzet van, ezek az O_1O_2 egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el.

213. Adva van egy kör, annak kerületén egy A pont és belsejében egy O pont. Szerkesszük meg a kör kerületén a B és C pontokat úgy, hogy az ABC háromszögbe írt kör középpontja az adott O pont legyen.



163. ábra

I. megoldás

Képzeljük a feladatot megoldottnak. Messék a BO, CO szögfelezők a kört másodszor a B', illetve C' pontokban *(163. ábra). A kerületi szögek tétele szerint B' felezi a B-t nem tartalmazó AC körívet, valamint C' felezi a C-t nem tartalmazó AB körívet.* Ennélfogva az $OB'AC'$ négyszögben a $B'C'$ átló felezi a B', illetve a C' csúcsoknál levő szögeket, azaz a $B'C'$ a négyszög szimmetriatengelye, s így merőlegesen felezi az AO átlót.

A szerkesztés menete: Az AO szakasz felező merőlegese kimetszi a körből

a B' és C' pontokat. A $B'O$ és a $C'O$ egyeneseknek a körrel való második metszéspontja adja a keresett B, illetve C pontokat.

Az elmondottakból visszafelé következik, hogy O valóban az ABC háromszög szögfelezőinek metszéspontja. A szerkesztésből látható, hogy a feladatnak mindig van egyetlenegy megoldása.

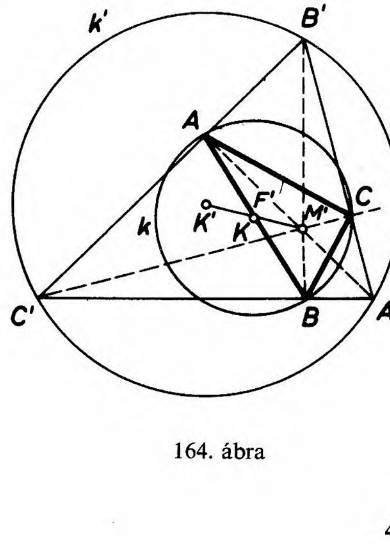
II. megoldás

A keresett ABC háromszöget úgy fogjuk fel, mint valamely A'B'C' háromszög talpponti háromszögét, az adott r sugarú k kört pedig mint az A'B'C' Feuerbach-féle körét (164. ábra). Mint ismeretes, az $A'B'C'$ magasságvonalai a talpponti háromszög szögfelezői, így az $A'B'C'$ magasságpontja azonos az adott O ponttal. Mivel pedig az $A'B'C'$ k' körülírt köre a k *Feuerbach*-féle körből M' ($\equiv O$) középpontú, 2 : 1 arányú nagyítással jön létre (**138.** II. megoldás), ezért a szerkesztés menete az alábbi: Az O pont K pontra vonatkozó K' tükörképe körül $2r$ sugárral kört rajzolunk. Az A pontban OA-ra emelt merőleges egyenes metszi ki a k' körből a B' és C' pontokat. A $B'O$ és $C'O$ egyeneseknek a k körrel való, O ponton túli metszéspontjai a keresett B és C pontok. Az olvasóra bízzuk a szerkesztés helyességének bebizonyítását.

Más megoldási lehetőségek

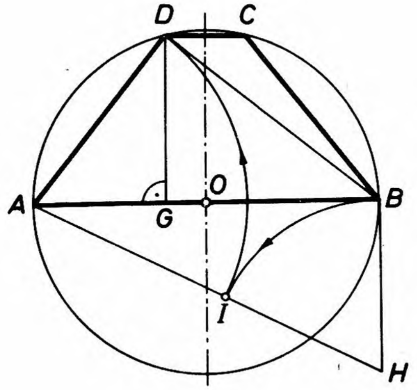
1. Mutassuk meg, hogy a BOA' háromszög egyenlő szárú *(163. ábra).* (Lásd a **139.** feladat megjegyzését és a **187.** feladatot.)

2. Ha r-rel jelöljük egy háromszög köré írt körének sugarát, ϱ-val a beírt kör sugarát, d-vel jelöljük a két előbbi kör középpontjának távolságát, akkor *Euler* tétele szerint fennáll a $2r\varrho = r^2 - d^2$ összefüggés. (Lásd **139.** feladat.) Ennek alapján végezzük el a szerkesztést, és igazoljuk annak helyességét.



164. ábra

214. Szerkesszünk adott körbe olyan trapézt, melybe kör írható, és amelynek egyik oldala a körnek átmérője.



165. ábra

Megoldás

A szerkesztendő $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai a trapéz köré írt körének párhuzamos húrjai, ezért $ABCD$ szimmetrikus párhuzamos oldalainak felező merőlegesére *(165. ábra)*. A trapéznak AB a hosszabbik párhuzamos oldala.

Az $AD=BC$ szár x hosszát számítással határozzuk meg. Feltesszük, hogy AB egységnyi hosszúságú.

Legyen D vetülete az AB oldalon G. Az ABD háromszög *Thalész*-tétele alapján derékszögű, ezért

$$x^2=AD^2=AB\cdot AG=AG,\quad DC=AB-2AG=1-2x^2.$$

Mivel a trapézba kör írható, ezért

$$AD+BC=AB+DC,\quad \text{vagyis}\quad 2x=1+(1-2x^2).$$

Rendezve és 2-vel végigosztva, az $x^2+x-1=0$ másodfokú egyenlethez jutunk, melynek pozitív gyöke $x=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$.

Ennek alapján a szerkesztés a következő: Az adott kör O középpontján át tetszés szerint felvett AB átmérő B végpontjában meghúzzuk az érintőt, felmérjük rá a $BH=BO=\frac{1}{2}$ szakaszt, ekkor $AH=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Az AH szakaszt messük a H körül $BH=\frac{1}{2}$ sugárral írt körrel I-ben, ekkor $AI=x$. Végül az A és B körül AI sugárral rajzolt körívek kimetszik az adott körből a D és C csúcsokat. (D és C az AB egyenes azonos partján vannak.)

A csúcsok a körön vannak, másrészt $AD+BC=AB+DC$ teljesülése miatt a konvex trapézba érintőkör írható, tehát megfelel a követelményeknek. *(40. jegyzet.)*

215. Adott egy k kör három különböző pontja: A, B és C. Jelöljük ki szerkesztéssel ennek a körnek azt a D pontját, melyre az $ABCD$ négyszög érintőnégyszög.

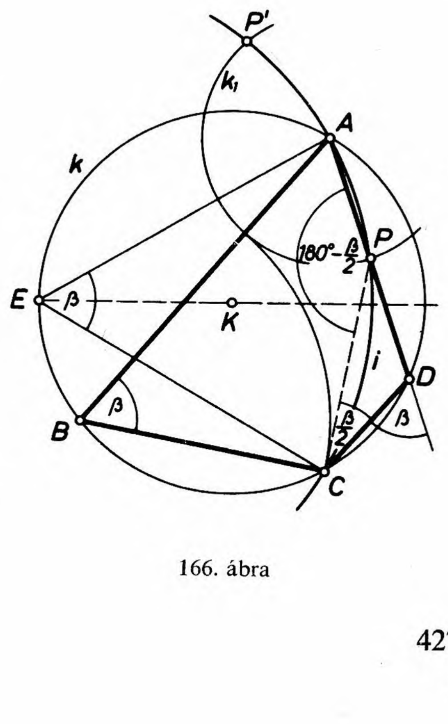
215.

I. megoldás

Felhasználjuk a következő ismert tételt: Egy ABCD konvex négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha $AB+CD=BC+DA$. Feltesszük, hogy $AB>BC$ ($AB=BC$ esetén D a kör B-vel ellentétes pontja, $BC>AB$ esetén a megoldás értelemszerűen változik meg), és képzeljük a feladatot megoldottnak *(166. ábra).*

Az érintőnégyszög-kritérium ekkor egyenértékű az $AB-BC=AD-CD$ egyenlőséggel. Az AD szakasznak megszerkeszthetjük azt a P pontját, melyre $AP=AD-CD=AB-BC$. Ugyanis P rajta van az A körüli $AB-BC$ sugarú k_1 körön. Másrészt az $ABCD$ húrnégyszög, ezért a D-nél levő külső szög is β. Ez egyben a PCD egyenlő szárú háromszög külső szöge, így a $CPD\sphericalangle=\frac{\beta}{2}$, $APC\sphericalangle=180°-\frac{\beta}{2}$. Tehát P rajta van az AC fölé — B-vel ellentétes parton — rajzolt $180°-\frac{\beta}{2}$ látószögű i körívem. Ennek E középpontjából AC β szög alatt látszik, akárcsak B-ből. E-t tehát az AC felező merőleges metszi ki a k kör B-t tartalmazó AC ívéből. P ismeretében az AP egyenes metszi ki k-ból D-t.

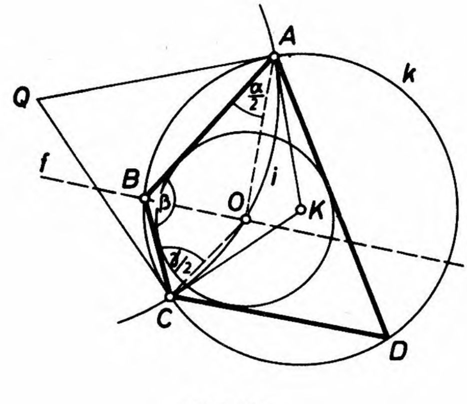
A szerkesztés helyességének igazolására térünk át. A P metszéspont mindig létezik, mert az i ív egyik végpontja — A — k_1 középpontja, másik végpontja — C — pedig k_1-en kívül van, hiszen $AP=AB-BC<AC$. P a k belső pontja, hiszen $180°-\frac{\beta}{2}>180°-\beta$ miatt az i ív minden pontja k belsejében van. Mivel $DPC\sphericalangle=\frac{\beta}{2}$, és a D-nél levő külső szög β, ezért $PCD\sphericalangle=\frac{\beta}{2}$, PCD egyenlő szárú, $AD-CD=AP=AB-BC$, ezért $ABCD$ érintőnégyszög.



166. ábra

II. megoldás

A beírt k^* kör O középpontját fogjuk megszerkeszteni (167. ábra). Ez $ABCD$ szögfelezőinek közös metszéspontja. Tehát O rajta van az $ABC\sphericalangle$ f szögfelezőjén. Másrészt, az $ABCO$ négyszögben az $AOC\sphericalangle=360°-\beta-\frac{\alpha+\gamma}{2}=270°-\beta$,



167. ábra

hiszen $\alpha+\gamma=180°$. O tehát az AC fölé rajzolt $270°-\beta$ látószögű i körívén van, ha $\beta\neq 90°$. Ha $\beta=90°$, akkor O az AC szakaszon van.

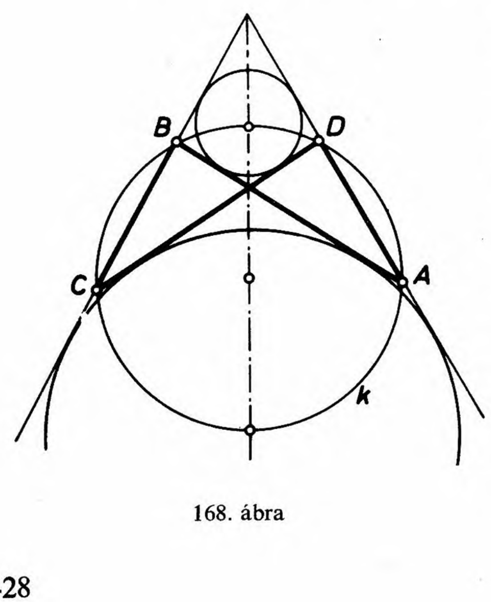
A látókörív szerkesztését egyértelművé teszi az, hogy az $AOC\sphericalangle=$ $=270°-\beta$ szögtartomány belsejében tartalmazza a B pontot. Számítással ellenőrizhetjük, hogy az i körív Q középpontja éppen a k kör A-ban és C-ben húzott érintőinek metszéspontja.

Az O pont ismeretében BA-t OA-ra tükrözve, BC-t OC-re tükrözve, a kapott egyenesek metszéspontja lesz D. $ABCD$ valóban húrnégyszög, hiszen az $ABCO$ négyszögből

$$\frac{\alpha+\gamma}{2}=360°-(\beta+270°-\beta)=90°.$$

Megjegyzés

1. Az $ABCD'$ konvex érintőnégyszög oldalegyeneseit érintő kör eshet a négyszögön kívül is. Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy $AB+AD'=BC+CD'$, azaz $AB-BC=CD'-AD'$. Ha ezt összehasonlítjuk az I. megoldás $AB-BC=$ $=AD-CD$ egyenlőségével, láthatjuk, hogy a jobb oldalon C és A felcserélődött. Eszerint D'-t D-ből AC felező merőlegesére való tükrözéssel kapjuk. ($\beta=90°$ esetén ilyen megoldás nincs.) A *166. ábrán* ilyen D'-höz vezet el P helyett a P' pont, mely k_1 és i kiegészítő ívének metszéspontja. A *167. ábrán* i kiegészítő ívének és f-nek metszéspontja éppen a kívülről érintő kör középpontja. (Az utóbbi állítások igazolását az olvasóra bízzuk.)



168. ábra

2. Könnyen belátható, hogy ha D-t az AB-nek C-t nem tartalmazó partján úgy vesszük fel, hogy $AD=BC$ *(168. ábra)*, akkor az $ABCD$ hurkolt szimmetrikus húrnégyszöghöz két olyan kör is van, mely mind a négy oldalegyenest érinti.

3. Feladatunk *Poncelet* tételének témaköréből származik. Ez a tétel lehetőséget ad a feladat általánosítására is *(40. jegyzet)*.

10. Kombinatorika

216. Bizonyítsuk be, hogy bármely társaságban található két olyan ember, akinek abban a társaságban ugyanannyi ismerőse van.

Megoldás

Legyen a társaság tagjainak száma n. Társaságról van szó, tehát $n \geqq 2$. Ekkor a társaság egy tagjának 0 vagy 1, vagy ..., vagy $n-1$ ismerőse lehet jelen. Nem lehet azonban olyan is, akinek nincs ismerőse a társaságban, meg olyan is, akinek a társaság minden tagja ismerőse, mert akkor az utóbbinak ismernie kellene az előbbit is, és így az előbbinek is lenne ismerőse.

Ha mindenki megmondja, hogy hány ismerőse van jelen, akkor az n ember legfeljebb n − 1 *különböző számot mondhat* (az 1, 2, 3, ..., $n-1$ vagy a 0, 1, 2, ..., $n-2$ számok között válogathatnak), tehát legalább ketten ugyanazt a számot mondják, vagyis ugyanannyi ismerősük van jelen.

Megjegyzés

1. *A feladatot átfogalmazzuk a gráfok nyelvére: A társaság tagjaihoz rendeljünk hozzá egy-egy pontot, a gráf csúcsait. A tagok ismeretségét a megfelelő pontok összekötésével jellemezzük, így kapjuk a gráf éleit* (az ismeretség kölcsönös) ([7] II.).

Egy tag ismeretségeinek a számát a gráf megfelelő csúcsából kiinduló élek száma mutatja, ezt a *csúcs fokának* nevezzük. Ha van olyan tag, aki senkit sem ismer a társaságból, azt hagyjuk el, tehát feltesszük, hogy a gráfban nincs 0-fokú csúcs. (Ez a feltétel nem mindig lényeges, a 2. és 3. megjegyzésben azonban felhasználjuk.)

Feladatunk átfogalmazása: *Egy gráfban mindig van két azonos fokú csúcs.*

2. Az átfogalmazás természetes általánosításra is lehetőséget nyújt: *Egy n csúcsú gráfban a csúcsok fokának a minimuma legyen k, ekkor van legalább k számú azonos fokú csúcs* (k egész, $1 \leqq k \leqq n-1$; ha $k=1$, az eredeti feladathoz jutottunk).

Bizonyításunkat az eredeti feladat megoldásától eltérő módszerrel végezzük. Az n csúcsú gráfban nincsen $(n-1)$-nél nagyobb fokú csúcs, tehát a csúcsok fokát nem csökkenő sorrendben i_1-, i_2-, ..., i_n-nel jelölve:

$$k \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq i_3 \leqq \ldots \leqq i_{n-1} \leqq i_n \leqq n-1.$$

Az azonos fokú csúcsok számát az

$$(1) \qquad (i_2-i_1)+(i_3-i_2)+\ldots+(i_{n-1}-i_{n-2})+(i_n-i_{n-1})$$

$n-1$ tagú összegben szereplő 0-ák száma jelzi. Jelölje ezt r.

Megmutatjuk, hogy $r \geqq k$. Az előbbiek alapján alsó és felső becslést adhatunk az (1) összegre:

$$(2) \qquad (n-1)-r \leqq (i_2-i_1)+(i_3-i_2)+\ldots+(i_n-i_{n-1}) = i_n-i_1 \leqq (n-1)-k.$$

(2)-ből valóban következik, hogy $r \geqq k$, az általánosítás bizonyítását befejeztük.

3. Az előbbi általánosítás érdekes átfogalmazása a következő: *Ha egy (egyszerű) poliéder lapjai legalább k-oldalú sokszögek, akkor van legalább k darab azonos oldalszámú lapja.*

Ebből következik: *Minden poliédernek van* 3 *azonos oldalszámú lapja.* Csupán a poliéderlapokhoz kell rendelni a gráf csúcsait, a gráf élei a lapok csatlakozását jellemzik. A lap oldalszáma tehát a gráf megfelelő csúcsának a foka.

Mégis, az utolsó tétel talán a legnehezebb az előbb felsorolt tételek közül, mert a fogalmazás elrejti a lényeges kapcsolatokat. A poliédernek oly sok tulajdonsága van, ki gondolná, hogy a feladathoz ezek közül csak az a lényeges, hogy a poliéder minden élénél két poliéderlap csatlakozik, és hogy a poliéderlapok legalább 3 oldalú sokszögek.

Az általános tétel bizonyítása könnyebb, mint a speciális tételé. (Nemcsak egyszerű poliéderekre igaz a tétel [6]!)

217. Hány olyan megoldása van az

$$|x|+|y|<1000$$

egyenlőtlenségnek, amelyben x és y egész számok?

I. megoldás

Mindkét ismeretlen értéke a 0, ± 1, ± 2, ..., ± 999 *számok* egyike lehet.
a) *x nem negatív értékei mellett megállapítjuk a vele megoldást adó y értékek számát:*

$$x=0 \text{ mellett} \quad -1000<y<1000.$$

Ennek eleget tevő y értékek: -999, -998, ..., -1, 0, 1, ..., 999. számuk: $2\cdot 999+1=1999$.

$$x=1 \text{ mellett} \quad -999<y<999.$$

Az előbbinél 2-vel kevesebb y érték tesz eleget ennek az egyenlőtlenségnek, mert $y=\pm 999$ már nem felel meg. Számuk $1999-2=1997$. És így tovább folytathatnánk. Általában x valamely értékéről 1-gyel nagyobbra áttérve, y legnagyobb lehetséges értéke 1-gyel kisebbnek adódik, ezért y előbbi értékei közül kettőt törölni kell. A megoldások számai $x=1, 2, \ldots, 999$-re számtani sorozatot alkotnak, y megfelelő értékeinek száma 1999, 1997, 1995, ..., 3, 1, ezek összege $\frac{1}{2}\,1000(1999+1)=1000^2$.

$x=-1, -2, \ldots, -999$ negatív értékek mellett $|x|=1, 2, \ldots, 999$, így ugyanazok a megfelelő y értékek, mint $x=1, 2, \ldots, 999$ esetén. Az ilyen megoldások száma: $1997+1995+\ldots+3+1=999^2$.
Ezzel minden megoldást figyelembe vettünk. Összes számuk:

$$1000^2+999^2=1\,998\,001.$$

II. megoldás (Útmutatás)

Állapítsuk meg az $|x|+|y|=k$ egyenlet egész számokban történő megoldásainak számát, majd ezeket összegezzük $k=0, 1, 2, \ldots, 999$-re.

218. Hány olyan legfeljebb hatjegyű természetes szám van, amelyben előfordul az 1-es számjegy?

I. megoldás

A legfeljebb hatjegyű számok elé annyi 0-*át írunk, hogy jegyeik száma pontosan* 6 *legyen. Jelölje* F_n *az* 1-*es számjegyet tartalmazó legfeljebb n-jegyű számok számát.* F_6 *meghatározása a feladat. Tegyük fel, hogy* F_n*-et ismerjük, és* F_{n+1}*-et kell meghatároznunk.*

Csoportosítsuk az 1-es számjegyet tartalmazó, legfeljebb $n+1$ jegyű számokat kezdő számjegyük szerint. 10 csoport lesz, mert kezdő számjegy a 0, 1, 2, 3, ..., 9 számok közül választható. Az 1-essel kezdődő számok csoportjában

10^n szám van, mert a további n hely mindegyikére, egymástól függetlenül válogathatunk a 10 számjegy közül. A nem 1-essel kezdődő, legfeljebb $n+1$ jegyű, 1-est tartalmazó számok minden csoportjában F_n szám van, mert a hátralevő n számjegy közül legalább egynek 1-esnek kell lennie. Ilyen csoport 9 van, mert a kezdő számjegy a 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számok közül választható. Tehát

$$F_{n+1}=10^n+9F_n.$$

$$F_1=1; \quad F_2=10+9F_1=19; \quad F_3=100+9F_2=271;$$

$$F_4=1000+9F_3=3439; \quad F_5=10\,000+9\cdot F_4=40\,951;$$

$$F_6=100\,000+9\cdot F_5=468\,559.$$

II. megoldás

A hat jeggyel írható számok halmazából elhagyva a hat jeggyel írható, 1*-est nem tartalmazó számok halmazát, azokat a számokat kapjuk, amelyekben előfordul az* 1*-es számjegy.*

Az első halmazban 10^6 szám van, hiszen az első helyre 10-féle jegyet írhatunk, ezek bármelyike mellé a második helyre ismét 10-félét, a $10\cdot 10$ lehetőség mindegyike mellett a harmadik helyre megint 10-féle jegyet írhatunk, és így tovább.

Hasonló megfontolással a második halmazban 9^6 szám van, mert most minden helyen csak 9 lehetőség van (az 1-es számjegyet nem választhatjuk).

Tehát $10^6-9^6=468\,559$ db 1-est tartalmazó legfeljebb 6-jegyű szám van.

Megjegyzés

1. A II. megoldás módszerével a feladat könnyen általánosítható legfeljebb n-jegyű számokra. Ezek közül az 1-es jegyet tartalmazók száma 10^n-9^n.

2. Annak a valószínűsége, hogy a 0, 1, 2, ..., 9 számjegyek közül n jegyet egymás mellé írva, a jegyek között az 1-es számjegy előforduljon:

$$P_n=\frac{10^n-9^n}{10^n}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Ha $n\to\infty$, akkor $\left(\frac{9}{10}\right)^n\to 0$, azaz $P_n\to 1$.

219. Legyenek a, b adott valós számok. Hány olyan 100 tagú számtani sorozat van, melynek a és b is tagja?

Megoldás

Nyilván fel kell tennünk, hogy $a \neq b$, különben a feladat érdektelen. *Ha megmondjuk, hogy a a sorozat m-edik, b a sorozat n-edik tagja, akkor kiszámíthatjuk a sorozat szomszédos tagjainak d különbségét,* hiszen $m \neq n$ és

$$(1) \qquad a = b + (m-n)d, \quad d = \frac{a-b}{m-n}.$$

Kiszámíthatjuk a sorozat s_1 kezdőtagját is:

$$(2) \qquad s_1 = a-(m-1)d = b-(n-1)d = \frac{b(m-1)-a(n-1)}{m-n}.$$

Az előbb kiszámított s_1 kezdőtagú, d különbségű számtani sorozatnak valóban a az m-edik, b az n-edik tagja.

Tehát az a, b számokat tartalmazó számtani sorozatokat egy-egy értelműen hozzárendelhetjük az (m, n) számpárokhoz (sorrend is számít, $1 \leqq m \neq n \leqq 100$). Ha 100 tagú sorozatokról van szó, m számára 100 értéket választhatunk, m minden értéke mellett n-nek 99 értéket adhatunk. Így $100 \cdot 99 = 9900$ a kérdéses sorozatok száma.

Megjegyzés

Ugyanígy látható be, hogy az a, b-t tartalmazó, k tagú számtani sorozatok száma $k(k-1)$.

220. Hányféleképpen írhatjuk fel az 1, 2, ..., 6 számokat a dobókocka 6 lapjára?

I. megoldás

Egy a térben mereven rögzített kocka lapjaira 6!-féleképpen írhatjuk fel a számokat. De azonosnak tekintjük mindazokat a felírásokat, melyek mozgatással fedésbe hozhatók. Ha tehát a kockát önmagával fedésbe hozó mozgatások száma f (a helyben hagyás is egy mozgatás), akkor a kérdéses szám $N = \frac{6!}{f}$.

Egy dobókocka különböző lehetséges helyzeteit a következőképpen számlálhatjuk meg. Pl. az 1-est mind a 6 oldalra fordíthatjuk, és minden ilyen helyzetben ezen lap középpontja körül 4 forgás lehetséges. Összesen tehát $f = 6 \cdot 4 = 24$ elmozgatás van.

Tehát $$N=\frac{6!}{24}=30.$$

Megjegyzés

Az előbbi megoldáshoz hasonlóan megállapíthatjuk a többi szabályos testet önmagával fedésbe hozó mozgások számát, valamint a testek különböző lehetséges megszámozásainak számát. Jelöljük n-nel a lapok számát. Táblázatunk mutatja az eredményeket.

	Tetraéder	Kocka	Oktaéder	Dodekaéder	Ikozaéder
n	4	6	8	12	20
f	$4\cdot 3=12$	$6\cdot 4=24$	$8\cdot 3=24$	$12\cdot 5=60$	$20\cdot 3=60$
$N=\frac{n!}{f}$	2	30	1680	3 991 680	$\approx 2{,}02\cdot 10^{16}$

II. megoldás

Ha pl. az 1-est mindig az alaplapra fordítjuk, a fedőlapot tekintve 5 eset lehetséges. Eszerint a különbözőképpen megszámozott kockákat 5 egyenlő csoportra oszthatjuk. Egy ilyen csoportot (Pl. 2-es fedőlapú) tekintve, elforgatással elérhetjük, hogy egy kiszemelt harmadik szám (Pl. a 3-as) az első lapra kerüljön. A hátsó lap 3-féle választásától függően az előbb kiemelt 5 csoport mindegyikében 3 egyenlő csoportot képezhetünk. Az $5\cdot 3=15$ csoport mindegyikében 2 kocka van az oldallapok számozásától függően. A kockák száma tehát $5\cdot 3\cdot 2=30$.

221. Egy 6×6 mezőből álló „sakktáblát” hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedtünk le. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar el. Bizonyítandó, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté.

Megoldás

Bármely két sort vagy oszlopot elválasztó vonal két olyan részre vágja a táblát, amelyek mindegyike páros számú mezőt tartalmaz, hiszen ez minden sorra, ill. minden oszlopra külön is áll. Ha egy dominót úgy helyezünk el, hogy a kiszemelt vonal átmesse, akkor mindkét részben páratlan számú fedetlen

mező marad. Ezek csak úgy fedhetők le, ha legalább még egy dominó a vonal mindkét oldalán fed egy-egy mezőt.

Így minden vonal, amely dominót metsz, legalább 2 dominót, de mindig páros számút metsz.

A „sakktábla” $6 \times 6 = 36$ mezőből áll. Mivel egy dominó két mezőt takar le, a „sakktáblát” $36 : 2 = 18$ dominó fedi le. Minden dominó egy vonalat metsz: vagy függőleges, vagy vízszintes vonalat. A sorokat és oszlopokat 5—5, összesen 10 vonal választja el, tehát ahhoz, hogy mind a 10 vonal átmessen legalább 2 dominót, legalább 20 dominóra lenne szükség, de a „sakktáblára” átfedés nélkül csak 18 dominó fér rá. Tehát minden elválasztó vonal nem metszhet dominót.

Megjegyzés

Feladatunkat általánosítjuk. Tekintsünk egy $u \times v$ mezőből álló táblát. Ha u és v is páratlan, a tábla nyilván nem fedhető le hézagtalanul és átfedés nélkül dominókkal.

Ha u és v is páros, akkor a fenti gondolatmenet azt adja, hogy legfeljebb akkor létezhet „minden választóvonalat metsző” lefedés, ha

$$2(u-1+v-1) \leqq \frac{uv}{2}, \text{ vagyis } (u-4)(v-4) \geqq 8.$$

Ha u páratlan és v páros, akkor az u hosszúságú sorokat elválasztó vonalak közül a szélsőtől kezdve minden második páratlan számú dominót metsz át, a többi páros számút. A v hosszúságú sorokat elválasztó vonalak mind páros számú dominót metszenek át. Ebből az $(u-3)(v-4) \geqq 4$ szükséges feltétel adódik.

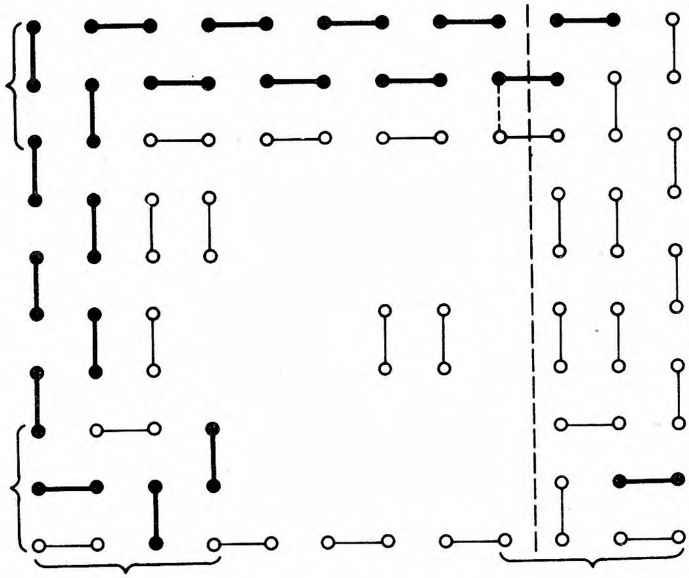
Tehát ha u és v egyike legfeljebb 4, továbbá ha $u = v = 6$, akkor nem létezik „minden választóvonalat átmetsző” dominólefedés.

A *169. ábráról* leolvasható, hogy mindazokban az esetekben, amelyeket eddigi megfontolásaink nem zártak ki, lehetséges olyan lefedés, amelyben minden választóvonal legalább egy dominót átmetsz.

Itt olyan táblát látunk, amelynek páros számú sora és oszlopa van. Minden vonal átmetsz egyet a vastagabban jelölt dominók közül.

A középtájt elhelyezkedő azonos szerkezetű sorok és oszlopok száma tetszés szerinti páros számmal növelhető. A tábla szélein kapoccsal ({) megjelölt soroknak és oszlopoknak azonban mindig szerepelniük kell, a legkisebb így lefedhető tábla tehát a 8×6 mezős tábla.

Ha elhagyjuk a szaggatott vonaltól jobbra eső 3 oszlopot, akkor két mező, amelyeket ezen a vonalon átnyúló dominó fedett (a 2. és 3. sorban), lefedhető egy függőleges dominóval (az ábra pontozva jelzi).



169. ábra

Így a páratlan számú oszlopból és páros számú sorból álló táblák „minden választóvonalat átmetsző" lefedését kapjuk. Ismét csak az a lényeges, hogy a kapoccsal megjelölt sorok és oszlopok fellépjenek. A legkisebb ilyen módon lefedhető tábla tehát 5×6 mezős. Az 5×6-os és 7×6-os tábla kívánt lefedhetősége kiemeli a feladat állításának érdekességét.

222. Hét osztálytárs a bizonyítványosztás után megállapította, hogy nincs köztük kettő, aki mind a 12 tárgyból ugyanazt az osztályzatot kapta volna. Bizonyítsuk be, hogy ki lehet választani a 12 tárgy közül 6 olyat, hogy ha csak az ebből a 6 tárgyból kapott osztályzatokat hasonlítjuk össze, akkor sincs a hét diák közt két olyan, aki mind a 6 tárgyból ugyanazt a jegyet kapta.

Megoldás

Válasszunk ki 2 tanulót és egy olyan tárgyat, amelyből különböző jegyet kaptak. A feladat feltétele szerint ilyen tárgy van. Ezután egyenként veszünk hozzájuk a többi tanulókból, és választunk ki egy-egy tárgyat.

Tegyük fel, hogy már k tanulót és $k-1$ tárgyat kiválasztottunk ($k \geqq 2$ egész szám) úgy, hogy a k tanuló közül bármely kettőnek a $k-1$ tárgy valamelyikéből különböző osztályzata van. Válasszunk ki egy $k+1$-edik tanulót, mondjuk N-et. N-nek ebből a $k-1$ tárgyból legfeljebb a k tanuló egyikével egyezhetnek

az érdemjegyei, pl. A tanulóéval. A feltétel szerint van olyan tárgy, amelyikből A-nak és N-nek különböző osztályzata van, ezek közül választunk egyet k-adiknak. Ha N-nek a k tanuló egyikével sem egyeznek az osztályzatai a kiválasztott $k-1$ tárgyból, akkor a már kiválasztott tárgyakhoz tetszés szerint kiválaszthatunk egyet k-adiknak. Mindkét esetben a $k+1$ tanulóhoz k tárgyat választottunk a kívánt tulajdonsággal. $k=6$-ig haladva, a 7 tanulóhoz 6 tárgyat választhatunk így ki a feladat állításának megfelelően.

Megjegyzés

A bizonyítás során a feladat állításánál többet bizonyítottunk be: Ha k tanuló közül bármelyik kettő bizonyítványa különböző, akkor kiválasztható $k-1$ tantárgy úgy, hogy csak az ezekből kapott érdemjegyeket nézve is bármelyik két tanuló bizonyítványa különbözik — feltéve, hogy a tantárgyak száma legalább $k-1$.

223. 17 tudós mindegyike levelezést folytat az összes többivel. Összesen háromféle témáról leveleznek, de bármelyik pár mindig csak ugyanarról az egy témáról. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább három olyan tudós, akik közül bármely kettő azonos témáról levelez egymással.

Megoldás

Kiválasztva egy T_1 tudóst, ez legalább az egyik témáról legalább 6 *tudóssal levelez,* hiszen különben legfeljebb 15 tudóssal levelezhetne. Jelöljük ezt a témát t_1-gyel, és csak azokkal a tudósokkal foglalkozzunk, akik T_1-gyel t_1-ről leveleznek.

Ha ezek közt van kettő, akik egymással t_1-ről leveleznek, akkor ezek és T_1 egy kívánt hármast alkotnak. Ha viszont ezek mind csak a másik két témáról leveleznek, akkor — *megint csak a skatulyaelv szerint* — kiválaszthatunk közülük egy T_2 tudóst úgy, hogy ez legalább az egyik témáról — mondjuk t_2-ről — legalább 3-mal levelez.

Ha a három közül valamelyik kettő szintén t_2-ről levelez, akkor ez a kettő és T_2 csak a t_2 témáról leveleznek egymás között; ha pedig mindnyájan a harmadik, t_3 témáról leveleznek, akkor ők azok, akik hárman egymással ugyanarról a témáról, t_3-ról leveleznek, s így a bizonyítást befejeztük.

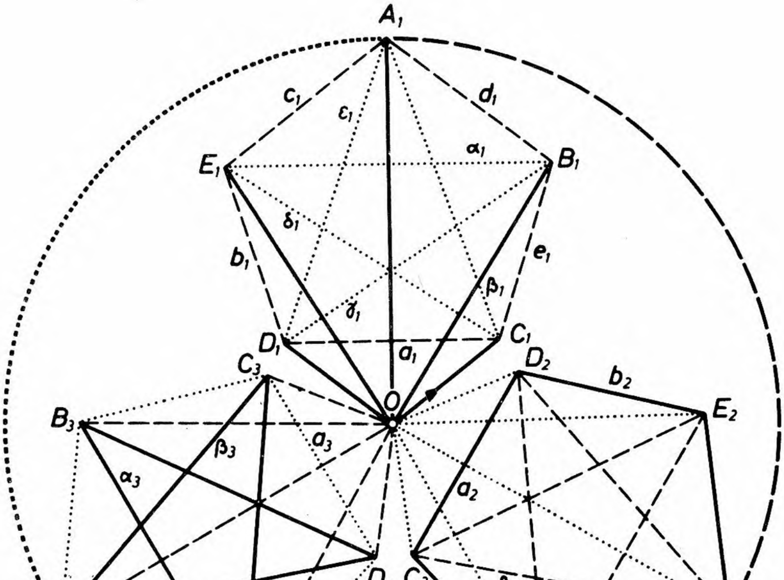
Megjegyzés

Megmutatjuk, hogy 16 *tudós között még elosztható* 3 *téma úgy, hogy bármely* 3 *tudós közt legalább* 2 *levelezési téma szerepel.*

A feladatot átfogalmazzuk a gráfok nyelvére. A tudósok mindegyiké-

nek a sík egy pontját feleltetjük meg, a tudósok közti levelezési kapcsolatokat a pontokat összekötő, témáknak megfelelően választott *élekkel* jellemezzük. Tehát azonos témának azonos típusú él, különböző témáknak különböző típusú él felel meg. (A *170. ábrán* a három témának rendre folytonos, szaggatott és pontozott él felel meg.) Szokás különböző „színű" élekről beszélni, s akkor egy ún. gráfszínezési problémával állunk szemben ([7] II. kötet). Feladatunk állítása így a következő volt: *Egy* 17 *csúcsú teljes gráfot* 3 *színnel színezve, mindig van a gráfban egyszínű háromszög.*

Megmutatjuk, hogy a 16 *csúcsú teljes gráfot lehetséges úgy „színezni"* 3 *színnel, hogy ne legyen benne egyszínű háromszög.* A *170. ábrán,* a feladat bizonyításának szellemében, a T_1 tudósnak megfelelő O pontból



170. ábra

5—5 különböző típusú él indul ki. Az azonos típusú élek végpontjai most már a másik két típusú éllel köthetők össze egymással. A *170. ábrán* nem adtuk meg a teljes konstrukciót, mert akkor áttekinthetetlenné válna az ábra. Megmutatjuk, hogyan lehet befejezni a csúcsok összekötését.

Mindegyik „ötszögben” kiszemeltünk egy-egy pontot és két-két, páronként különböző típusú élt. Célunk az, hogy minden csúcsból mindegyik típusból 5—5 él induljon ki, és persze ne keletkezzen egyszínű háromszög.

Utasításunkat a következő sémában foglalhatjuk össze (a jelölések kapcsolatát a *170. ábrán* érzékeltetjük, pl. a $c_1 \parallel \gamma_1$, és C_1 ezekre nem illeszkedik):

(1)	$A_1 - - - A_2$	$A_2 \text{——} A_3$	$A_3 \ldots A_1$,
(2)	$a_1 \ldots a_2$	$a_2 - - - a_3$	$a_3 \text{——} a_1$,
(3)	$\alpha_1 \text{——} \alpha_2$	$\alpha_2 \ldots \alpha_3$	$\alpha_3 - - - \alpha_1$.

Ahol pl. $A_1 - - - A_2$ azt jelenti, hogy az A_1A_2 él szaggatott;

$a_1 \ldots a_2$, hogy a D_1C_2 és C_1D_2 él pontozott;

$\alpha_1 \text{——} \alpha_2$, hogy a B_1E_2 és E_1B_2 él folytonos.

Ugyanezt mondhatnánk el a B_1, B_2, B_3; b_1, b_2, b_3; β_1, β_2, β_3 stb. pontokra, illetve élekre.

Nézzük most már az A_1 pontot. A *170. ábrán* megrajzolt éleken kívül

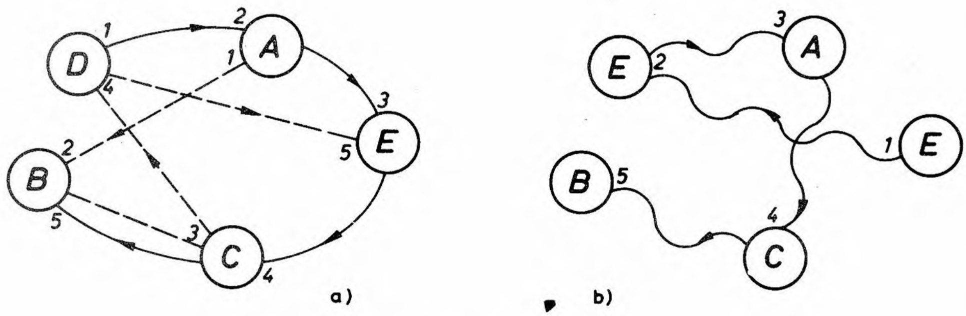
$d_1 \ldots d_2$	$c_1 \ldots c_2$	miatt A_1B_2, A_1E_2 is pontozott élek, s több pontozott él A_1-ből nincsen;	
$\beta_1 \text{——} \beta_2$	$\varepsilon_1 \text{——} \varepsilon_2$	miatt A_1C_2, A_1D_2	is folytonos élek, és több ilyen nincs;
$d_3 \text{——} d_1$	$c_3 \text{——} c_1$	miatt A_1B_3, A_1E_3	
$\beta_3 - - - \beta_1$	$\varepsilon_3 - - - \varepsilon_1$	miatt A_1C_3, A_1D_3 is szaggatott élek, és több ilyen nincs.	

Tehát valóban 5—5 él indul ki A_1-ből minden típusból, s könnyen ellenőrizhetjük, hogy nem keletkezett „egyszínű” háromszög. A konstrukció, valamint az (1), (2), (3) feltételek szabályossága miatt az A_1 pont szerepe nem kitüntetett. Tehát a konstrukció megfelel a követelményeknek.

224. Egy versenyen öt tanuló vett részt: *A*, *B*, *C*, *D* és *E*. Valaki előzőleg azt tippelte, hogy a versenyzők helyezési sorrendje *ABCDE* lesz, azonban — mint utóbb kiderült — így egyetlen versenyző helyezését sem találta el, sőt még azt sem, milyen sorrendben következett két egymás utáni helyezett. Másvalaki a *DAECB* sorrendre tippelt. Ez lényegesen jobbnak bizonyult, mivel ebben pontosan két versenyző helyezése megegyezett a ténylegessel, továbbá ugyancsak két esetben az is, hogy milyen sorrendben követte egymást két versenyző. Milyen eredménnyel végződött valójában a verseny?

Megoldás

Feladatunkat átfogalmazzuk a gráfok nyelvére ([7] II.). Feleltessük meg *A*, *B*, *C*, *D*, *E*-nek a sík 5 pontját. A verseny végeredményét és az arra vonatkozó tippeket is egy-egy (irányított) gráffal szemléltethetjük, tudniillik a megadott sorrendben összekötjük a pontokat élekkel. Az éleken nyilakkal tüntetjük fel az egymásutániságot, s a csúcsokhoz írt számokkal a sorszámot is feltüntetjük. A *171/a ábrán* szaggatott vonallal rajzoljuk meg az első tipphez tartozó (*S*), folytonos vonallal a második tipphez tartozó (*F*) gráfot.



171. ábra

Feladatunk tehát a következő: Úgy rajzoljuk meg (hullámvonallal) *a végeredményhez tartozó* (*H*) *gráfot, hogy ez*
1. *egyetlen nyílban és sorszámban se egyezzen meg az* (*S*) *gráffal,*
2. *két nyílban és két sorszámban egyezzen az* (*F*) *gráffal.*

Először a 2. *követelményt, az* (*F*) *gráfot vizsgáljuk. Tegyük fel, hogy létezik a* (*H*) *gráf.*

(I.) *Ha* (*F*)*-ben és* (*H*)*-ban egy-egy nyíl megegyezik, és az egyik megfelelő* (mondjuk kezdő) *pontjához azonos sorszám került, akkor a másiknál is* (végpontok) *azonos sorszám van.* Ez az egymásutániság fogalmából következik.

(II.) *Ebből adódik, hogy* (*F*) *és* (*H*) *nem egyezhet meg két-két egymás utáni nyílban.* Ellenkező esetben egyik megfelelő pontpárhoz sem tartozhat azonos sorszám, hiszen akkor (*F*) és (*H*) három sorszámban egyezik. A maradék két-két

pontot viszont nem lehet azonos sorszámmal párosítani, hiszen előző megjegyzésünk szerint a két-két egymás utáni nyíl számozásánál — (F) -nél és (H)-nál — legalább 4-féle számot felhasználtunk. *Tehát* (F) *és* (H) *csak a*

(a) DA, EC; vagy (b) DA, CB; vagy (c) AE, CB

nyilakban egyezhet meg.

(III.) *Ugyancsak az* (I.) *és* (II.) *állításból következik, hogy* (F)*-ben és* (H)*-ban a két-két megegyező nyíl közül pontosan egyhez azonos sorszámok is tartoznak.* Ha ugyanis a másikhoz is tartozna azonos sorszám, akkor 4 megegyező sorszám lenne, ha pedig egyikhez sem, akkor csak 1 megegyező sorszám lenne.

Ezek szerint az (a) és (c) esetekben (F) és (H) nem egyezhet meg nyílban és sorrendben EC-ben, illetve AE-ben, hiszen akkor DA, illetve CB-ben is meg kellene egyeznie.

Most vesszük figyelembe az 1. *kikötést, tehát az* (S) *gráfot.*

(a) *esetben* (H) csak $DABEC$ lehetne, de akkor (S)-sel az AB nyílban megegyezne.

(c) *esetben* (H) csak $AEDCB$ lehetne, de akkor (S)-sel A sorszámában megegyezne.

(b) *esetben* a $DACBE$ sorrend nem megfelelő, hiszen (S)-ben C sorszáma szintén a 3.

A (b) *eset* $EDACB$ választása az egyetlen megfelelő lehetőség (H)-ra *(171/b ábra).*

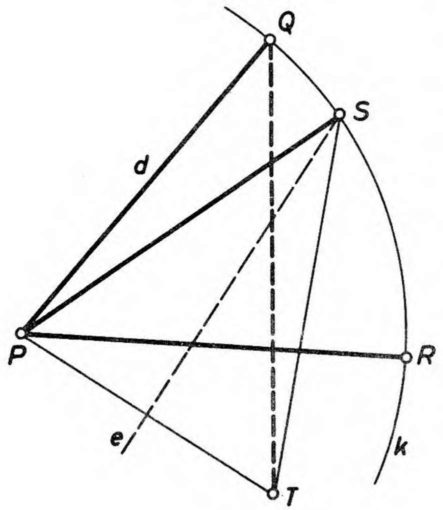
Ezzel a feladatot megoldottuk.

225. Adott a síkban n darab pont ($n \geqq 3$). A belőlük kiválasztható összes pontpár által meghatározott szakaszok hosszának maximuma legyen d. Az említett szakaszok közül azokat, melyeknek a hosszúsága éppen d, az adott pontrendszer átmérőinek nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb n darab ilyen átmérő van.

Megoldás

Nevezzük minden egyes pont rendszámának az oda befutó átmérők számát. Ha nincs 2-nél nagyobb rendszámú pont, akkor az állítás igaz, hiszen így az átmérővégződések összes száma legfeljebb $2n$, és minden átmérő 2 pontba fut be.

Tegyük fel, hogy a P pont rendszáma nagyobb 2-nél. Ekkor minden ide befutó átmérő másik végpontja a P körüli d sugarú k körön van, és egy adott pont sem fekszik k-n kívül (172. ábra). Legyen QR a k-nak az a legrövidebb íve, amely az összes végpontokat tartalmazza, ahol Q és R az adott pontok közül valók, és



172. ábra

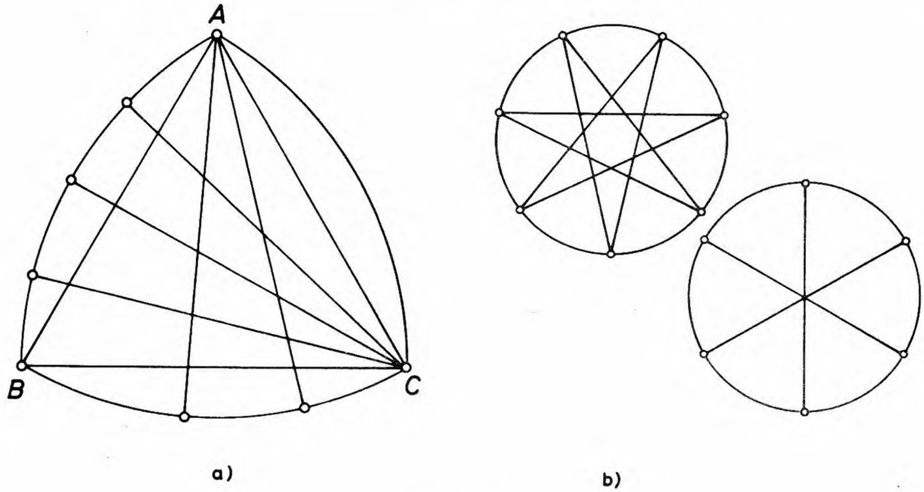
$QR \leqq d$. Feltevésünk szerint van az ív belsejében legalább egy S pont az adott pontok közül. Állítjuk, hogy minden ilyen belső S pont rendszáma 1. Valóban ellentmondásra jutunk azt feltéve, hogy ST egy az SP-től különböző átmérő. Ekkor ugyanis PT-nek (S-en átmenő) e felező merőlegese elválasztja egymástól Q-t és R-et, és ha ezek közül Q van e-nek a P-t tartalmazó partján, akkor $QT > QP = d$, ami lehetetlen. (e csak akkor nem választaná el Q-t R-től, ha S-en kívül még egyszer metszené a mondott QR ívet, ekkor azonban T kívül esnék a k-n, ami lehetetlen.) *Ezek szerint a pontrendszer minden 2-nél nagyobb rendszámú pontjából legfeljebb 2 átmérő mehet olyan pontba, melynek rendszáma nagyobb 1-nél.*

Hagyjuk el most átmenetileg a 2-nél kisebb rendszámú pontokat és a belőlük esetleg kiinduló átmérőket. Bármelyik megmaradó pontból legfeljebb 2 átmérő indul ki, tehát előzetes megjegyzésünk szerint e szűkített pontrendszerre az állítás helyes, az átmérők száma nem nagyobb a pontok számánál. Visszavéve az 1 vagy 0 rendszámú pontokat, minden ponttal együtt legfeljebb 1 átmérőt veszünk vissza, tehát az állítás igaz marad.

Megjegyzés

1. *Bármely szóba jövő n esetére megadható n átmérőt tartalmazó pontrendszer.* Ilyet alkot pl. egy ABC szabályos háromszög 3 csúcsa és $n-3$ olyan pont, amely A, B, C egyikétől AB-vel egyenlő, a másik kettőtől pedig kisebb távolságra van *(173/a ábra)*.

2. A szabályos n-szög csúcsaiból álló rendszernek $n = 2k+1$ esetén ugyancsak n átmérője van, $n = 2k$ esetén viszont csak $\frac{n}{2}$. A pontok rendje az első esetben 2, a második esetben 1 *(173/b ábra)*.



173. ábra

226. Adott a síkban 5 pont. Azok között az egyenesek között, melyek ezt az 5 pontot páronként összekötik, nincsenek sem párhuzamosak, sem egymásra merőlegesek, sem egymással egybeesők. Az adott pontok mindegyikéből merőlegeseket bocsátunk az összes olyan egyenesre, melyeket a megmaradó négy-négy pont páronkénti összekötésével nyerünk. Mennyi a merőlegesek metszéspontjai számának maximuma, ha az adott 5 pontot figyelmen kívül hagyjuk?

Megoldás

a) $P_1, P_2, \ldots, P_5$ legyenek az adott pontok. Összesen:

$$\binom{5}{2} = 10 \text{ pár összekötő szakasz van,}$$

$$\binom{5}{3} = 10 \text{ háromszög van.}$$

A 4 pont páros összekötésével

$$\binom{4}{2} = 6 \text{ összekötő szakaszt kapunk.}$$

Ezekből és a feladat feltételeiből következik: minden P_i pontból ($i = 1, \ldots, 5$) 6 merőleges húzható, ez összesen 30 merőleges. Ezek a merőlegesek maximálisan

$$\binom{30}{2} = 435 \text{ metszéspontot adhatnak.}$$

Azonban a 10 *összekötő szakasz mindegyikéhez* 3 *olyan merőleges tartozik, melyek mindegyike ugyanarra az egyenesre merőleges, egymással tehát párhuza-*

mosak. Ezeknek egymással nincs metszéspontjuk. Ezáltal $10 \cdot 3 = 30$ metszéspont kiesik.

Ezenkívül 3—3 *merőleges mint magasságvonal lép fel a* 10 db *háromszögben, ezek egymást a magasságpontban metszik*. Ez további $10 \cdot 2 = 20$ pont kiesését jelenti.

A 30 merőleges az adott pontokból indul ki, itt metszik egymást. Minden P_i-ben 6 merőleges metszi egymást, ez összesen $\binom{6}{2} \cdot 5 = 75$ metszéspontot jelent, melyek nem jönnek számításba. Tehát a metszéspontok maximális száma legfeljebb

$$435 - 30 - 20 - 75 = 310 \text{ lehet.}$$

b) *Megmutatjuk, hogy az 5 pont megválasztható úgy, hogy a merőlegeseknek (az adott pontokon kívül) 310 metszéspontja legyen.*

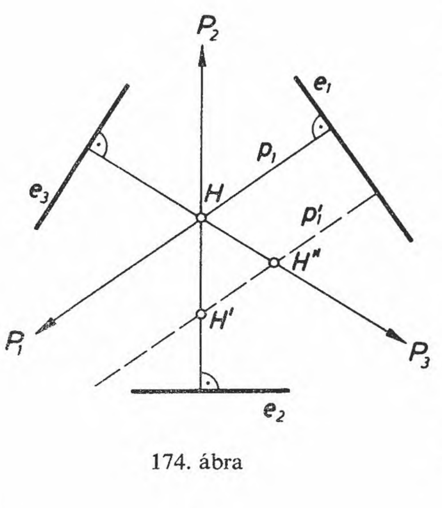
Az előző összeszámlálást figyelembe véve, ehhez elegendő megmutatni, hogy ha p_1, p_2, p_3, rendre a P_1, P_2, P_3 adott pontokból kiinduló merőlegesek — melyek nem a $P_1P_2P_3$ háromszög magasságvonalai — egyetlen H pontban metszik egymást, akkor valamelyik P_i pontot ($i = 1, 2, 3$) egy új, P_i' ponttal pótolhatunk úgy, hogy

I. *az új merőlegesek: p_1', p_2', p_3' három pontban metszik egymást,*

II. *a merőlegesek többi metszéspontjának száma nem csökken.*

Ezzel az eljárással értelemszerűen minden „kellemetlen" egybeesést fokozatosan megszüntethetünk.

Először az I. követelményt biztosítjuk. Legyen p_1, p_2, p_3 rendre az e_1, e_2, e_3 egyenesekre merőleges (e_i az adott pontok közül valamelyik kettőt összekötő egyenes). Előzetes megjegyzésünk értelmében feltehetjük, hogy pl. P_1 különbözik az e_2 és e_3 egyenesek metszéspontjától *(174. ábra)*.



174. ábra

Most P_1-et P_1'-vel pótoljuk: Ha $P_1 \in e_3$-nak, akkor P_1'-t is az e_3 egyenesen, ha $P_1 \in e_2$-nek, akkor P_1'-t is az e_2 egyenesen vesszük fel, ha P_1 sem e_2-re, sem e_3-ra nem illeszkedik, akkor tetszőleges, p_1-re nem illeszkedő pontot választhatunk

P_1'-nek. Ugyanis p_2 és p_3 változatlan marad, p_1' pedig p_1-gyel párhuzamos, így p_1' p_2 és p_3-mal való H', illetve H'' metszéspontja H-tól is és egymástól is különbözik.

Most térünk rá a II. követelményre: A P_1' pontra még újabb kikötést kell tennünk, mégpedig azt, hogy a P_1P_1' távolság „elég kicsiny" legyen.

Az eredeti P_i $(i=1, \ldots, 5)$ pontrendszerben fellépő összes metszéspontok száma véges, így ezek között a metszéspontok között van két olyan, amelyek távolsága minimális. Jelöljük ezt a távolságot d-vel. Az összes pontok távolságainak maximumát D-vel jelöljük. Vezessük be a $\frac{d}{2}=r$ jelölést is.

Megmutatjuk, hogy van olyan — r-től függő — $\delta>0$ szám, hogy ha már $P_1P_1'<\delta$, akkor az eredeti merőlegesek metszéspontja közül bármely T-re és a változtatás után neki megfelelő T'-re $TT'<r$.

A II. követelmény ezután már r megválasztása miatt teljesül. (Ezt másképpen úgy mondjuk, hogy minden T helyzete folytonos függvénye a P_1 helyzetének. Ennek bizonyítása természetesen más eszközökkel is történhet. Pl. koordinátageometriai módszerrel.)

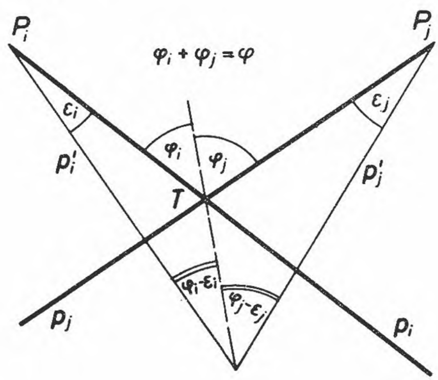
Legyen tehát T a P_i-ből kiinduló p_i merőleges és a P_j-ből kiinduló p_j merőleges metszéspontja; T' pedig a T-nek megfelelő pont *(175. ábra)*. Ha P_1-et P_1'-be visszük, akkor a P_1P_2, P_1P_3, $\ldots$, P_1P_5 egyenesek bizonyos ε_2, ε_3, ε_4, ε_5 szöggel elfordulnak.

A sinustételből könnyen belátható, hogy $\sin \varepsilon_k \leqq \frac{P_1P'}{P_1P_k}$, azaz

(1) $\sin \varepsilon_k \leqq \frac{P_1P_1'}{d}$ $(k=2, 3, 4, 5)$.

Rendre ε_2, ε_3, ε_4, ε_5 szöggel fordulnak el a P_1P_2, $\ldots$, P_1P_5-re merőleges egyenesek is.

A P_1-ből induló merőlegesek a P_1-ről P_1'-re történő áttérésnél nyilván P_1P_1'-nél kisebb távolságra tolódnak el.



175. ábra

A p'_i és p'_j tehát vagy eltolással, vagy P_i, illetve P_j körüli ε_i, illetve ε_j szögű elforgatással keletkezik p_i-ből és p_j-ből.

Csak a 175. ábra esetét vizsgáljuk, hasonlóan vagy még egyszerűbben tárgyalható a többi eset is. A TT' egyenes a $P_iTP_j \sphericalangle = \varphi$ szögtartományt két részre bontja, φ_i-re és φ_j-re, tekintsük ezek közül a nagyobbikat, φ_j-t.

Ekkor

$$\frac{\varphi}{2} \leqq \varphi_j \leqq \varphi. \tag{2}$$

A P_jTT' háromszögből sinustétellel

$$TT' = \sin \varepsilon_j \cdot \frac{P_jT}{\sin(\varphi_j - \varepsilon_j)}. \tag{3}$$

Legyen most már a $P_1P'_1$ olyan kicsiny, hogy az (1)-nek megfelelő ε_k értékekre $\varepsilon_k < \frac{\varphi}{4}$ teljesüljön az összes fellépő φ szögre. Ekkor (2) és (3)-nak megfelelően $\frac{1}{4}\varphi < \varphi_j - \varepsilon_j \leqq \varphi$. Ha $\sin\frac{\varphi}{4}$ és $\sin\varphi$ közül a legkisebbet m-mel jelöljük (az összes fellépő φ-re):

$$TT' \leqq \sin \varepsilon_j \cdot \frac{P_jT}{m},$$

vagy (1) és $P_jT \leqq D$ figyelembevételével:

$$TT' \leqq \frac{P_1P'_1}{d} \cdot \frac{D}{m}. \tag{4}$$

Ha mármost $P_1P'_1 < \frac{rdm}{D}$ $\left(\text{definíció szerint } \frac{rdm}{D} = \delta\right)$, akkor (4) szerint $TT' < r$.

Előzetes megjegyzéseink értelmében ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzés

A bizonyítás *b)* részének nehézségeit s hosszadalmasságát a VI. NMD versenybizottsága a feladat kitűzésekor talán nem mérlegelte kellőképpen. Az elbírálásnál a versenyzőktől csak az *a)* rész bizonyítását kívánták meg.

227. Adott a síkban n pont ($n > 4$), közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Bizonyítsuk be, hogy legalább $\binom{n-3}{2}$ olyan konvex négyszög van, amelyeknek csúcspontjai az adott pontok közül valók!

Megoldás

Először megmutatjuk, hogy 5 pont közül mindig kiválasztható legalább egy konvex négyszög, majd ennek alapján alulról becsüljük meg az n pont közül kiválasztható konvex négyszögek számát.

1. $n=5$ esetén kiválasztható legalább egy konvex négyszög.

a) Ha az 5 pont konvex ötszöget alkot, akkor bármelyiket elhagyva, konvex négyszöget kapunk, tehát 5 darabot.

b) Ha az 5 pont közül négy konvex négyszöget alkot, az ötödik pedig a négyszög belsejében van, akkor is van egy konvex négyszögünk.

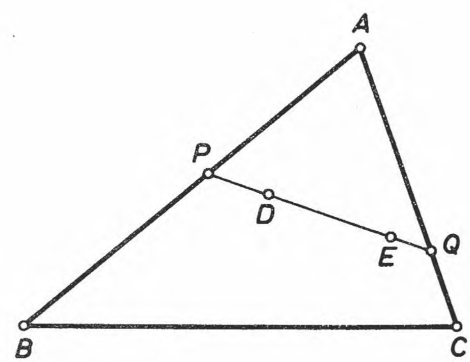
c) Tegyük fel, hogy A, B, C háromszöget képez, és ennek belsejében vannak D és E *(176. ábra)*. A DE egyenesen a háromszög egyik csúcsa sem lehet rajta. Feltehetjük, hogy ez az egyenes P pontban metszi az AB, Q pontban az AC szakaszt. $BCDE$ konvex négyszög, hiszen az ABC háromszögből egyenesekkel történő kettévágásokkal származtatható.

2. *n pont közül* $\binom{n}{5}$*-féleképpen választhatunk ki öt pontot.* Minden pontötösben legalább egy konvex négyszög van. Így legalább $\binom{n}{5}$ konvex négyszöget kapnánk. *Egy négyszöget azonban esetleg többször is figyelembe vettünk.* Mégpedig maximálisan $(n-4)$-szer számíthattuk be, minthogy egy négyszög $(n-4)$ pontötöshöz tartozik hozzá [négy csúcshoz az ötödiket $(n-4)$-féleképpen választhatjuk].

Ha tehát $F(n)$ jelöli az n pont bármely — feladatnak eleget tevő — elhelyezkedése mellett a kiválasztható konvex négyszögek minimális számát, akkor

$$(1)\quad F(n) \geqq \frac{1}{n-4}\binom{n}{5} = \frac{1}{5}\binom{n}{4} \equiv f(n).$$

Vezessük be a $g(n) = \binom{n-3}{2}$ függvényt is. *Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy* $n>4$ *mellett* $f(n) \geqq g(n)$. Közvetlenül ellenőrizhetjük, hogy $f(5) = g(5) = 1$, $f(6) = g(6) = 3$. $n \geqq 7$ mellett viszont



176. ábra

$$\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}:\frac{(n-3)(n-4)}{2}=\frac{n(n-1)(n-2)}{60(n-4)}=$$

$$=\frac{n(n+1)+6}{60}+\frac{2}{5(n-1)}>\frac{n(n+1)+6}{60}\geqq\frac{62}{60}>1.$$

Ezzel a feladat állítását még élesítettük is. Megmutattuk, hogy n pont közül legalább $f(n)=\frac{1}{5}\binom{n}{4}$ konvex négyszög választható ki.

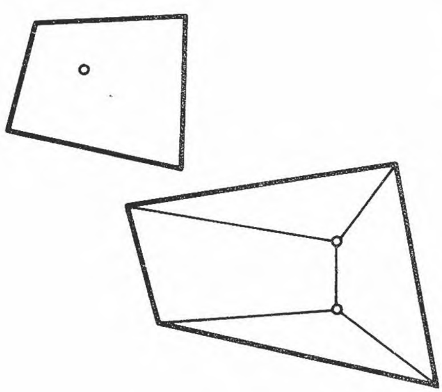
Megjegyzés

n	5	6	7	8	9	...
$f(n)$	1	3	7	14	25,2	...
$F(n)$	1	3	?	?	?	?

A fenti táblázatban feltüntettük az $f(n)$ függvény néhány értékét. $n=5$ és $n=6$-ra $f(n)=F(n)$, mert van olyan elhelyezés, amikor pontosan $f(n)$ számú konvex négyszög választható ki. $n\geqq 7$-re $F(n)$ pontos értékének meghatározása egyre nehezebbé válik *(177. ábra)*.

Ha bizonyos konkrét elhelyezkedésnél megállapíthatjuk a kiválasztható konvex négyszögek számát, akkor $F(n)$-re felső korlátot kapunk. Érdemes megkísérelni bizonyos konstrukciós sémákkal felülről becsülni $F(n)$-et.

228. Adott a síkban 100 pont; közülük semelyik három nem esik egy egyenesbe. Tekintsük az összes lehetséges háromszöget, amelyeknek csúcspontjai az adott pontok közül valók. Bizonyítsuk be, hogy ezeknek a háromszögeknek legfeljebb 70%-a hegyesszögű!



177. ábra

Megoldás

Az n pontból kiválasztható nem hegyesszögű háromszögek minimális számát jelölje $f(n)$, akkor a hegyesszögű háromszögek maximális számát $F(n)$-nel jelölve, nyilván ezek ugyanahhoz a pontelrendezéshez (esetleg többhöz is) *tartoznak.*

$$(1)\qquad F(n)+f(n)=\binom{n}{3},$$

hiszen az adott feltételek mellett n pontból $\binom{n}{3}$ háromszög választható ki.

A nem hegyesszögű háromszögek minimális arányát $\varphi(n)$, a hegyesszögűek maximális arányát $\Phi(n)$ jelölje:

$$(2)\qquad f(n)=\varphi(n)\binom{n}{3},\quad F(n)=\Phi(n)\binom{n}{3};\quad \varphi(n)+\Phi(n)=1.$$

A következőkben $\varphi(n)$-et alulról becsüljük, és így egyúttal $\Phi(n)$-et felülről becsüljük. Így jutunk el a feladat megoldásához.

I. *Először megmutatjuk, hogy $n=4$-re*

$$\varphi(4)=\frac{1}{4},\quad \Phi(4)=\frac{3}{4}.$$

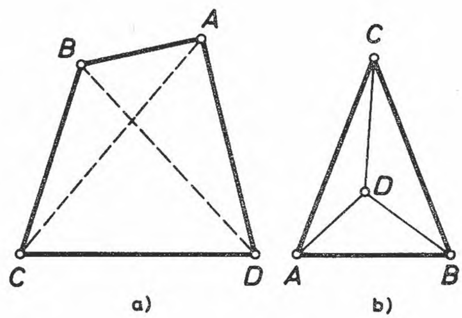
II. *Majd utána bebizonyítjuk, hogy*

$$\varphi(n+1)\geqq\varphi(n).$$

III. *Ebből $n=5$ mellett már következik,* $\varphi(5)\geqq 0{,}3$, $\Phi(5)\leqq 0{,}7$ *és* II. *miatt még inkább $n>5$-re* $\varphi(n)\geqq 0{,}3$, $\Phi(n)\leqq 0{,}7$.

Ez tehát $n=100$-ra is igaz lesz.

I. *Tekintsük a 4 pont legkisebb konvex burkát.* Ez vagy négyszög *(178/a ábra)*, vagy háromszög *(178/b ábra)*. Az első esetben a szögek összege 360°, biztosan van $\frac{360°}{4}=90°$-nál nem kisebb szög valamelyik csúcsnál. Ez a csúcs a szomszédosokkal nem hegyesszögű háromszöget alkot. A második esetben az ADB, BDC, CDA szögek összege 360°, közöttük biztosan van $\frac{360°}{3}=120°$-nál nem kisebb szög, ami 90°-nál nagyobb. A *178/a ábra* megmutatja, hogy a négy pont elhelyezhető úgy, hogy pontosan 3 háromszög hegyesszögű, 1 háromszög pedig tompaszögű.



178. ábra

II. *Tekintsük a $\varphi(n+1)$-hez tartozó pontelrendezést. Az $n+1$ pontból kiválasztható $n+1$ darab részhalmaz, melynek mindegyike n pontból áll.* Ezek mindegyikében *legalább* $f(n)=\varphi(n)\binom{n}{3}$ darab nem hegyesszögű háromszög van. Összesen tehát *legalább* $(n+1)\,f(n)$ db háromszöget választottunk ki. *De egy három-*

szöget esetleg többször is kiválasztottunk, mégpedig *legfeljebb* annyiszor, ahány n-elemű részhalmazhoz ez tartozik. Ha három csúcsot rögzítünk, akkor az n-re kiegészítő $n-3$ db pontot a maradék $n+1-3=n-2$ pontból kell kiválasztanunk. Ez $n-2$-féleképpen lehetséges.

Végül is az $(n+1)$ pont körül legalább $\frac{n+1}{n-2}f(n)$ nem hegyesszögű háromszög van:

$$f(n+1)=\varphi(n+1)\binom{n+1}{3}\geqq\frac{n+1}{n-2}f(n)=\frac{n+1}{n-2}\varphi(n)\binom{n}{3},$$

$$\varphi(n+1)\geqq\varphi(n)\frac{n+1}{n-2}\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{\binom{n+1}{3}}=\varphi(n).$$

III. Ha $n=5$, akkor összesen $\binom{5}{3}=10$ háromszög van. Az $f(5)$ egész számra II. alapján:

$$f(5)=10\,\varphi(5)\geqq10\,\varphi(4)=2{,}5,$$

tehát

$$f(5)\geqq3;\quad F(5)\leqq7;\quad \varphi(5)\geqq0{,}3;\quad \Phi(5)\leqq0{,}7.$$

Ugyanígy végezhetjük el a becslést a további n-ekre, a becslésben szereplő függvényeket rendre $g(n)$, $G(n)$, $\gamma(n)$, $\Gamma(n)$ jelölje:

$$f(n)\geqq g(n),\quad F(n)\leqq G(n),\quad \varphi(n)\geqq\gamma(n),\quad \Phi(n)\leqq\Gamma(n).$$

n	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$g(n)$	1	3	6	11	18	27	39	54	
$G(n)$	3	7	14	24	38	57	81	111	
$\gamma(n)$	1/4	3/10	3/10	11/35	9/28	9/28	39/120	18/55 ≈0,327	
$\Gamma(n)$	3/4	7/10	7/10	24/35	19/28	19/28	81/125	37/55 ≈0,673	

A táblázatot még tovább is folytathatnánk. Felmerülő kérdés: létezik-e és mennyi $\lim_{n\to\infty}\Gamma(n)$?

229. Az ABC egyenlő szárú háromszögben a B csúcsnál fekvő szög n-szer akkora, mint az A csúcsnál fekvő szög, ahol n 1-nél nagyobb egész szám. Mutassuk meg, hogy lehet a háromszöget $n-1$ egyenes vágással úgy szétvágni n egyenlő szárú háromszögre, hogy valamennyi háromszög szárai egyenlők legyenek!

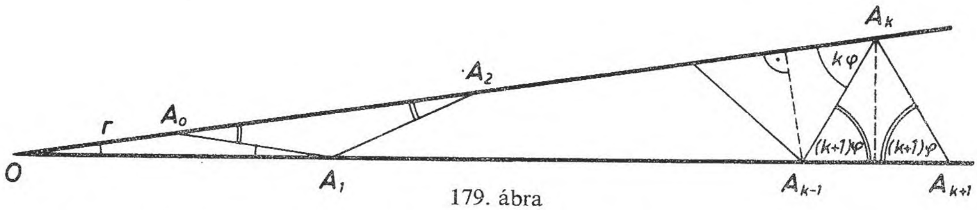
Megoldás

Legyen a BAC szög nagysága φ, ekkor az ABC szög $n\varphi$. Mivel $n>1$, φ és $n\varphi$ különbözők, ezért *a háromszög szárai A-ban vagy B-ben futnak össze. Az állítást mindkét esetre bizonyítani kell (180. ábra).*

A felbontásnál keletkező háromszögek egyenlő szárú voltát a szögek egyenlőségével biztosítjuk.

Először egy segédtételt bizonyítunk.

Tekintsünk egy O csúcsú, φ nagyságú szöget *(179. ábra)*. Egyik szárán ve-



179. ábra

gyünk fel egy A_0 pontot. Az AA_0 szakasz hossza legyen r. A szög száraiból r sugarú körívekkel váltakozva metsszük rendre az $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots$ pontokat a *179. ábrának* megfelelően.

Állítás:

1. Az $OA_{k-1}A_k$ háromszögben az $A_{k-1}A_kO\sphericalangle=k\varphi$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

2. A fenti sorozat „utolsó”, A_n pontját az az n egész szám jellemzi, melyre $n\varphi<90°\leqq(n+1)\varphi$.

A bizonyításhoz felhasználjuk azt az ismert tételt, hogy egy háromszög külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő belső szögek összegével.

Teljes indukcióval bizonyítunk: OA_0A_1 egyenlő szárú háromszög, ezért $A_0A_1O\sphericalangle=1\cdot\varphi$. Most k-ról $k+1$-re bizonyítunk. Feltéve, hogy az $A_{k-1}A_k$ háromszögben $A_{k-1}A_kO\sphericalangle=k\varphi$, akkor az A_{k+1}-nél levő külső szög $(k+1)\varphi$ lesz. Feltéve, hogy $(k+1)\varphi<90°$, az A_k-ból OA_{k-1}-re bocsátott merőlegesre tükrözve A_{k-1}-et, éppen A_{k+1}-hez jutunk, hiszen $A_{k-1}A_k=A_{k+1}A_k=r$. Az $A_kA_{k+1}O\sphericalangle=$ $=(k+1)\varphi$, ezt akartuk igazolni.

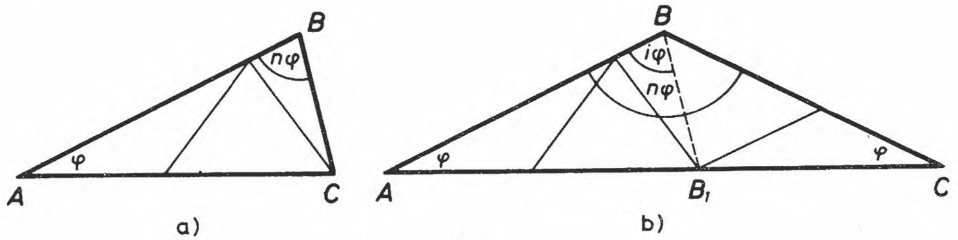
Az is látszik, hogy akkor és csak akkor nem tudunk tovább haladni A_k-ról A_{k+1}-re, ha $(k+1)\varphi\geqq90°$.

a) *Térjünk most már rá arra az esetre, amikor az ABC egyenlő szárú háromszög szárai A-ba futnak.* Ekkor

$$\varphi=\frac{180°}{2n+1},\quad n\cdot\varphi=\frac{n}{2n+1}\cdot180°<90°.$$

A segédtétel lépéseit erre a φ szögre végrehajtva, az n-edik lépés után kapott

$OA_{n-1}A_n$ háromszög hasonló ABC-hez. Az $OA_{n-1}A_n$ háromszöget az A_0A_1, A_1A_2, ..., $A_{n-2}A_{n-1}$ szakaszok n egyenlő szárú háromszögre bontják, ezek megfelelői — az előbbi hasonlóságnál — ugyanezt teszik az ABC háromszöggel *(180/a ábra)*.



180. ábra

b) *Tegyük fel, hogy az ABC egyenlő szárú háromszög szárai a B csúcsba futnak.* Ekkor $\varphi=\frac{180°}{(n+2)}$. A segédtétel lépéseit erre a φ szögre alkalmazzuk, ameddig csak lehet. Így egy $OA_{i-1}A_i$ háromszöget kapunk, i-re teljesül az $i\varphi<90°\leqq(i+1)\varphi$. Figyelembe véve, hogy $\varphi=\frac{180°}{n+2}$, ez egyenértékű az $i<\frac{n}{2}+1\leqq i+1$ egyenlőséggel.

Tekintsük azt a $\frac{CB}{OA_i}$ arányú hasonlóságot, amely az $OA_{i-1}A_i$ háromszöget az AB_1B háromszögbe viszi a *180/b ábrának* megfelelően. Idáig i darabot vágtunk le ABC-ből. A fennmaradó CB_1B háromszögben fennáll $B_1BC\sphericalangle=(n-i)\varphi=\frac{(n-i)180°}{n+2}<90°$, hiszen az utóbbi egyenlőtlenség ekvivalens az $i+1>\frac{n}{2}$ egyenlőtlenséggel, ez pedig teljesül.

A segédtételt az *a)* esethez hasonlóan alkalmazva, további $n-i$ darab egyenlő szárú háromszöget tudunk levágni a CB_1B háromszögből. Minden szár BB_1 hosszúságú.

230. Legyen n természetes szám, k pedig 2-nél nagyobb egész szám. A síkban n darab konvex k-szöget rajzolva, maximálisan hány részre oszthatjuk velük a síkot?

Megoldás

Több próbálkozás után megsejthetjük a megoldás lényegét: minden „új" k-szög berajzolásával legfeljebb annyi „új" tartomány jön létre, mint ahány részre bontják a „régi" k-szögekkel való metszéspontok az „új" k-szög kerületét. Tehát az új metszéspontok számát kell minél nagyobbra „választani".

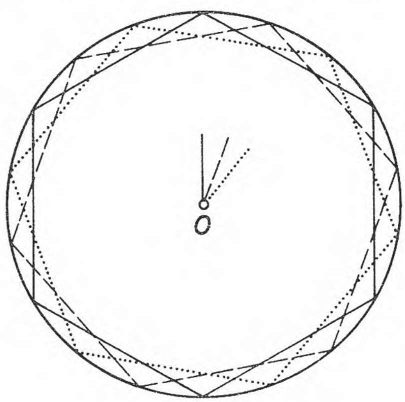
230.

Végül megmutatjuk, hogy van olyan elrendezés, amikor az n darab konvex k-szög pontosan $n(n-1)k+2$ részre osztja a síkot, azaz

$$(5) \qquad G(n;k)=n(n-1)k+2.$$

A 182. ábrán szabályos k-szögekkel mutatunk meg egy ilyen elrendezést ($n=3$, $k=6$). Egy szabályos k-szöget véve K_1-nek, ezt középpontja körül rendre $\frac{2\pi}{kn}, 2\cdot\frac{2\pi}{kn}, \ldots, (n-\quad\frac{2\pi}{kn}$ szöggel elforgatva kapjuk a $K_2, K_3, \ldots, K_n$ k-szögeket. Ezek csúcsai a K_1 köré írt kör egymástól különböző pontjai.

Megmutatjuk, hogy nincs olyan pont, amelyben három k-szög metszi egymást. A K_1 k-szögbe írt kört K_2, K_3, ..., K_n oldalszakaszai is érintik. Egy körhöz egyetlen pontból sem húzható 2-nél több érintőszakasz.



182. ábra

K_1 két részre osztja a síkot, K_2 minden oldalszakasza K_1-et két pontban metszi, így K_2 kerületén $2k$ metszéspont keletkezett, s a köztük levő $2k$ darab töröttvonal $2k$ darab új tartományt hoz létre. Folytatva, K_n mindegyik oldalszakasza a megelőző sokszögek mindegyikét 2 pontban metszi, K_n kerületén $2(n-1)k$ metszéspont keletkezik, s a köztük levő töröttvonalak ugyanennyi „új" tartományt hoznak létre. A tartományok száma tehát

$$2+2[k+2k+\ldots+(n-1)k]= \\ =n(n-1)k+2.$$

Az utóbbi állításokat megint a szemlélet alapján fogadtuk el. A következő két állítást használtuk fel:

1. *Konvex sokszög a síkot két egyszeresen összefüggő* tartományra bontja.

2. *Az „egyszeresen összefüggő" tartományt a hozzá tartozó minden olyan töröttvonal, mely határpontokat köt össze és más határponton nem halad át, két „egyszeresen összefüggő"* tartományra bontja *(27. jegyzet).*

231. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k}}=1.$$

I. megoldás

Állításunkat teljes indukcióval igazoljuk. Legyen $S_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}$. Felada-

tunk szerint azt kell megmutatnunk, hogy $S_n=2^n$. Ez $n=0$ mellett a definíciók szerint igaz.

Tegyük fel, hogy ha $i \leqq n$, *akkor* $S_i=2^i$. *Megmutatjuk, hogy ekkor* $S_{n+1}=$ $=2^{n+1}$. *Ezzel állításunkat igazoljuk.* Világos, hogy közben fel kell használnunk a binomiális együtthatók (definiálásra is alkalmas)

$$\binom{m+1}{l}=\binom{m}{l-1}+\binom{m}{l} \quad (1 \leqq l \leqq m;\ m,\ l \text{ természetes számok})$$

tulajdonságát, valamint az indukciós feltevést. Ez indokolja az alábbi átalakításokat.

$$S_{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+k+1}{k}2^{-k}=1+\sum_{k=1}^{n+1}\left[\binom{n+k}{k-1}+\binom{n+k}{k}\right]2^{-k}=\dots(j=k-1)\dots$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\binom{n+j+1}{j}2^{-j-1}+\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+k}{k}2^{-k}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+j+1}{j}2^{-j}+\binom{2n+1}{n+1}2^{-n-1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+j+1}{j}2^{-j}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}=\frac{1}{2}S_{n+1}+S_n.$$

Az utolsó előtti lépésben felhasználtuk, hogy

$$\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}2^{-n-1}=\frac{1}{2}\left[\binom{2n+1}{n}+\binom{2n+1}{n+1}\right]2^{-n-1}=\frac{1}{2}\left[2\binom{2n+1}{n+1}\right]2^{-n+1}=$$

$$=\binom{2n+1}{n+1}2^{-n-1}.$$

Átalakításunk egy ún. rekurziós formulához vezetett: $S_{n+1}=\frac{1}{2}S_{n+1}+S_n$, ebből $S_{n+1}=2S_n$. Indukciós feltevésünk szerint $S_n=2^n$, így $S_{n+1}=2^{n+1}$, állításunkat igazoltuk.

II. megoldás

Feladatunkat „alkalmas" szöveges feladat keresésével a valószínűségszámítás területére visszük.

Egy érmével fej—írást játszunk. Addig dobáljuk fel, amíg a fejdobások vagy írásdobások száma el nem éri az $n+1$-et. Ehhez nyilván legalább $n+1$ dobásra van szükségünk, és $2n+1$ dobás biztosan elég. Határozzuk meg annak a való-

színűségét, hogy a szükséges dobások száma $(n+1+k)$, ahol $k=0, 1, 2, \dots, n$. Jelöljük ezt az eseményt A_k-val. Az A_k esemény két részre bomlik aszerint, hogy a fejdobások vagy az írásdobások száma éri el az $(n+1)$-et. Jelöljük a megfelelő eseményeket A_k^F-fel, illetve A_k^I-vel.

Az A_k^F esemény akkor következik be, ha az $(n+k+1)$-edik dobás fej, és az első $(n+k)$ dobásban tetszőleges sorrendben n-szer dobunk fejet és k-szor írást. A lehetséges sorrendek száma $\binom{n+k}{k}$, minden sorrend mellett a dobássorozat valószínűsége $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k+1}$, így $P(A_k^F)=\binom{n+k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k+1}$. Hasonló módon

$$P(A_k^I)=\binom{n+k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k+1},$$

tehát

$$P(A_k)=P(A_k^F)+P(A_k^I)=\binom{n+k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}$$

Mivel az A_k események teljes eseményrendszert alkotnak, valószínűségeik összege 1, vagyis

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k}}=1.$$

Megjegyzés

A II. megoldás rámutat a feladat és még sok más hasonló feladat eredetére. El kell ismernünk, hogy az első megoldás nehezebb, de biztosabb út, a második a szellemesebb, de az ilyen módszerhez már nagy gyakorlat kell (lásd **233.** feladat).

232. Egy egysejtű lény 1 óra hosszat él, utána vagy elpusztul, vagy osztódással két ugyanilyen egysejtű jön létre belőle. Az elpusztulás valószínűsége, p $(0<p<1)$ ugyanaz minden ilyen egysejtűnél. Mi annak a valószínűsége, hogy egy éppen létrejött egysejtűt véve, 3 óra eltelte után egyetlen élő utóda sem lesz?

I. megoldás

1 óra eltelte után a lény p valószínűséggel elpusztul, $(1-p)$ valószínűséggel 2 utódja lesz.

2 óra eltelte után az utódok száma 0, 2 vagy 4 lehet. *0 utód* kétféleképpen lehetséges, vagy már az első órában elpusztult a lény, ennek p a valószínűsége, vagy pedig úgy, hogy az első óra után keletkező 2 lény elpusztul. *Feltesszük, hogy az utódok „élete” független egymástól és az elődök „életétől” is.* Ezt

fejezzük ki, amikor most és a továbbiakban a valószínűségeket összeszorozzuk. Tehát annak valószínűségét, hogy az első órában létrejött két lény a 2. órában elpusztult, úgy kapjuk meg, hogy a két lény létrejöttének valószínűségét szorozzuk a lények elpusztulásának valószínűségével: $(1-p)p^2$. A 2. óra eltelte után tehát $p+(1-p)p^2$ annak a valószínűsége, hogy az utódok száma 0.

Hasonló módon *2 óra után 2 utód van,* ha az előző kettőből 1 elpusztul, 1 pedig osztódik. Ennek valószínűsége

$$(1-p)[p(1-p)+(1-p)p]=2p(1-p)^2.$$

2 óra után 4 utód van, ha az előző 2 utód mindegyike tovább osztódik. Ennek valószínűsége $(1-p)^3$.

3 óra eltelte után egyetlen utód sem marad a következő esetekben: Ha már a 2. óra után nincs utód, ennek valószínűsége $p+(1-p)p^2$. Ha az előző 2 utód mindegyike elpusztul, ennek valószínűsége $2p^3(1-p)^2$. Ha az előző 4 utód mindegyike elpusztul, ennek valószínűsége $(1-p)^3p^4$.

Tehát annak valószínűsége, hogy egy éppen létrejött egysejtűnek 3 óra múlva egyetlen utóda sem lesz: $P=p+(1-p)p^2+2p^3(1-p)^2+p^4(1-p)^3$.

II. megoldás

Feladatunkat most jóval hatékonyabb, általánosabb módszerrel oldjuk meg. Jelölje $P_n=P(A_n)$ annak az A_n eseménynek a valószínűségét, hogy n óra múlva a kiszemelt egysejtű lénynek egyetlen utóda sem él. Ez az A_n esemény úgy jöhet létre, hogy vagy az

„A_1: *az egysejtű egy óra múlva elpusztul*" esemény teljesül, vagy pedig a

„B_{1n}: *az egysejtű az első óra végén ketté osztódik, de az n-edik óra végén egyiküknek sem élnek utódai*" esemény teljesül. Mivel A_1 és B_{1n} egymást kizáró események és — a szokásos jelöléssel —

$$A_n=A_1+B_{1n},\ \text{ezért}\ P(A_n)=P(A_1)+P(B_{1n}).$$

Tudjuk, hogy $P_1=P(A_1)=p$.

A $P(B_{1n})$ valószínűség kiszámításánál használjuk fel, hogy a létrejött egysejtűek sorsa független egymástól és az elődöktől. Az első óra végén létrejött első egysejtűnek az n-edik óra végén, tehát $n-1$ óra múlva, P_{n-1} valószínűséggel nem lesz utóda. Ugyanígy a másodiknak $n-1$ óra múlva P_{n-1} valószínűséggel nem lesz utóda. A függetlenség miatt $P_{n-1}\cdot P_{n-1}=P_{n-1}^2$ annak a valószínűsége, hogy az első óra végén létrejött két egysejtű egyikének sem élnek utódai az n-edik óra végén. És mivel az első óra végén az osztódás $q=1-p$ valószínűséggel következik be, ezért $P(B_{1n})=q\cdot P_{n-1}^2$. *Tehát végül is az*

(1) $$P_n=p+qP_{n-1}^2,\ P_1=p,\ q=1-p$$

rekurzív összefüggést kaptuk P_n kiszámítására. Feladatunkban

$$P_3 = p + qP_2^2 = p + q(p + qP_1^2)^2 = p + q(p + qp^2)^2 = p + qp^2(1 + pq)^2,$$

ugyanazt kaptuk, mint az első megoldásban.

Megjegyzés

1. Kérdezhetjük, *mi annak a valószínűsége, hogy a lény utódai valamikor mind kipusztulnak?* Értelemszerűen átfogalmazva a kérdést, mondhatjuk, hogy a P_n sorozat határértéke adja meg ezt a valószínűséget, hacsak ez a határérték tényleg létezik. *Meg fogjuk mutatni, hogy a P_n sorozat szigorúan növekvő és felülről korlátos, ezért létezik a P-vel jelölt határértéke (2. jegyzet). Tájékozódásul azonban előbb megállapítjuk, mi lehet ez a P határérték.* Ha P létezik, az (1) egyenlőség bal oldala P-hez, jobb oldala $(p+qP^2)$-hez tart, ezért

$$P = p + qP^2, \tag{2}$$

tehát csak $P = 1$ vagy $P = \frac{p}{q}$ $(> p)$ lehetséges. Jelölje $\lambda = \min\left(1, \frac{p}{q}\right)$ az 1 és $\frac{p}{q}$ számok közül a kisebbiket (nem nagyobbat). (2) alapján $\lambda = p + q\lambda^2$. *Most már* (1)-*ből teljes indukcióval adódik, hogy ez a λ felső korlátja P_n sorozatnak.* Valóban $P_1 = p < \lambda$, és ha $P_{n-1} < \lambda$, akkor $P_n = p + qP_{n-1}^2 <$ $< p + q\lambda^2 = \lambda$. *Ugyancsak teljes indukcióval adódik, hogy P_n szigorúan növő sorozat.* Hiszen $P_n > P_{n-1}$ pontosan akkor teljesül minden szóbajövő n-re, ha

$$p + qP_{n-1}^2 > P_{n-1}, \quad \text{azaz} \quad q(P_{n-1} - 1)\left(P_{n-1} - \frac{p}{q}\right) > 0. \tag{3}$$

Az utóbbihoz viszont $P_{n-1} < \lambda$ — amit már beláttunk — elégséges feltétel. (A (3) második egyenlősége is mutatja, miért volt szükség az előzetes tájékozódásra.) Kiolvashatjuk, hogy (2) gyökei közül a P_n *sorozat határértéke* $P = \lambda = \min\left(1, \frac{p}{q}\right)$.

Ez azt jelenti, hogy $p < 1/2$ esetén $P = \frac{p}{q} = \frac{p}{1-p} < 1$, tehát $1 - P > 0$ valószínűséggel az egysejtű lény generációja „örökké él"; ha pedig $p \geqq {}^1/_2$, akkor a generáció (1 valószínűséggel) „biztosan kipusztul"

2. Jelölje $P_{nk} = P(\xi_n = k)$ annak az eseménynek a valószínűségét, hogy n óra múlva az egysejtű utódainak száma: $\xi_n = k$.

A most következő „generátorfüggvény módszerrel" a P_{nk} meghatározását vázoljuk. Képezzük a

(4) $$g_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} P_{nk} x^k$$

generátorpolinomot. A g_n függvényt a $[0,1]$ zárt szakaszon értelmezzük. Az értelmezés jogos voltát is mutatja a $g_n(x)$ következő „jelentése".

Tegyük fel, hogy az utódok mindegyike születésekor — az elődtől és egymástól is függetlenül — x $(0 \leqq x \leqq 1)$ valószínűséggel felvesz valamely T tulajdonságot (például fehér színűvé válik). Beláthatjuk (a teljes valószínűség tétele alapján), hogy $g_n(x)$ annak az eseménynek a valószínűségét jelöli, hogy az n-edik generációban az egysejtű minden utóda T tulajdonságú (fehér), vagy pedig egy utód sem él. Továbbá világos, hogy

(5) $$g_1(x) = p + qx^2 \quad (q = 1 - p).$$

Ha $\xi_1 = 0$, akkor nyilván $\xi_n = 0$, ha pedig $\xi_1 = 2$, akkor az n-edik generáció az első által létrehozott két egysejtű egymástól függetlenül létrejött $(n-1)$-edik generációjával azonos. Tehát — a $\xi_1 = 2$ feltétel mellett — annak valószínűsége, hogy az n-edik generáció minden egyede T tulajdonságú vagy egy sem él, éppen $g_{n-1}(x) \cdot g_{n-1}(x) = g_{n-1}^2(x)$.

A $\xi_1 = 0$ és $\xi_1 = 2$ eseteknek megfelelő feltételes valószínűségekből (a teljes valószínűség tétele szerint) előállíthatjuk a $g_n(x)$ valószínűséget:

(6) $$g_n(x) = p + qg_{n-1}^2(x).$$

Itt a jobb oldal éppen az (5) szerinti g_1 függvénynek a $g_{n-1}(x)$ helyen felvett értéke, tehát

(7) $$g_n(x) = g_1(g_{n-1}(x)) \text{ és } g_1(x) = p + qx^2 \quad (q = 1 - p).$$

Ebből a rekurzív összefüggésből g_n és így (4) szerint a keresett P_{nk} együtthatók fokozatosan meghatározhatók. Most P_{n0} jelenti annak valószínűségét, hogy az n-edik generációban egy élő utód sincs. Világos, hogy $P_{n0} = g_n(0)$.

3. Az előző megjegyzésben az eredeti feladatot jócskán általánosítottuk. Módszerünk még további kérdésekre is feleletet ad. Például, hogyan módosulnak eredményeink, ha kettéosztódás helyett minden egysejtűből 3 vagy általában a darab jön létre?

Feladatunk rámutat a valószínűségszámítás biológiai alkalmazásaira.

233. Jelentse $[x]$ azt a legnagyobb egész számot, amely legfeljebb akkora, mint az x valós szám. Számítsuk ki az

(1) $$\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]+\ldots$$

összeg értékét minden pozitív egész n számra, és bizonyítsuk be a kapott eredmény helyes voltát.

I. megoldás

Először megmutatjuk, hogy (1)*-ben minden előírt n esetében csak véges számú,* 0*-tól különböző tag van. Ezután alkalmazzuk a teljes indukció módszerét.* A $k+1$-edik [ ] jelben álló kifejezés:

$$\frac{1}{2}+\frac{n}{2^{k+1}}<1,\quad \text{ha } 2^k>n;$$

tehát ekkor

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=0.$$

Jelöljük az (1) összeget S_n-nel. Láthatjuk, hogy

$$S_1=\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{4}\right]=1+0=1,\quad S_2=\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{4}{4}\right]+\left[\frac{6}{8}\right]=1+1+0=2,\ \ldots,$$

$$S_{10}=\left[\frac{11}{2}\right]+\left[\frac{12}{4}\right]+\left[\frac{14}{8}\right]+\left[\frac{18}{16}\right]+\left[\frac{26}{32}\right]=5+3+1+1+0=10,$$

$$S_{11}=\left[\frac{12}{2}\right]+\left[\frac{13}{4}\right]+\left[\frac{15}{8}\right]+\left[\frac{19}{16}\right]+\left[\frac{27}{32}\right]=6+3+1+1+0=11,\ \ldots.$$

E példákban n-et 1*-gyel növelve, S_n-nek mindig egyetlen tagja nőtt* 1*-gyel, a többi változatlan maradt. Megmutatjuk, hogy ez minden esetben így van, ezáltal teljes indukcióval bizonyítjuk az $S_n=n$ összefüggést.*

Ha $n+2^k$ és $n+1+2^k$ a 2^{k+1}-nek ugyanazon két többszöröse közé esik — az alsó határt megengedve, de a felsőt nem —, akkor

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right].$$

Ha viszont $n+1+2^k$ eléri 2^{k+1} következő többszörösét, tehát valamilyen m-re

$$n+1+2^k=(m+1)2^{k+1},\ \text{azaz}\ n+1=(2m+1)2^k,\ \text{akkor}$$

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{(m+1)2^{k+1}}{2^{k+1}}\right]=m \quad \text{és} \quad \left[\frac{n+1+2^k}{2^{k+1}}\right]=\left[\frac{(m+1)2^{k+1}}{2^{k+1}}\right]=m+1.$$

Ilyen k minden egyes n-re csak egy van: ez az a kitevő, amire 2-t hatványozva, a hatvány még osztója $n+1$-nek, de 2 magasabb kitevős hatványai már nem osztói $(n+1)$-nek. (Ha $n+1$ páratlan, $k=0$.)

Ezzel beláttuk, hogy $S_{n+1}-S_n=1$, így $S_n=S_1+n-1=n$.

II. megoldás

Felhasználjuk a következő — később bizonyítandó — azonosságot:

$$(2) \qquad [2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right].$$

Ezt ismételten alkalmazva, n így alakítható át:

$$n=[n]=\left[2\cdot\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}+\frac{1}{2}\right];$$

és általában teljes indukcióval ugyanígy igazolható:

$$(3) \qquad n=[n]=\left[\frac{n+1}{2}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\ldots+\left[\frac{n+2^l}{2^{l+1}}\right]+\left[\frac{n}{2^{l+1}}\right].$$

Ha l-et akkorára választjuk, hogy $2^{l+1}>m$, akkor (3) utolsó tagja 0, és így az (1) összeg értéke n.

Most igazoljuk a (2) azonosságot, két esetet különböztetünk meg.

a) Ha $[x]\leqq x<[x]+\frac{1}{2}$, akkor $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]$, tehát

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]\leqq 2x<2[x]+1,$$

amiből

$$[2x]=2[x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right].$$

b) Ha pedig $[x]+\frac{1}{2}\leqq x<[x]+1$, akkor $\left[x+\frac{1}{2}\right]=[x]+1$,

és így

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=2[x]+1=[2x].$$

Megjegyzés

1. A (3) alakból valamivel általánosabban, tetszőleges pozitív n-re adódik, hogy az (1) összeg, $S_n=[n]$.

2. A (2) azonosság és az (1) összeg konkrét tartalmát olvashatjuk ki az alábbi problémából:

Játsszék bizonyos számú versenyző — pl. pingpongozó — a szokásos módon kieséses versenyt, vagyis kettesével játsszanak egymás ellen, s minden párból a nyertes jut a második fordulóba. Játék nélkül jut a második fordulóba a pár nélkül maradt versenyző is, ha ilyen van, ti. ha az indulók száma páratlan. Ugyanígy alakul ki a 3., a 4., ... forduló mezőnye. Végül az nyeri a bajnoki címet, aki veretlenül marad. Kérdés: hány mérkőzést játszanak az egyes fordulókban, és hányat összesen.

Bármelyik forduló indulóinak számát v-vel jelölve, a fordulóban $\left[\frac{v}{2}\right]$ mérkőzést játszanak, ennyi a vesztesek száma.

A továbbjutók száma v párosságától függetlenül $\left[\frac{v}{2}+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{v+1}{2}\right]$.

Eszerint a (2)-nek megfelelő

$$v=\left[\frac{v}{2}\right]+\left[\frac{v+1}{2}\right]$$

azonosság azt fejezi ki, hogy minden versenyző vagy kiesik, vagy továbbjut.

Ha $(n+1)$ a verseny indulóinak száma, akkor az előbbi gondolatmenet alapján azt kapjuk, hogy az (1) összeg tagjai rendre az 1., 2., 3., ... fordulóban kiesett versenyzők számát adja (felhasználva az $\left[\frac{1}{2}[x]\right]=\left[\frac{1}{2}x\right]$ azonosságot). Összegük n, hiszen a verseny győztese kivételével mindenki pontosan egyszer veszít.

3. El kell ismerni, hogy a II. megoldás alapötlete egyáltalán nem kézenfekvő, a „józan ész” az I. megoldást előnyben részesíti.

A II. megjegyzés utal arra, hogyan lehet egy ilyen „vad ötletet” természetesebbé tenni alkalmas „szöveges feladat” készítésével (lásd **231.** feladat).

IV. RÉSZ

JEGYZETEK

1. A racionális számkör áttekintése. Csoport, gyűrű, test

A természetes számokat a 0-val és a negatív egész számokkal bővítve, kapjuk az egész számok E halmazát.

1. Az E halmazban értelmezve van az összeadás művelete, mely bármely két, a és b számhoz az E halmaz $a+b$-vel jelölt számát rendeli.

2. Az összeadás asszociatív:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

3. Létezik az E halmazban a 0 elem, melyre E bármely a elemével

$$a+0=0+a=a.$$

4. Az E halmaz bármely a elemének van negatívja (ellentettje), azaz található olyan $(-a)$-val jelölt elem, melyre

$$a+(-a)=(-a)+a=0.$$

5. Az összeadás kommutatív:

$$a+b=b+a.$$

6. Az E halmazban értelmezve van a szorzás művelete, mely bármely két, a és b számhoz az E halmaz $a \cdot b$ (vagy egyszerűbben ab) elemét rendeli.

7. A szorzás asszociatív:

$$(ab)c=a(bc).$$

8. A szorzás és az összeadás műveletére teljesül a disztributivitás:

$$a(b+c)=ab+ac; \quad (a+b)c=ac+bc.$$

9. Az E halmaz nullosztómentes, azaz ha

$$a \cdot b=0, \quad \text{és} \quad a \neq 0, \quad \text{akkor} \quad b=0.$$

10. Az E halmaz 1 eleme egységelem, azaz E bármely a elemére

$$a \cdot 1=1 \cdot a=a.$$

11. A szorzás kommutatív:

$$ab=ba.$$

Az **1—4.** tulajdonságok teljesülését röviden így fejezzük ki: az egész számok E halmaza az összeadás műveletére nézve *csoportot* alkot. Az **5.** tulajdonságot

hozzávéve, azt mondjuk, hogy az E halmaz *kommutatív csoport* (vagy *Abel-csoport*).

Az **1—8.** tulajdonságok teljesülését így fejezzük ki: az egész számok E halmaza az összeadás és a szorzás műveletével *gyűrűt* alkot. A **9.**, **10.** és **11.** tulajdonságot hozzávéve, rendre azt fejezzük ki, hogy E *nullosztómentes, egységelemes, kommutatív gyűrű.*

A racionális számok R halmaza az egész számok E halmazának bővítése. A racionális számok halmazában a szokásos összeadás és szorzás műveletére teljesülnek az **1—11.** tulajdonságok. Ami viszont új az E halmazzal szemben:

12. Az R halmaz bármely 0-tól különböző a eleméhez van olyan $\left(\frac{1}{a}\right)$-val (vagy a^{-1}-nel) jelölt elem, melyre

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1.$$

Az R halmazra vonatkozó **1—8.**, **10—12.** tulajdonságok teljesülését így fejezzük ki: az R halmaz elemei az összeadás és szorzás műveletével *testet* alkotnak (a **9.** tulajdonság a **12.**-ből következik).

A matematika fejlődése során kiderült, hogy más halmazokban is lehet úgy bevezetni műveleteket, melyek bizonyos, a fentiekhez hasonló jellegű tulajdonságokkal rendelkeznek. Így jutottak el a csoport, gyűrű, test és még számos más algebrai struktúra axiomatikus definíciójához. Ezek lényege, hogy a műveletek bizonyos tulajdonságait axiómákban rögzítik, s az algebrai struktúrákra vonatkozó definíciókban, tételekben a továbbiakban csupán az axiómákra támaszkodnak.

Például a *csoport* axiomatikus definíciója a következő:

Jól meghatározott elemek **G** *halmazát csoportnak nevezzük, ha érvényesek rá a következő axiómák.*

(1) **G** *tetszőlegesen választott, meghatározott sorrendben vett két eleméhez legyen egyértelműen hozzárendelve* **G** *egy* (tőlük nem feltétlenül különböző) *eleme.*

(A **G** rendezett elempárjaihoz való fenti hozzárendelést, azaz műveletet „szorzásnak" szokás nevezni. A **G** a és b eleméhez hozzárendelt elemet a és b „szorzatának" nevezik, és $a \cdot b$-vel jelölik.)

(2) **G** *tetszőleges a, b, c elemére legyen érvényes a következő egyenlőség:*

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

(A művelet legyen asszociatív.)

Létezzék **G**-*ben legalább egy e-vel jelölt elem, melyre a következő két tulajdonság teljesül:*

(3) **G** *tetszőleges g elemére*

$$e \cdot g = g.$$

(4) **G** *tetszőleges g eleméhez létezik* **G**-*ben legalább egy g'-vel jelölt elem, melyre*

$$g' \cdot g = e.$$

Az axiómákból könnyen levezethető, hogy a (4) axiómában szereplő g'-re $g \cdot g' = e$ is teljesül, továbbá a (3) és (4) axiómában szereplő e elemre $g \cdot e = g$ is teljesül, sőt **G**-nek egyetlen ilyen eleme van. Az e elemet a csoport egységelemének nevezik. A g elemhez tartozó g' elem is egyértelmű, ezt g inverzének nevezik, és g' helyett g^{-1}-nel jelölik.

Az egész számok E halmaza a szokásos összeadás műveletére nézve csoportot alkot, az **1—4**. tulajdonságok az előbbi axiómák teljesülését mutatják (kissé bővebben), csupán a jelölések mások, sőt ez a csoport még kommutatív is.

A racionális számokból a 0 elhagyásával keletkező R' halmaz a szokásos szorzás műveletére nézve alkot csoportot. Ezt mutatják a **6.**, **7.**, **10.**, **12.** tulajdonságok. A későbbiek során még más csoportokkal is találkozunk *(10., 23. jegyzet)*.

Előfordulhat, hogy egy **G** csoportnak van olyan **A** részhalmaza, melynek elemei a **G**-ben definiált művelettel csoportot alkotnak. Ekkor az **A**-t a **G** *részcsoportjának* nevezzük.

Ha pl. g a **G** tetszőleges eleme, akkor könnyen belátható, hogy (a $g^{-1} \cdot g^{-1} \cdot g^{-1} = g^{-3}$, $g \cdot g = g^2$ stb. jelölésekkel) a

$$\ldots, g^{-3}, g^{-2}, g^{-1}, e, g, g^2, g^3, \ldots$$

elemekből álló halmaz **G** részcsoportja (ez még kommutatív is). Ezt a g által generált ciklikus részcsoportnak is nevezik.

A **G** csoportnak triviális részcsoportja önmaga, valamint az egyetlen e elemből álló halmaz. Az ettől különböző részcsoportok a valódi részcsoportok (lehet, hogy ilyen nincs is).

Az egész számok halmazában az összeadás műveletére nézve valódi részcsoportot alkotnak pl. a

$$\ldots, (-3m), (-2m), (-m), 0, m, 2m, 3m, \ldots \quad \big(m \neq 1 \quad \text{és} \quad m \neq (-1)\big)$$

számok. Ez éppen az m szám által generált ciklikus részcsoport.

Részcsoportokra még sok további példát is mutatunk *(28—31., 41., 51. jegyzet)*.

A csoporthoz hasonlóan axiomatikusan vezetjük be a gyűrű és a test fogalmát is. Az E halmazra megismert **1—8.** tulajdonságok megfelelőivel mint axiómákkal a *gyűrű,* az R halmazra megismert **1—8.** és **10—12.** tulajdonságok megfelelőivel mint axiómákkal a *test* is definiálható.

A későbbiek során mindegyikre látunk még más példát is.

Megemlítjük, hogy az az eljárás, amellyel az egész számok halmazát bővítve a racionális számok halmazához jutunk, általánosan is elvégezhető: egy kommutatív nullosztómentes gyűrű kibővíthető testté.

2. Rendezhetőség. A valós számok teljessége

Az $\mathbf{R}$ *kommutatív gyűrűt rendezhetőnek nevezzük, ha kijelölhető benne elemeinek egy olyan* $\mathbf{P}$ *részhalmaza, mely a következő négy tulajdonsággal rendelkezik.*

(1) $\mathbf{R}$ *zéruseleme, a* 0, *nem eleme* $\mathbf{P}$*-nek.*

(2) *Ha* r *az* $\mathbf{R}$ *egy tetszőleges,* 0*-tól különböző eleme, akkor* r *és* $(-r)$ $\big(r+(-r)=0\big)$ *közül egyik és csak egyik legyen* $\mathbf{P}$ *eleme.*

(3) *Ha* p_1 *és* $p_2 \in \mathbf{P}$, *akkor* $p_1+p_2 \in \mathbf{P}$.

(4) *Ha* p_1 *és* $p_2 \in \mathbf{P}$, *akkor* $p_1 \cdot p_2 \in \mathbf{P}$.

Az egész számok E gyűrűje rendezett, $\mathbf{P}$ szerepét a természetes számok halmaza tölti be. A racionális számok R gyűrűje is rendezett, $\mathbf{P}$ a pozitív racionális számok halmaza. Megemlítjük, hogy például a komplex számok gyűrűje nem rendezhető.

Az $\mathbf{R}$ rendezett gyűrűben általánosan definiálható a számok körében megismert egyenlőtlenség fogalma:

$$a>b, \quad \text{illetve} \quad b<a, \quad \text{ha} \quad a+(-b)\in \mathbf{P}.$$

Az (1)—(4) axiómák alapján bizonyíthatók az egyenlőtlenségekre vonatkozó jól ismert tételek (éppen ezért választottuk ezeket az axiómákat):

Az $\mathbf{R}$ rendezett gyűrű elemeire $a>b$, $a=b$, $a<b$ közül egyik és csak egyik teljesül.

Ha $a>b$ és $b>c$, akkor $a>c$.

Ha $a>b$, akkor tetszőleges c-re teljesül $a+c>b+c$.

Ha $a>b$ és $c>d$, akkor $a+c>b+d$.

Ha $a>b$, akkor $(-a)<(-b)$.

Ha $a>b$ és $c>0$, akkor $ac>bc$.

Az $\mathbf{R}$ rendezett gyűrűben általánosan definiálható az abszolút érték fogalma:

$$|b| = \begin{cases} b, & \text{ha} \quad b \in \mathbf{P} \\ 0, & \text{ha} \quad b = 0 \\ (-b), & \text{ha} \quad (-b) \in \mathbf{P}. \end{cases}$$

Értelmezhetjük a sorozatok konvergenciájának fogalmát is:

Az **R** *rendezett gyűrű elemeinek* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *sorozatát konvergensnek nevezzük, ha* **R**-*nek van olyan a eleme, hogy akárhogyan is választunk ki* **P**-*ből egy* ε *elemet (tetszőleges „kis pozitív" ε-hoz), létezik egy* $n_0(\varepsilon)$ *index úgy, hogy*

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad \textit{ha} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

a-t a sorozat határértékének nevezzük.

A konvergens sorozatokkal kapcsolatban különösen fontos a következő definíció:

Az **R** rendezett gyűrű $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatát szabályosnak (vagy *Cauchy*-félének) nevezzük, ha bármely $\varepsilon \in$ **P**-hez van olyan $m_0(\varepsilon)$ index, hogy

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n, m > m_0(\varepsilon).$$

Könnyen igazolható a következő tétel:

Ha egy **R**-*beli sorozat konvergens, akkor szabályos is.*

A tétel megfordítása pl. a racionális számok testében nem igaz. De igaz a következő:

Az R racionális számtest kibővíthető a V valós számtestté úgy, hogy V rendezett test lesz, és a V-beli szabályos sorozatok már konvergensek is V-ben. Például a $\sqrt{2}$ közelítő törtjei 1,4, 1,41, 1,414, ... racionális számokból álló szabályos sorozatot alkotnak, de ennek a sorozatnak a racionális számtestben nincs határértéke, nem konvergens. A valós számtesten belül viszont van határértéke, a $\sqrt{2}$.

Általánosan mondjuk ki a következő definíciót:

Egy rendezett testet teljesnek nevezünk, ha az elemeiből készített bármely szabályos sorozat konvergens is.

Az előbbiek alapján a *V* valós számtest teljes. A racionális számtest valós számtestté bővítését általánosabb keretek között biztosítja a következő tétel:

Tetszőleges **T** *rendezett test esetleges további elemekkel kibővíthető* **T*** *teljes testté úgy, hogy* **T*** *minden eleme előállítható* **T**-*beli szabályos sorozat határértékeként.*

A *V* valós számtest teljessége szoros kapcsolatban van az alábbi tételekkel:

A valós számok körében egy növekedő (fogyó) felülről (alulról) korlátos sorozatnak mindig van határértéke.

Felülről korlátos számhalmazhoz létezik legkisebb felső korlát, azaz *felső*

határ. Alulról korlátos számhalmazhoz létezik legnagyobb alsó korlát, azaz *alsó határ*.

Ezek a matematikai analízis talán legalapvetőbb tételei. A **101.** és **102.** feladatok megoldásában az előbbieket közvetlenül is felhasználtuk.

A valós szám n-esek halmaza. Lineáris tér, euklideszi tér

A V valós számtestből vett tetszőleges $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *számokkal elkészíthetjük az* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\mathbf{x}$ *szám n-est. A szám n-esek N halmazában értelmezhetjük az összeadás és a V-beli valós számmal való szorzás műveletét a következőképpen:*

Ha $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ az N halmaz két tetszőleges eleme, akkor $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ összegüket így definiáljuk:

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$

tehát az N halmazbeli összeadást a V testbeli összeadás közvetítésével definiáltuk.

Ha $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ az N halmaz tetszőleges eleme és c tetszőleges V-beli szám, akkor $\mathbf{x}$ c-szeresén értjük az N $c\mathbf{x}$-szel jelölt alábbi elemét:

$$c\mathbf{x}=(cx_1, cx_2, \ldots, cx_n),$$

ahol a jobb oldalon valós számok szorzása szerepel.

A valós számtestre vonatkozó műveleti tulajdonságok alapján könnyen ellenőrizhető, hogy az N-beli műveletekre nézve teljesülnek az alábbi tulajdonságok.

(1) *N az összeadás műveletére nézve kommutatív csoportot alkot.*

Az egységelem $\mathbf{O}=(0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ inverze: $-\mathbf{x}=(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

(2) *A számmal való szorzásra nézve, ha a,* $b \in V$ és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$, akkor

a) $a\mathbf{x} \in N$,
b) $a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y}$,
c) $(a+b)\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x}$,
d) $(ab)\mathbf{x}=a(b\mathbf{x})$,
e) $1 \cdot \mathbf{x}=\mathbf{x}$.

Ha a valós számtest helyett egy tetszőleges **T** számtest elemeiből készítünk

n-eseket, ugyancsak teljesülnek a fenti tulajdonságok. Később még további példákat is látunk.

Hasonlóan a csoport, gyűrű, test definíciójához axiomatikusan definiálhatjuk a **T** testen értelmezett **L** *lineáris tér* fogalmát:

L *bármely* **u** *és* **v** *eleméhez legyen hozzárendelve az* **L***-beli* $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ *összeg,* **T** *tetszőleges a eleméhez és* **L** *tetszőleges* **u** *eleméhez legyen hozzárendelve az* **L***-beli* $a\mathbf{u}$. *A műveletekre teljesüljenek az* (1)- *és* (2)*-nek megfelelő axiómák.* Jelöléseink az előbbi konkrét példához igazodnak. **L** elemeit a geometriai vektorok analógiájára vektoroknak is nevezzük *(42. jegyzet).*

Általánosan definiálható az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ vektorok **T**-beli $a_1, a_2, \ldots, a_r$ számokkal képezett *lineáris kombinációja:* $a_1\mathbf{u}_1+a_2\mathbf{u}_2+\ldots+a_r\mathbf{u}_r$.

Ha $a_1\mathbf{u}_1+a_2\mathbf{u}_2+\ldots+a_r\mathbf{u}_r=\mathbf{0}$ *csak akkor teljesül,* ha $a_1=a_2=\ldots=a_r=0$, *akkor az* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r$ *vektorokat lineárisan függetleneknek nevezzük, ellenkező esetben lineárisan függőknek mondjuk őket.*

Ha az **L** *térben n darab lineárisan független vektor van, de bármely* $n+1$ *vektor már lineárisan függő, akkor azt mondjuk, hogy* **L** *n dimenziós lineáris tér.* Megmutatható, hogy ha az n-dimenziós lineáris térben $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ lineárisan független vektorok, akkor bármely **L**-beli **u** vektor egyértelműen írható fel

$$\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_1+\ldots+u_n\mathbf{e}_n$$

alakban. Ezért a lineárisan független vektorokból álló $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ vektorhalmazt az **L** tér bázisának, az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ **T**-beli „számokat" az **u** vektornak az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük (a geometriai analógia alapján).

Az **L** lineáris tér **M** részhalmazát altérnek nevezzük, ha az **L**-ben bevezetett műveletekre nézve **M** maga is lineáris tér. Például az előbbi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r, \ldots, \mathbf{e}_n$ bázis választása mellett az $\mathbf{m}=m_1\mathbf{e}_1+m_2\mathbf{e}_2+\ldots+m_r\mathbf{e}_r$ alakú vektorok r dimenziós alteret alkotnak.

(3) *A továbbiakban feltesszük, hogy* **L** *a V valós számtesten értelmezett n dimenziós lineáris tér. Axiomatikusan értelmezhetjük* **L** *vektorainak skalárszorzatát.*

Legyen **L** tetszőleges **x** és **y** eleméhez hozzárendelve az **xy**-nal jelölt V-beli szám (skalár), s a hozzárendelés teljesítse az alábbi axiómákat:

a) $\mathbf{xy}\in V$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y}\in \mathbf{L})$.
b) $\mathbf{xy}=\mathbf{yx}$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y}\in \mathbf{L})$.
c) $(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\mathbf{y}=\mathbf{x}_1\mathbf{y}+\mathbf{x}_2\mathbf{y}$ $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}\in \mathbf{L})$.
d) $(a\mathbf{x})\mathbf{y}=a(\mathbf{xy})=\mathbf{x}(a\mathbf{y})$ $(a \in V, \mathbf{x}, \mathbf{y}\in \mathbf{L})$.
e) $\mathbf{xx}\geqq 0$ $(\mathbf{x} \in \mathbf{L})$, $\mathbf{xx}=0$ pontosan akkor, ha $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Kérdés, lehetséges-e ilyen hozzárendelést megadni. Ha igen, akkor azt mondjuk, hogy **L** vektorai a bevezetett skalárszorzattal egy *n dimenziós eukli-*

deszi teret alkotnak, s ezt **E**-vel jelöljük az **L** helyett. Az elnevezést a geometriai analógia indokolja. Az euklideszi geometriában értelmezett vektorokra (a *43. jegyzet*ben) definiált skalárszorzatra az axiómák teljesülnek.

A (3) a)—d) axiómákból következik, hogy az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ bázisban felírva az $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+\ldots+y_n\mathbf{e}_n$ vektorokat, skalárszorzatuk csak ilyen alakú lehet:

$$\begin{aligned}\mathbf{xy}=&x_1y_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1+x_1y_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2+\ldots+x_1y_n\mathbf{e}_1\mathbf{e}_n+\\&+x_2y_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1+x_2y_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2+\ldots+x_2y_n\mathbf{e}_2\mathbf{e}_n+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\&+x_ny_1\mathbf{e}_n\mathbf{e}_1+x_ny_2\mathbf{e}_n\mathbf{e}_2+\ldots+x_ny_n\mathbf{e}_n\mathbf{e}_n.\end{aligned}$$

Az $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=g_{ij}$ jelölés bevezetésével szokták ezt

$$\mathbf{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jg_{ij}$$

alakba írni.

A g_{ij} számokat tetszőlegesen megadva, az így definiált skalárszorzat a (3) a)—d) axiómáknak valóban megfelel, nem feltétlenül teljesül viszont a (3) e) axióma.

Az $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=g_{ij}=\begin{cases}0, & \text{ha } i\neq j\\ 1, & \text{ha } i=j\end{cases}$ választás mellett,

azaz $\mathbf{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n$ definícióval a (3) e) axióma is teljesül, mert

$$\mathbf{x}^2=\mathbf{xx}=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\geqq 0,$$

és $\mathbf{x}^2=\mathbf{0}$ pontosan akkor, ha $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$, tehát $\mathbf{x}=0$.

Természetesen g_{ij}-t másképpen is megválaszthattuk volna, úgy hogy a (3) e) axióma is teljesüljön. Egy ilyen g_{ij} rögzítése után is létezik azonban **E**-ben olyan $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ bázis, melyre

$$\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j=\begin{cases}0, & \text{ha } i\neq j\\ 1, & \text{ha } i=j.\end{cases}$$

Ezt így is mondjuk: egy valós számtesten értelmezett n dimenziós euklideszi térben mindig létezik *ortonormált bázis.*

Elmondhatjuk, hogy a valós szám n-esek N halmaza egy V-n értelmezett konkrét n dimenziós lineáris tér. Ebben az $\mathbf{e}_1=(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n=(0, 0, 0, \ldots, 1)$ egy bázis.

N-ben skalárszorzatot vezethetünk be a szokásos módon; $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ skalárszorzatát így definiáljuk:

$$\mathbf{xy}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy így egy E-vel jelölt n dimenziós euklideszi térhez jutunk, melyben az előbbi bázis ortonormált.

Most megmutatjuk, hogy a skalárszorzat axiómáiból meglepő egyszerűen levezethető a *Cauchy—Bunyakovszkij*-féle egyenlőtlenség (**62.** feladat).

Tudjuk, hogy tetszőleges $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ és $\mathbf{y}$ vektorra és t valós számra

$$0\leqq(t\mathbf{x}-\mathbf{y})^2=t^2\mathbf{x}^2-2t\mathbf{xy}+\mathbf{y}^2.$$

A jobb oldali másodfokú függvény diszkriminánsa nem pozitív:

$$(*)\qquad (\mathbf{xy})^2-\mathbf{x}^2\cdot\mathbf{y}^2\leqq 0,$$

s az egyenlőség a (3) e) axióma szerint akkor és csak akkor teljesül, ha valamely t-re $\mathbf{y}=t\mathbf{x}$.

A (*) egyenlőtlenség éppen a *Cauchy—Bunyakovszkij*-féle egyenlőtlenség. A **62.** feladathoz fűzött megjegyzésünkben is ezt mutattuk meg.

Az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok abszolút értékét így definiáljuk:

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{\mathbf{x}^2},\quad |\mathbf{y}|=\sqrt{\mathbf{y}^2}.$$

A *Cauchy—Bunyakovszkij*-féle egyenlőtlenség szerint

$$-1\leqq\frac{\mathbf{xy}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|}\leqq 1.$$

Ezért definiálhatjuk az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorok $\varphi\in[0, \pi]$ hajlásszögét az

$$\frac{\mathbf{xy}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|}=\cos\varphi$$

képlettel. Ha a dimenzióra $n\leqq 3$, ez összhangban van a geometriai definícióval. *(43. és 49. jegyzet.)*

4. Az n-edrendű determináns axiomatikus bevezetése

A V valós számtesten értelmezett szám n-esek N terében olyan függvényt definiálunk, mely tetszőleges $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *vektor n-eshez egy* $D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$-*nel jelölt valós számot, az említett vektorokhoz tartozó* (n-edrendű) *determinánst rendeli.*

A hozzárendeléstől az alábbi tulajdonságokat (axiómákat) kívánjuk meg:

1. $D(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ legyen minden vektorváltozóra nézve lineáris:
   $D(\ldots, \mathbf{u}_i+\mathbf{v}_i, \ldots)=D(\ldots, \mathbf{u}_i, \ldots)+D(\ldots, \mathbf{v}_i, \ldots)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.
2. D legyen minden vektorváltozóra nézve homogén:
   $D(\ldots, x\cdot\mathbf{u}_i, \ldots)=x\cdot D(\ldots, \mathbf{u}_i, \ldots)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.
3. Ha D tetszőleges két vektorváltozóját felcseréljük, akkor D váltson előjelet:
   $D(\ldots, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{v}, \ldots)=-D(\ldots, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{u}, \ldots)$.
4. Az N $\mathbf{e}_1=(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n=(0, 0, 0, \ldots, 1)$ bázisára nézve legyen $D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)=1$.

3'. Mindjárt megemlítjük a 3. követelmény egy nagyon fontos következményét:

A determináns értéke 0, ha két vektora azonos, hiszen
$D(\ldots, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}, \ldots)=-D(\ldots, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}, \ldots)$ miatt $D(\ldots, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}, \ldots)=0$ következik (szokás 3. helyett az utóbbi tételt axiómának választani.)

Megmutatjuk, hogy az 1—4. axiómák egyértelműen megszabják a determináns definiálásának módját, és éppen a szokásos definícióhoz jutunk.

Az

$$\mathbf{u}_k=u_k^1\mathbf{e}_1+u_k^2\mathbf{e}_2+\ldots+u_k^n\mathbf{e}_n=(u_k^1, u_k^2, \ldots, u_k^n) \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

vektorokhoz tartozó determinánst így is jelöljük:

$$(1) \qquad D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)=\begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_n^2 \\ \vdots & & & \\ u_1^n & u_2^n & \ldots & u_n^n \end{vmatrix},$$

a jobb oldalon az $\mathbf{u}_k$ vektor koordinátái szerepelnek a k-adik oszlopban. A felső indexek nem hatványkitevőt jelentenek!

Az 1—4. axiómák alapján

$$(2)\quad \begin{aligned} D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) &= D\left(\sum_{k_1=1}^{n} u_1^{k_2}\mathbf{e}_{k_1}, \sum_{k_2=1}^{n} u_2^{k_1}\mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \sum_{k_n=1}^{n} u_n^{k_n}\mathbf{e}_{k_n}\right) = \\ &= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n} u_1^{k_1}u_2^{k_2}\ldots u_n^{k_n} D(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \mathbf{e}_{k_n}). \end{aligned}$$

Az utolsó összegben n^n számú tag szerepel, de — a 3'. tétel szerint — azok a tagok, ahol a $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ indexsorozatban egyenlő indexek is előfordulnak, biztosan zérusok.

Elegendő, ha csak azokat a tagokat nézzük, ahol $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ az $(1, 2, \ldots, n)$ számoknak egy permutációja, azaz $n!$ számú tagból álló összegről van szó.

A $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ permutáció két eleméről akkor mondjuk, hogy inverziót képeznek, ha a nagyobb elem a kisebbet megelőzi (pl. a (3 2 1 4) permutációban a (3 2), (3 1), (2 1) párok inverziót képeznek, $n=4$).

A $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ permutáció inverzióinak száma, $I(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ jelenti az összes inverziót képező párok számát. Könnyű belátni, hogy $I(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ azt mutatja meg, hogy minimálisan hány szomszédos cserével kapjuk vissza a $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ permutációból az eredeti $(1, 2, \ldots, n)$ sorrendet, hiszen minden alkalmas szomszédos cserénél az inverziók száma eggyel csökken. (Pl. a (3, 2, 1, 4) permutáció inverzióinak száma 3, és $(3, 2, 1, 4)\to(2, 3, 1, 4)\to(2, 1, 3, 4)\to(1, 2, 3, 4)$, azaz 3 szomszédos cserével kapjuk vissza az eredeti sorrendet.)

Ezután már jól látható, hogy

$$(3)\quad \begin{aligned} &D(\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \mathbf{e}_{k_n}) = \\ &=(-1)^{I(k_1, k_2, \ldots, k_n)} D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = (-1)^{I(k_1, k_2, \ldots, k_n)}, \end{aligned}$$

hiszen a szomszédos cserék mindegyikénél előjelváltás lép fel. (Pl.

$$D(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_4)=(-1)D(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_4)=(-1)^2D(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_4)=(-1)^3D(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4)= = -D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4).)$$

(2) és (3) alapján végül is

$$(4)\quad D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n}^{(n!)} (-1)^{I(k_1, k_2, \ldots, k_n)} u_1^{k_1}u_2^{k_2}\ldots u_n^{k_n}.$$

Kissé hosszadalmasan, de különösebb nehézség nélkül megmutatható, hogy

a fenti definíció valóban eleget tesz az 1—4. követelményeknek. *Ezzel a bevezetési móddal mintegy megindokoltuk a determináns definícióját.*

A determináns (4) definíciójából következik, hogy egy determináns értéke nem változik meg, ha sorait és oszlopait felcseréljük, tehát:

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \dots & u_n^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_n^2 \\ \vdots & & & \\ u_1^n & u_2^n & \dots & u_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^n \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^n \\ \vdots & & & \\ u_n^1 & u_n^2 & \dots & u_n^n \end{vmatrix}.$$

Ez a tétel biztosítja, hogy az 1—4. követelmények, és így a többi determináns-tétel, oszlopvektorok helyett sorvektorokra is teljesülnek.

Mindemellett a (4) definíciót a legritkább esetben használjuk egy determináns kiszámítására. Az 1—4. axiómák és a 3' tétel mellett különösen az alábbi tételek fontosak:

A determináns értéke nem változik meg, ha valamelyik oszlopához (sorához) egy másik oszlop (sor) c-szeresét hozzáadjuk:

$$(6)\qquad \begin{aligned} D(\dots, \mathbf{u}+c\mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}, \dots) &= D(\dots, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{v}, \dots)+ \\ +D(\dots, c\mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}, \dots) &= D(\dots, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{v}, \dots)+ \\ +c\cdot D(\dots, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}, \dots) &= D(\dots, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{v}, \dots)+0. \end{aligned}$$

Ez a tétel teszi lehetővé a determináns viszonylag legkevésbé fáradságos kiszámítását (esetleg még (5)-öt is figyelembe vehetjük).

Alapvető jelentőségű a következő tétel.

A $D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ determináns akkor és csak akkor zérus, ha az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ vektorok lineárisan függők.

Ezt röviden igazoljuk is:

a) Ha $x_1\mathbf{u}_1+x_2\mathbf{u}_2+\dots+x_n\mathbf{u}_n=0$, és például $x_1\neq 0$, akkor

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{x_2}{x_1}\mathbf{u}_2+\dots+-\frac{x_n}{x_1}\mathbf{u}_n,$$

és

$$(7)\qquad D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) = D\left[\left(-\frac{x_2}{x_1}\right)\mathbf{u}_2+\dots+\left(-\frac{x_n}{x_1}\right)\mathbf{u}_n,\quad \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\right]=0,$$

hiszen a kifejtés után az összegben szereplő determinánsok mindegyikében van két megegyező oszlopvektor.

b) Ha $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárisan függetlenek, akkor az $\mathbf{e}_i$ bázisvektor egyértelműen felírható $\mathbf{e}_i=e_i^1\mathbf{u}_1+e_i^2\mathbf{u}_2+\dots+e_i^n\mathbf{u}_n$ alakba, s a (4) képlet bevezetésénél látott módszerrel a 4. követelmény alapján ezt írhatjuk:

$$(8) \qquad 1 = D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = \begin{vmatrix} e_1^1 & e_2^1 & \ldots & e_n^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & \ldots & e_n^2 \\ \vdots & & & \\ e_1^n & e_2^n & \ldots & e_n^n \end{vmatrix} \cdot D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n).$$

Ebből következik, hogy $D(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) \neq 0$.

5. Lineáris egyenletrendszerek

A determinánsfogalom fontos szerepet játszik a lineáris egyenletrendszerek elméletében. Most csak az n ismeretlenes n egyenletből álló rendszerekkel foglalkozunk. Az ismeretleneket $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jelöli.

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszert az $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ismert vektorok bevezetésével így írhatjuk fel:

$$(9) \qquad x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}.$$

A (9) rendszernek tehát akkor és csak akkor van megoldása, ha a $\mathbf{b}$ vektor kifejezhető az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz benne van az általuk meghatározott altérben.

Ha tehát $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ lineárisan függetlenek, akkor a rendszernek egy és csak egy megoldása van, hiszen minden vektor egyértelműen írható fel lineárisan független vektorok lineáris kombinációjaként.

A megoldást a jól ismert *Cramer*-szabály tömör formájával adjuk meg: Tudjuk, hogy az $\mathbf{a}_i$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a rendszer determinánsa

$$(10)\qquad D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ha pl. az x_i ismeretlent akarjuk kiszámítani, írjuk be a (10) determinánsba $\mathbf{a}_i$ helyére a (9) bal, ill. jobb oldalán szereplő vektort. Ekkor

$$D(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i}{\overbrace{x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_i\mathbf{a}_i + \ldots + x_n\mathbf{a}_n}}, \ldots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i}{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

A bal oldal n darab determináns összegére bontható, de mindazok, ahol két azonos oszlopvektor lép fel, zérusok; csak az i-edik determináns nem zérus:

$$x_i \cdot D(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \mathbf{a}_n) = D(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i}{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{a}_n),$$

ebből

$$(11)\qquad x_i = \frac{D(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i}{\mathbf{b}}, \ldots, \mathbf{a}_n)}{D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

A (11)-ből is látható, hogy ha $\mathbf{b} = 0$ — ilyenkor beszélünk homogén rendszerről —, akkor $x_1, x_2, \ldots, x_n = 0$. Ebből is következik, hogy ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, és van olyan megoldás, melyre valamelyik $x_j \neq 0$, akkor $D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = 0$.

A **11—13.** feladatok megoldásában mindezek jól hasznosíthatók.

A **11.** feladatban egy ötismeretlenes, öt egyenletből álló homogén rendszert kellett megoldani. A rendszer determinánsa:

$$D = \begin{vmatrix} -y & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix} = -(y-2)(y^2+y-1)^2.$$

Az előbbiek alapján is láthatjuk, miért volt fontos a megoldásnál az $y = 2$ és az $y^2 + y - 1 = 0$ egyenletek vizsgálata. Az eredeti megoldással történő összehasonlítás több szempontból is tanulságos.

Azt is láthatjuk, hogyan lehet magasabb szintű ismeretanyag alapján olyan paraméteres egyenletrendszert „gyártani”, mely középiskolás szinten is megoldható, s ahol a paraméter szerinti diszkusszió a megoldás lényegét jelenti.

A 12. feladat és a megjegyzésben tárgyalt általánosítás elégséges feltételt ad ahhoz, hogy egy determináns ne legyen zérus:

Ha a feladat feltételei teljesülnek, akkor a rendszer determinánsára

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

hiszen, mint beláttuk, csak az $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ lehet megoldás.

6. A maradékos osztás. Két szám legnagyobb közös osztója és az euklideszi algoritmus

Az egész számok E rendezett gyűrűjében bármely b és bármely 0-tól különböző a egész számhoz egyértelműen található olyan q és r egész szám, melyekre

$$b = aq + r \quad \text{és} \quad 0 \leqq r < |a|.$$

A fenti alakú felírást maradékos osztásnak nevezzük, b az osztandó, a az osztó, q a hányados és r a maradék.

Ha $r=0$, azaz $b=aq$, akkor azt mondjuk, hogy b osztható a-val, vagy a osztója b-nek, és ezt így is jelöljük: $a \mid b$.

Az oszthatóság alapvető tulajdonságai a következők:

Az oszthatóságot tekintve minden szám ugyanúgy viselkedik, mint az ellentettje, más szóval

$$a \mid b, \quad (-a) \mid b, \quad a \mid (-b), \quad (-a) \mid (-b)$$

ekvivalens feltételek.

A továbbiakban ezért feltesszük, hogy *az oszthatóság kérdéseit mindig nem negatív egész számokra vizsgáljuk, sőt feltesszük, hogy az osztó mindig pozitív.*

Bármely a-ra $a \mid 0$.
Bármely b-re $1 \mid b$, s ha $a \mid 1$, akkor $a=1$ $(a>0)$.
Bármely a-ra $a \mid a$ (az oszthatóság reflexív).
Bármely a, b, c-re, ha $a \mid b$ és $b \mid c$, akkor $a \mid c$ (az oszthatóság tranzitív).
Ha $a \mid b$ és $b \mid a$, akkor $a=b$ $(a, b>0$, az oszthatóság nem szimmetrikus).

Azokat a számokat, melyeknek két pozitív osztójuk van, *prímszámoknak* (törzsszámoknak) vagy *felbonthatatlan* számoknak nevezzük. Az 1 tehát nem

prímszám (egy pozitív osztója van), de prímszámok 2, 3, 5, ... (sőt -2, -3, -5, ...).

Az a, b számok legnagyobb közös osztójának nevezzük azt a $d=(a, b)$-vel jelölt pozitív számot, mely az a és b számoknak közös osztója, továbbá a, b **minden** *közös osztója d-nek is osztója.*

Könnyű belátni, hogy d egyértelmű, továbbá, ha $b=aq+r$, akkor $(b, a)=$ $=(a, r)$. *Ezen az észrevételen alapszik az euklideszi algoritmus, melynek segítségével két szám legnagyobb közös osztóját véges sok lépésben meghatározhatjuk.* A maradékos osztás egyértelműsége alapján a b, a pozitív számokból kiindulva képezhetjük az r, r_1, r_2, ... számokat:

$$b=aq+r, \quad a=rq_1+r_1, \quad r=r_1q_2+r_2, \ldots,$$

ahol

$$a>r>r_1>r_2>\ldots\geqq 0.$$

Minthogy véges sok a-nál kisebb természetes szám van, lesz olyan r_n maradék, melyre

$$r_{n-2}=r_{n-1}\cdot q_n+r_n \quad \text{és} \quad r_{n-1}=r_n\cdot q_{n+1}.$$

Ez az r_n maradék előzetes észrevételünk alapján éppen a legnagyobb közös osztó:

$$r_n=d=(a, b).$$

Az euklideszi algoritmus a **68.** feladat megoldásában lényeges szerepet játszott. Ha $(a, b)=1$, akkor azt mondjuk, hogy az a és b számok *relatív prímek.*

7. Az $ax+by=c$ diofantoszi egyenlet megoldásáról

Az előző, *6. jegyzet* gondolatmenetét folytatjuk.

(1) $$r=b-aq, \quad r_1=a-rq_1, \quad \ldots, \quad r_n=r_{n-2}-r_{n-1}q_n$$

kifejezésekből fokozatos behelyettesítésekkel az is látszik, hogy van olyan $\bar{x}$ és $\bar{y}$ egész szám, hogy az a és b számok $(a, b)=d$ legnagyobb közös osztója így írható:

(2) $$d=a\bar{x}+b\bar{y}.$$

Ezzel bizonyítható a diofantoszi egyenletekre vonatkozó következő tétel is, mely a **89.** feladat megoldásánál is lényeges volt:

(3) $$ax+by=c$$

egyenlet akkor és csak akkor oldható meg x, y egész számokra, ha a és b legnagyobb közös osztója osztója c-nek is.

Világos, hogy $ax+by$ tetszőleges x, y-ra többszöröse $(a, b)=d$-nek, hiszen a és b is d többszöröse, ezért a megoldhatósághoz $d \mid c$ szükséges feltétel.

Ha viszont $c=dc_1$, akkor az előbbi észrevétel alapján d felírható a (2) alakban, ezt c_1-gyel szorozva $c=a\bar{x}c_1+b\bar{y}c_1$, tehát $x_0=\bar{x}c_1$, $y_0=\bar{y}c_1$ választással a (3) egyenlet egy megoldásához jutunk.

Ez persze elég körülményes módszer, s főleg a megoldás létezésének bizonyítására alkalmas. Egy másik, sokszor jobban használható módszert is bemutatunk (a **89.** feladat megoldásánál ez is szerepelt), ami az összes megoldáshoz is elvezet.

Az $ax+by=c$ egyenletről feltehetjük, hogy $(a, b)=1$, különben a legnagyobb közös osztóval történő osztás után kapunk ilyen alakú egyenletet.

Az $y=\dfrac{c-ax}{b}$ alakból látható, hogy ha valamely x_0, y_0 megoldása (3)-nak, akkor

(4) $$x=x_0+bt, \quad y=y_0-at$$

(tetszőleges t egész számra) is megoldás, hiszen ha $c-ax_0$ osztható b-vel, akkor $c-ax=(c-ax_0)-abt$ is osztható b-vel.

Az x_0, y_0 „alapmegoldás" keresésekor x_0-ra csak a $0, 1, 2, \ldots, b-1$ számokat kell kipróbálni.

Először is a következő b darab szám:

(5) $$0, \quad 1\cdot a, \quad 2\cdot a, \quad \ldots, \quad (b-1)a$$

b-vel osztva mind különböző maradékot ad, mert ellenkező esetben $b \mid k_1a-k_2a$ lenne, azaz $b \mid (k_1-k_2)a$, amiből $(a, b)=1$ és $0 \leqq k_1, k_2 \leqq (b-1)$ miatt $k_1=k_2$ ellentmondás következne.

A b-vel történő osztás szempontjából b-féle maradék lép fel, tehát c az (5)-ben szereplő számok egyikével azonos maradékot ad, különbségük b-vel osztható.

Ez azt jelenti, hogy (3)-nak van megoldása, sőt (4)-ben az összes megoldást felírtuk, még azt is feltehetjük, hogy $0 \leqq x_0 \leqq b-1$.

A **89.** feladathoz kapcsolódik *Sylvester* tétele ([4] VI. fejezet).

Legyenek a és b egymáshoz relatív prím természetes számok. Azoknak az n természetes számoknak a száma, amelyekre az ax+by=n egyenletnek nincs nem

negatív egész x, y értékekből álló megoldása, $\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$, és a legnagyobb ilyen n érték $ab-a-b$.

Ennek bizonyítását feladatként az olvasóra bízzuk.

Ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ relatív prím vagy páronként relatív prím természetes számok, felmerül a kérdés, mely n természetes számokra nem oldható meg nem negatív egész $x_1, x_2, \ldots, x_k$-val az

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_kx_k=n$$

egyenlet. *Arra a kérdésre, hogy hány ilyen n van, és ezek közül melyik a legnagyobb, még nem ismeretes a végleges válasz.*

8. A számelmélet alaptétele

Világos, hogy egy 1-től különböző természetes szám vagy prímszám — azaz önmagán és az 1-en kívül nincs más pozitív osztója —, vagy pedig felírható két (1-től különböző) természetes szám szorzataként. Az eljárást a tényezőkre folytatva, végül is az eredeti természetes számot pozitív prímszámok szorzataként írhatjuk fel.

A számelmélet alaptétele azt mondja ki, hogy ez a prímfelbontás lényegileg (a tényezők sorrendjétől eltekintve) *egyértelmű.*

Ebben alapvető szerepet játszik a 7. *jegyzet*ben és sok feladatunk megoldásánál is felhasznált következő tétel.

Ha az a, b, c természetes számokra $a \mid bc$ és $(a, b)=1$, akkor $a \mid c$.

A tétel bizonyítása a maradékos osztás elvégezhetőségén alapul.

Legyen A azon c természetes számok halmaza, melyre $(a, b)=1$ mellett $a \mid bc$. Világos, hogy a többszörösei A-hoz tartoznak, tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy A csak a többszöröseiből áll.

Az A halmaznak van legkisebb eleme, jelölje ezt c_0. Először megmutatjuk, hogy A csak c_0 többszöröseiből állhat.

A tetszőleges c elemére ugyanis — maradékos osztással —

$$c=c_0q+r, \quad 0\leqq r<c_0, \quad \text{ezért}$$
$$bc=(bc_0)q+br \quad \text{és} \quad a \mid bc,\ a \mid bc_0 \quad \text{miatt} \quad a \mid br$$

is következik. De $0\leqq r<c_0$, s mivel c_0 minimális volt, ezért $r=0$, azaz $c=c_0q$.

Mivel a is A eleme, ezért az előbbiek alapján $a=c_0q_1$. Tudjuk továbbá, hogy van olyan t természetes szám, melyre $bc_0=ta=tc_0q_1$. De akkor $b=tq_1$, q_1 közös

osztója a-nak és b-nek, tehát $q_1=1$, azaz $a=c_0$. Ezzel beláttuk, hogy A az a többszöröseiből áll. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Ezután a prímfelbontás egyértelműségét már könnyen igazolhatjuk. Ha

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$$

két felbontás, a jobb oldal osztható p_1-gyel, de akkor — előbbi tételünket fokozatosan alkalmazva — p_1 osztója valamelyik jobb oldali prímtényezőnek. Ez csak akkor lehet, ha megegyezik vele. Ezzel a gondolatmenettel a bal és jobb oldali prímtényezőket fokozatosan „azonosíthatjuk".

A számelmélet alaptételét ezután így fogalmazhatjuk meg:

Minden 1-*től különböző n természetes szám egyértelműen írható fel*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$$

alakban, ahol $p_1, p_2, \ldots, p_r$ *különböző pozitív prímszámok,* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ *természetes számok.*

9. A prímszámokra vonatkozó Csebisev-tétel témaköréről

A **76.** és **77.** feladat szorosan kapcsolódik bizonyos binomiális együtthatók prímosztóiról szóló állításokhoz.

Csebisev nevezetes tétele, hogy *ha x valós szám, és* $x \geqq 1$, *akkor található olyan p prímszám, amelyre* $x < p \leqq 2x$.

Ennek *Erdős Pál*tól származó legegyszerűbb bizonyítása a tételt a következőre vezeti vissza: *A* $\binom{2n}{n}$ *binomiális együtthatónak van n-nél nagyobb prímosztója* ([4] IV. fejezet).

A tétel ebben a formában lényegesen általánosítható. Érvényes a következő *Sylvester—Schur*-féle tétel ([4] IV. fejezet).

Ha $n \geqq 2k$, *akkor az* $\binom{n}{k}$ *binomiális együtthatónak van k-nál nagyobb prímosztója.*

Ebből a tételből következik, hogy ha $n > 6$, akkor $\binom{n+5}{6}$-nak van 6-nál nagyobb prímosztója, de akkor a

$$6!\binom{n+5}{6} = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \tag{1}$$

szorzatnak is van 6-nál nagyobb prímosztója, és ez csak a jobb oldali tényezők egyikének lehet osztója. Az $n \leqq 6$ esetben erről konkrét próbálgatással is meggyőződhetünk: mindig fellép olyan prímszám, amely csak egy tényezőnek osztója. Ezzel a **76.** feladat új megoldásához jutottunk.

A Sylvester—Schur-tétel a **76.** feladat következő általánosításához is elvezet: *k darab egymás után következő természetes számhoz mindig található olyan prímszám, amely a számok közül csak egynek osztója* ($k > 1$).

Ha $n > k$, akkor $n+k-1 \geqq 2k$, alkalmazható a *Sylvester—Schur*-tétel: Az

$$n(n+1)\ldots(n+k-1) = k!\binom{n+k-1}{k} \tag{2}$$

szorzatnak van k-nál nagyobb prímosztója, ez pedig a k tényezős szorzatnak csak egyik tényezőjében szerepelhet. Ha $1 \leqq n \leqq k$, akkor $\frac{n+k-1}{2} > n-1$ *Csebisev* tétele szerint van olyan p prím, melyre

$$1 \leqq \frac{n+k-1}{2} < p \leqq n+k-1, \quad \text{tehát} \quad n-1 < p \leqq n+k-1 < 2p.$$

Ez a p prímszám (2) egyetlen tényezőjében szerepel.

Ruzsa Imre, a XII. NMD I. díjas magyar versenyzője ezért az általánosításért különdíjat kapott. *Rigge* és *Erdős* alábbi tételéből következik a **76.** feladat egy más irányú általánosítása: *Egymás utáni természetes számok szorzata nem lehet négyzetszám.* ▲

Sylvester sejtése még ennél is általánosabb:

Egymás után következő természetes számok szorzata nem lehet egyetlen természetes szám 1*-nél nagyobb egész kitevős hatványa sem.*

Ezt azonban mindeddig senkinek nem sikerült sem bizonyítani, sem cáfolni ([4] VI. fejezet).

10. A *Mod m* maradékosztály-gyűrű és a *Mod p* maradékosztálytest

A maradékos osztás egyértelmű elvégezhetőségéből és a többi tulajdonságából következik, hogy az egész számokat ekvivalenciaosztályokba sorolhatjuk aszerint, hogy a rögzített, 1-nél nagyobb m természetes számmal osztva, milyen r maradékot adnak, $0 \leqq r < m$.

Könnyen látható, hogy így az a és b természetes számok akkor és csak akkor tartoznak ugyanabba a maradékosztályba — amit így jelölünk:

$$a \equiv b \pmod m \text{ vagy } \{a\} \overset{m}{=} \{b\}$$

—, ha $m \mid a-b$. Így m számú maradékosztály van.

Az osztályokat bármely elemükkel jellemezhetjük és jelölhetjük. Mi általában a

$$0, 1, 2, \ldots, m-1$$

„maradékokat” választjuk, s az osztályokat is így jelöljük:

$$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{m-1\}.$$

A maradékosztályok körében bevezetjük az összeadás és a szorzás műveletét az

$$\{a\} + \{b\} \overset{m}{=} \{a+b\} \quad \text{és} \quad \{a\} \cdot \{b\} \overset{m}{=} \{a \cdot b\}$$

definíciók alapján. Például az összeadás definícióját így mondhatnánk el: az egyik osztály tetszőleges eleméhez hozzáadjuk a másik osztály tetszőleges elemét, s megnézzük, hogy ez az összeg melyik osztályban van. Ez az osztály lesz az előbbi két osztály összege.

Természetesen meg kell mutatnunk, hogy az így definiált műveletek eredménye nem függ attól, hogyan választottuk meg az összeadandó osztályok kitüntetett elemeit. A bizonyítás azonban a maradékos osztás egyértelműségéből és többi tulajdonságából könnyen következik.

Ellenőrizhetjük, hogy a mod *m maradékosztályok a maradékosztályok körében definiált összeadás és szorzás műveletére nézve kommutatív egységelemes gyűrűt alkotnak. Ezt a gyűrűt Mod m jelöli a továbbiakban.* A zéruselem a $\{0\}$ maradékosztály, az egységelem az $\{1\}$ maradékosztály.

Példaként megadjuk a Mod 6 és *Mod 5* maradékosztály-gyűrűk összeadási és szorzási táblázatát:

Mod 6 +	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}
{0}	{0}	{1}	[illegible]	{3}	{4}	{5}
{1}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{0}
{2}	{2}	{3}	{4}	{5}	{0}	{1}
{3}	{3}	{4}	{5}	{0}	{1}	{2}
{4}	{4}	{5}	{0}	{1}	{2}	{3}
{5}	{5}	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}

Mod 6 •	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}
{0}	{0}	{0}	{0}	{0}	{0}	{0}
{1}	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}
{2}	{0}	{2}	{4}	{0}	{2}	{4}
{3}	{0}	{3}	{0}	{3}	{0}	{3}
{4}	{0}	{4}	{2}	{0}	{4}	{2}
{5}	{0}	{5}	{4}	{3}	{2}	{1}

Mod 5 +	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}
{0}	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}
{1}	{1}	{2}	{3}	{4}	{0}
{2}	{2}	{3}	{4}	{0}	{1}
{3}	{3}	{4}	{0}	{1}	{2}
{4}	{4}	{0}	{1}	{2}	{3}

Mod 5 •	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}
{0}	{0}	{0}	{0}	{0}	{0}
{1}	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}
{2}	{0}	{2}	{4}	{1}	{3}
{3}	{0}	{3}	{1}	{4}	{2}
{4}	{0}	{4}	{3}	{2}	{1}

A *Mod 6* maradékosztályok körében pl.

$$\{3\}\cdot\{3\}\overset{6}{=}\{3\},\quad \{3\}\cdot\{1\}\overset{6}{=}\{3\},\quad \{3\}\cdot\{2\}\overset{6}{=}\{0\}.$$

Az utóbbi példa azt is mutatja, hogy a *Mod 6* maradékosztály-gyűrű nem nullosztómentes. A szorzásnak nincs inverz művelete.

Ezzel szemben a *Mod 5* maradékosztály-gyűrű nullosztómentes, sőt az {1}, {2}, {3}, {4} maradékosztályok a szorzásra nézve is csoportot alkotnak, {1} a csoport egységeleme.

Az

$$\{1\}\cdot\{1\}\overset{5}{=}\{1\},\quad \{2\}\cdot\{3\}\overset{5}{=}\{1\},\quad \{4\}\cdot\{4\}\overset{5}{=}\{1\}$$

összefüggésekből leolvasható, hogy az {1}, {2}, {3}, {4} elemek inverze rendre {1}, {3}, {2}, {4}, és a {0}-tól különböző maradékosztállyal történő osztás is értelmezhető.

Megállapíthatjuk, hogy a *Mod 5* maradékosztályok testet alkotnak. Íme előttünk áll egy 5 elemű test.

Általánosan igaz a következő tétel.

A Mod m maradékosztályok akkor és csak akkor alkotnak testet, ha $m=p$ prímszám. Ilyenkor beszélünk *Mod p prímtestről.*

A tétel bizonyítása egészen egyszerű.

1. Ha $m=m_1 \cdot m_2$, és m_1, m_2 egyike sem m, akkor

$$\{m_1\} \cdot \{m_2\} \stackrel{m}{=} \{0\}.$$

Tehát nullosztók lépnek fel, *Mod m* nem lehet test.

2. Ha p prímszám, akkor *Mod p*-ből a $\{0\}$-tól különböző, tetszőleges $\{a\}$ elemet kiválasztva,

$$\{a\} \cdot \{0\}, \{a\} \cdot \{1\}, \{a\} \cdot \{2\}, \ldots, \{a\} \cdot \{p-1\}$$

mind különböző maradékosztályok. Ellenkező esetben ugyanis

$$\{a\} \cdot \{k_1\} \stackrel{p}{=} \{a\} \cdot \{k_2\}$$

azt jelentené, hogy

$$p \mid a(k_1-k_2). \quad \text{De} \quad p \nmid a, \quad \text{ezért} \quad p \mid k_1-k_2,$$

azaz $\{k_1\} \stackrel{p}{=} \{k_2\}$ ellentmondáshoz jutnánk *(8. jegyzet)*.

Minthogy p darab maradékosztály van, létezik egyetlen olyan $\{a'\}$ osztály, melyre $\{a\} \cdot \{a'\} \stackrel{p}{=} \{1\}$, és ezzel az $\{a\}$-val való osztás elvégezhetőségét is biztosítottuk: Az $\{a\} \cdot \{x\} \stackrel{p}{=} \{b\}$ egyenlet egyetlen megoldása $\{x\} \stackrel{p}{=} \{b\}\{a'\}$.

A **69—74.** oszthatósági feladatok mind-mind megfogalmazhatók a maradékosztályok (kongruenciák) nyelvén, pl. a **71.** feladat így:

$$5^n+2 \cdot 3^{n-1}+1 \equiv 0 \pmod 8, \text{ vagy } \{5^n+2 \cdot 3^{n-1}+1\} \stackrel{8}{=} \{0\}$$

minden n természetes számra.

A fentiek alapján könnyen gyárthatunk újabb és újabb oszthatósági feladatokat is.

A következő jegyzetben néhány nevezetes alkalmazást is bemutatunk.

11. Euler tétele, Fermat tétele, Wilson tétele

Láttuk, hogy a *Mod m* maradékosztályok nem alkotnak testet, ha m nem prímszám, a szorzás műveletének nincs inverze. Ha azonban egy olyan a számot veszünk, mely m-hez relatív prím (ebből adódik, hogy az $\{a\}$ maradékosztály minden eleme relatív prím m-hez), akkor az

$$\{a\}\cdot\{1\}, \{a\}\cdot\{2\}, \ldots, \{a\}\cdot\{m-1\}$$

osztályok mind különböznek. Tudniillik $\{a\}\{k_1\}\overset{m}{=}\{a\}\{k_2\}$ azt jelenti, hogy $m \mid a(k_1-k_2)$, és mivel $(a, m)=1$, ezért $m \mid (k_1-k_2)$, tehát $\{k_1\}\overset{m}{=}\{k_2\}$ *(8. jegyzet)*.

Ez azt jelenti hogy egyetlen olyan $\{a'\}$ osztály van, melyre $\{a\}\cdot\{a'\}\overset{m}{=}\{1\}$, és ezzel az $\{a\}$ osztállyal való osztás elvégezhetőségét is igazoltuk: az $\{a\}\cdot\{x\}\overset{m}{=}\{b\}$ egyenlet egyetlen megoldása $\{x\}\overset{m}{=}\{b\}\cdot\{a'\}$.

Az előbbi gondolatmenetet folytatva, könnyen beláthatjuk, hogy az m-hez relatív prím maradékosztályok — ezek számát $\varphi(m)$-mel szokás jelölni (*Euler*-féle függvény) — a *Mod m*-beli szorzásra nézve csoportot alkotnak. A csoportnak $\varphi(m)$ számú eleme van. Ez az $R(\text{mod } m)$-mel jelölt csoport, a *Mod m* halmaz része (mod *m redukált maradékosztályok* halmazának is nevezik).

Mindezekből most már a következőket olvashatjuk le: Ha

$$\{r_1\}, \{r_2\}, \ldots, \{r_{\varphi(m)}\} \tag{1}$$

az $R(\text{mod } m)$ elemeit jelölik, akkor tetszőleges $R(\text{mod } m)$-beli $\{a\}$-ra a

$$\{a\}\cdot\{r_1\}, \{a\}\cdot\{r_2\}, \ldots, \{a\}\cdot\{r_{\varphi(m)}\} \tag{2}$$

$\varphi(m)$ számú maradékosztályban az $R(\text{mod } m)$ minden eleme egyszer fordul elő.

De akkor (1) és (2) elemeit összeszorozva egyenlőséget kapunk:

$$\{a\}^{\varphi(m)}\{r_1\}, \quad \ldots, \quad \{r_{\varphi(m)}\}\overset{m}{=}\{r_1\}\ldots\{r_{\varphi(m)}\}. \tag{3}$$

Ebből *Euler*-tételét kapjuk: *Ha* $(a, m)=1$, *akkor*

$$\{a\}^{\varphi(m)}\overset{m}{=}\{1\}, \quad \text{azaz} \quad a^{\varphi(m)}\equiv 1 \pmod m.$$

Például az $R(\text{mod } 10)$ halmaz elemei: $\{1\}$, $\{3\}$, $\{7\}$, $\{9\}$, azaz $\varphi(10)=4$. *Euler* tétele szerint

$$3^4\equiv 7^4\equiv 9^4\equiv 1 \pmod{10}.$$

Ha $m = p$ prímszám, akkor $\varphi(p) = p-1$, hiszen $1, 2, \ldots, p-1$ mindegyike p-hez relatív prím. *Euler* tételének megfelelője p prímszám modulus esetén a (kis) *Fermat*-tétel:

$$\textit{Ha } a \not\equiv 0 \pmod p, \text{ akkor } a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

Azt is megállapíthatjuk, hogy az $R(\text{mod } p)$ csoport elemei közül csupán az $\{1\}$ és a $\{p-1\} = \{-1\}$ elemek egyeznek meg a saját inverzükkel, ugyanis az $\{x\}^2 \overset{p}{=} \{1\}$ egyenlet (amely ekvivalens a $p|(x-1)(x+1)$ oszthatósággal) csak $\{1\}$-re és $\{p-1\}$-re teljesül. A többi elemet és inverzeiket rendre párokba sorolva, szorzatuk $\{1\}$ lesz. Az összes elem összeszorzásával nyerjük *Wilson* tételét:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

Wilson tételét felhasználtuk a **76.** feladat megoldásánál is.

Wilson tételét általánosíthatjuk az $R(\text{mod } m)$ csoportra; feltesszük, hogy $m>2$. Ebben a csoportban az $\{x\}^2 \overset{m}{=} \{1\}$ egyenlet megoldásai 2^h rendű részcsoportot alkotnak, valamely m-től függő $h \geqq 1$ egész kitevőre. Továbbá, ha $\{x\}$ egy ilyen megoldás, akkor $\{-x\}$ tőle különböző megoldás lesz, és $\{x\} \cdot \{-x\} \overset{m}{=} \{-1\}$. Ekkor az $R(\text{mod } m)$ összes elemének szorzatára az előbbi gondolatmenettel azt kapjuk, hogy

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(m)} = (-1)^{2^{h-1}} \pmod m.$$

Ez a *Wilson*-tétel általánosítása. Például $m = 10$ mellett $h(10) = 1$, és így $1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 = -1 \pmod{10}$. De $m = 15$ esetén $h(15) = 2$; $m = 24$ esetén $h(24) = 3$, ezért az utóbbi két esetben az $R(\text{mod } m)$ elemeinek szorzata az $\{1\}$ maradékosztály lesz.

Láthatjuk, hogy a fenti tételek bizonyításánál elsősorban azt használtuk fel, hogy az $R(\text{mod } m)$ halmaz a maradékosztály-szorzásra nézve csoportot alkot.

A *Mod m* gyűrű és a *Mod p* test véges sok elemből álló struktúrák, mégis elég sok olyan tulajdonságuk van, ami az egész számok gyűrűjének, illetőleg a racionális és valós számtestnek a tulajdonságaival mutat rokonságot. Erre még később is látunk példát.

Megemlítjük még, hogy az $R(\text{mod } p)$ csoport ciklikus csoport, mégpedig $\varphi(p-1)$ $\big(\varphi(p-1)$ jelenti a $(p-1)$-hez relatív prímek számát$\big)$ számú olyan g eleme van, melyek mindegyikére igaz, hogy képezve a

$$g, g^2, g^3, \ldots, g^{p-1} = 1$$

elemeket, az $R(\text{mod } p)$ csoport minden elemét megkapjuk. Az ilyen g számokat *primitív gyököknek* nevezzük. Ha $y_1 = g^{x_1}$ és $y_2 = g^{x_2}$, akkor $y_1 y_2 = g^{x_1 + x_2}$.

A megfelelő $y_1 \to x_1$, $y_2 \to x_2$ stb. hozzárendeléssel olyan függvényt kapunk, amely „hasonlít" a pozitív valós számokon értelmezett logaritmusfüggvényhez.

A $\varphi(n)$ *Euler*-féle függvényről csak annyit jegyzünk meg, hogy ha n prímténye-

zős alakja $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$, akkor $\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$. Ennyi az n-hez relatív prímek száma ([22]).

12. Egyváltozós polinomok. A polinom helyettesítési értéke és az algebrai egyenlet fogalma

A következő néhány jegyzetben az „algebrai" egyenletek témaköréhez kapcsolódó kérdésekre térünk át, újabb algebrai struktúrákat vezetünk be, s a számkör további bővítésére is sor kerül.

Az

$$f(x)\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$$

kifejezést a **T** *testen értelmezett n-edfokú polinomnak nevezzük, ha az* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *együtthatók a* **T** *test elemei, és* $a_n\neq 0$.

A polinom fokát $\mathrm{gr}(f)$ is jelöli, ha minden együttható 0, akkor a polinom fokáról nem beszélünk. Ha $a_n\neq 0$, akkor ez az $f(x)$ polinom főegyütthatója; ha $a_n=1$, akkor *főpolinomról* beszélünk.

Legyen $g(x)\equiv b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_kx^k$ k-adfokú polinom.

Az $f(x)$ és $g(x)$ polinomokat akkor és csak akkor tekintjük egyenlőknek, ha a megfelelő együtthatók mind egyenlők. Jelölésben

(1) $$f(x)\equiv g(x), \quad \text{ha} \quad a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \ldots.$$

A polinomegyenlőség fenti definíciójától megkülönböztetve, az

(2) $$f(x_0)=c$$

jelölés azt fejezi ki, hogy x helyére a **T** *test* x_0 *elemét helyettesítve, és a műveleteket a* **T** *testbeli műveleteknek megfelelően elvégezve, eredményül a* **T** *test c elemét kapjuk,* ilyenkor tehát $f(x)$-et mint a **T** testen értelmezett függvényt tekintjük.

Az a **T***-beli elemet az $f(x)$ polinom gyökének vagy az $f(x)=0$ algebrai egyenlet megoldásának nevezzük, ha $f(a)=0$.* Előfordulhat persze, hogy nincs ilyen **T**-beli elem, a polinomnak nincs gyöke, az $f(x)=0$ algebrai egyenletnek nincs megoldása. Könyvünkben a következőkben a **T** test szerepét főleg az R racionális számtest, a V valós számtest és később a K komplex számtest játssza. De vehet-

nénk például *Mod p* maradékosztálytestet is tetszőleges p prímszámra, mint ahogy az a számelméletben igen gyakori.

Az eddigiek megvilágítására megemlítünk néhány példát. Ha **T** szerepét a *Mod p* maradékosztálytest játssza, akkor a definíció szerint $f(x) \equiv \{1\}x^p$ és $g(x) \equiv \{1\}x$ polinomok különböznek egymástól, holott a kis *Fermat*-tétel szerint $\{x\}^p \overset{p}{=} \{x\}$ minden $\{x\} \in Mod\, p$ mellett teljesül *(11. jegyzet)*, a két függvény azonos.

Ha **T** szerepét az R racionális számtest játssza, akkor az

$$x^2 - 2 = 0$$

egyenletnek nincs gyöke. Ha **T** a V valós számtesttel azonos, akkor viszont már van gyöke.

A V valós számtestben az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek nincs gyöke, a K komplex számtestet majd úgy vezetjük be, hogy a K testben már a fenti egyenlet is megoldható legyen. Sőt, az alkalmazott módszer elvezet bennünket az algebrai számok elméletének kérdésköréhez is.

Ez a témakör könyvünk teljes feladatanyagában, de különösen az 1—4. fejezetek feladatainál fontos szerepet játszik.

13. Polinomgyűrű, maradékos osztás és az euklideszi algoritmus. Irreducibilis polinomok

A **T** testen értelmezett polinomok **T**$[x]$ halmazában összeadási és szorzási műveletet vezetünk be (úgy, hogy **T**-beli elemet helyettesítve x helyére, a régi definíciókkal összhangban maradjunk).

Ha

$$f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \;,\; g(x) \equiv b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k,$$

akkor

$$f(x) + g(x) \equiv (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n;$$

$$f(x) \cdot g(x) \equiv a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + a_nb_kx^{n+k}.$$

Itt figyelembe vettük, hogy ha pl. $k < n$, akkor $b_{k+1} = 0$, $b_{k+2} = 0$, $\dots$, $b_n = 0$.

Nem nehéz ellenőrizni, hogy **T**$[x]$ a bevezetett műveletekre nézve *kommutatív, egységelemes gyűrűt alkot (1. jegyzet)*. **T**$[x]$ zéruseleme az az $o(x)$ polinom,

melynek minden együtthatója T zéruseleme. Egységeleme az $1+0\cdot x+0x^2+\dots$ nulladfokú polinom, ahol 1 most a T test egységelemét jelenti. Megjegyezzük még, hogy $\mathbf{T}[x]$ nullosztómentes is.

Továbbá megjegyezzük még, hogy a legfeljebb n-edfokú polinomok $\mathbf{T}_n[x]$ halmaza a már bevezetett összeadás műveletére és a T-beli elemekkel történő szorzás —

$$c\cdot f(x)\equiv ca_0+ca_1x+\dots+ca_nx^n \quad (f(x)\in \mathbf{T}_n[x],\ c\in \mathbf{T})$$

— műveletére nézve T-n értelmezett $n+1$ dimenziós lineáris teret alkot, melynek az

$$1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^n$$

polinomok egy bázisát alkotják.

(Azt is mondhatjuk, hogy $\mathbf{T}[x]$ az említett két műveletre nézve végtelen dimenziós lineáris tér.)

Az egész számok körében látott maradékos osztás analógiájára a $\mathbf{T}[x]$ polinomgyűrűben is bevezethető maradékos osztás.

Tetszőleges $f(x)$ és $o(x)$-től különböző $g(x)$ polinomhoz egyértelműen található olyan $q(x)$ és $r(x)$ polinom, amelyekre

$$f(x)\equiv g(x)\cdot q(x)+r(x) \quad \text{és} \quad gr(r)<gr(g), \quad \text{vagy} \quad r(x)\equiv o(x).$$

Legyen $f(x)\equiv a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$, $g(x)\equiv b_kx^k+\dots+b_1x+b_0$ és $n\geqq k$, $a_n\neq 0$, $b_k\neq 0$.

$$\frac{a_n}{b_k}\cdot x^{n-k}\cdot g(x)\equiv a_nx^n+\dots+\frac{b_0a_n}{b_k}x^{n-k},$$

amiből következik, hogy

$$f_1(x)\equiv f(x)-\frac{a_n}{b_k}x^{n-k}\cdot g(x)$$

foka kisebb n-nél. Ezt az eljárást tovább folytatva, végül olyan $r(x)$ maradékot kapunk, amelynek a foka k-nál kisebb lesz. $q(x)\equiv\frac{a_n}{b_k}x^{n-k}+\dots$ $(n-k)$-adfokú polinom lesz.

Ha $r(x)\equiv o(x)$, azaz $f(x)\equiv g(x)\cdot q(x)$, akkor azt mondjuk, hogy $f(x)$ osztható $g(x)$-szel, vagy $g(x)$ osztója $f(x)$-nek, és ezt így is jelöljük: $g(x)\mid f(x)$.

Az egész számokra vonatkozó gondolatmenetet értelemszerűen megismételhetjük *(6. jegyzet)*. Definiálhatjuk az $f(x)$ és $g(x)$ polinomok $\big(f(x),\ g(x)\big)\equiv$ $\equiv d(x)$ *legnagyobb közös osztóját,* ami T-beli konstans szorzótól eltekintve egyértelmű, sőt az euklideszi algoritmus megfelelőjét elvégezve, megmutatható, hogy alkalmas $u(x)$ és $v(x)$ polinomokkal

$$d(x) \equiv f(x) \cdot u(x) + g(x) \cdot v(x)$$

alakba írható. *Az oszthatóság szempontjából elegendő, ha főpolinomokkal foglalkozunk.*

Ugyanúgy, ahogy természetes számok körében bizonyítottuk az egyértelmű prímfelbontás lehetőségét, analóg tételeket mondhatunk ki a polinomokra is, de a prímszámok szerepét az irreducibilis polinomok töltik be.

Az $f(x)$ **T**-*beli együtthatós polinom* **T**-*re nézve irreducibilis, ha nem bontható fel két alacsonyabb fokú* **T**-*beli együtthatós polinom szorzatára. Azt is mondjuk, hogy $f(x)$ a* **T**$[x]$-*ben irreducibilis.*

Például az x^2-2 polinom irreducibilis az R racionális számtestre nézve, de nem irreducibilis a V valós számtestre nézve: felbontható $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ alakba.

Az x^2+1 polinom a V testen irreducibilis, a komplex számok K testére nézve már nem: $(x+i)(x-i)$ alakba írható.

Ha a $h(x)$ polinom osztója az $f(x) \cdot g(x)$ szorzatnak és $h(x)$ az $f(x)$-hez relatív prím [azaz $(f(x), h(x)) \equiv 1+0 \cdot x+ \ldots$ nulladfokú polinom], *akkor $h(x)$ osztója $g(x)$-nek.*

Minden (legalább elsőfokú) **T**$[x]$-*beli polinom egyértelműen felbontható* **T**$[x]$-*ben irreducibilis polinomok szorzatára.* (Sorrendtől és **T**-beli konstans szorzótól eltekintünk.)

14. Bèzout tétele, a polinom gyökeinek száma

Legyen $f(x)$ **T**$[x]$-beli polinom, a pedig **T** testbeli elem. Az $f(x)$ és $(x-a)$ polinomokkal végezzük el a maradékos osztást, a fellépő maradék feltétlenül nulladfokú vagy az $o(x)$ zéruspolinom lesz, tehát

$$f(x) \equiv (x-a) \cdot q(x) + r \quad (r \in \mathbf{T}).$$

Vegyük mindkét oldalon az a helyen vett helyettesítési értéket, ami **T**-beli elem:

$$f(a) = (a-a) \cdot q(a) + r = r,$$

ezt figyelembe véve

(1) $$f(x) \equiv (x-a) \cdot q(x) + f(a).$$

Ez *Bèzout* tétele. Ebből azonnal adódik, hogy a akkor és csak akkor gyöke az $f(x)$ polinomnak, ha $(x-a)$ osztója az $f(x)$-nek. Továbbá, ha $f(x)$ $\mathbf{T}[x]$-ben irreducibilis polinom, és a az $f(x)$ gyöke, akkor $f(x)$ csak elsőfokú polinom lehet.

Ha $(x-a)^k \mid f(x)$, *de* $(x-a)^{k+1} \nmid f(x)$, *akkor az a szám az* $f(x)$ *polinomnak* k*-szoros* — vagy k multiplicitású — *gyöke.*

Ekkor $f(x) \equiv (x-a)^k g(x)$ alakú, és $g(a) \neq 0$.

Az eddigiekből most már következik, hogy egy $f(x)$ $\mathbf{T}[x]$*-beli polinom összes gyökeinek a száma* (multiplicitással számolva) *nem lehet nagyobb* $f(x)$ *fokánál:* Ha $c_1, c_2, \ldots, c_s$ $f(x)$-nek rendre $k_1, k_2, \ldots, k_s$ multiplicitású gyöke, és más $\mathbf{T}$-beli gyök nincs, akkor

$$f(x) \equiv (x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2} \ldots (x-c_s)^{k_s} \cdot g(x) \tag{2}$$

alakú, ahol $g(x)$ vagy nulladfokú, vagy pedig 1-nél magasabb fokú irreducibilis polinomok szorzatára bontható.

Ha az $f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ n-edfokú polinomnak n darab (nem feltétlenül különböző) gyöke van: $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{T}$, akkor

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \equiv a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \tag{3}$$

Ebből kapjuk a gyökök és együtthatók összefüggéseit kifejező *Vièta*-formulákat, melyeket a **23—25.**, **56—58.** feladatokban, továbbá a *19. jegyzet*ben felhasználunk.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n &= (-1)\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\
x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n &= (-1)^2\frac{a_{n-2}}{a_n}, \\
x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= (-1)^3\frac{a_{n-3}}{a_n}, \\
&\vdots \\
x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Bèzout tételéből következik az alábbi különösen fontos tétel. *Ha az* $f(x)$ *és* $g(x)$ *legfeljebb* n*-edfokú polinomok helyettesítési értéke legalább* $n+1$ *különböző helyen azonos, akkor a két polinom azonos, tehát minden helyettesítési érték egyenlő.* Jelöléssel: Ha $x_1 \neq \ldots \neq x_i \neq \ldots \neq x_{n+1}$-re $f(x_i) = g(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, akkor $f(x) \equiv g(x)$.

Tekintsük ugyanis az $f(x) - g(x)$ legfeljebb n-edfokú polinomot. A feltétel

szerint ennek legalább $n+1$ különböző gyöke van, ami előbbi tételünk szerint csak akkor lehetséges, ha $f(x)-g(x)$ a zéruspolinom, tehát $f(x)\equiv g(x)$.

Ez a tétel a **28.** feladat megjegyzéséhez is kapcsolódik *(15. jegyzet)*.

Megemlítjük, hogy a fenti tétel alkalmas a *Wilson*-tétel bizonyítására is *(11. jegyzet)* : A *Mod* p-beli együtthatós *Mod* $p[x]$ polinomok körében $(x^{p-1}-\{1\})-(x-\{1\})(x-\{2\})\dots(x-\{p-1\})$ legfeljebb $(p-2)$-edfokú polinom. *Fermat* tétele szerint viszont ennek $\{1\}, \{2\}, \dots, \{p-1\}$ is gyöke, tehát a fenti polinom a zéruspolinom. Speciálisan a konstans tag is 0, tehát $\{-1\}^p \overset{p}{=} \{1\}\{2\}\dots\{p-1\}$. Ha p páratlan prímszám, akkor ez éppen a szokásos *Wilson*-tétel (de $p=2$-re is érvényes).

15. Polinomok „egész helyen" felvett értékeiről

A **79.** és a **28.** feladatok számelméleti kérdésekhez kapcsolódnak ([4] VI. fejezet 20—23. pont). A **79.** feladathoz kapcsolódó megjegyzésünkben említettük a tétel általánosítását. Még ennél is általánosabb a következő *Ch. Brisse* és *J. Jentzsch* által talált tétel:

Ha egy k természetes számra egy egész együtthatós polinom értéke minden egész helyen egy egész szám k-adik hatványa, akkor a polinom egy egész együtthatós polinom k-adik hatványa.

Sőt *Erdős Pál* sejtése után *W. Fuchs* a következő, még általánosabb tételt is bebizonyította.

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ egész együtthatós polinomokról azt tudjuk, hogy minden m egész számhoz van olyan u_m egész, amelyre

$$(1)\qquad f(m)=g(u_m),$$

akkor van olyan $h(x)$ egész együtthatós polinom, amelyre

$$(2)\qquad f(x)\equiv g(h(x))\equiv(g\circ h)(x)\qquad \textit{(23. jegyzet)}.$$

Ez $g(x)=x^k$ esetében az előbbi tételt adja.

Ezeknél jóval egyszerűbb a **28.** feladat megoldásához kapcsolódó tétel, melyet be is bizonyítunk.

Ha az $f(x)$ és $g(x)$ egész együtthatós polinomokról azt tudjuk, hogy minden

m egész számhoz van olyan u_m egész, amelyre

(3) $$f(m)=g(m)u_m,$$

akkor van olyan $h(x)$ racionális együtthatós polinom, mely minden egész x-re egész értéket vesz fel, és

(4) $$f(x)\equiv g(x)\,h(x).$$

A bizonyítás a maradékos osztás egyértelmű elvégezhetőségén és egy polinomokra vonatkozó határértéktételen nyugszik. Maradékos osztással

(5) $$f(x)\equiv g(x)\,q(x)+r(x)$$

alakba írható, ahol $r(x)$ $g(x)$-nél alacsonyabb fokú racionális együtthatós polinom vagy zéruspolinom; $q(x)$ racionális együtthatós polinom, $q(x)$ együtthatóinak közös „nevezőjét" jelöljük c-vel. Ezt kiemelve $q(x)=\frac{1}{c}\cdot\bar{q}(x)$, ahol $\bar{q}(x)$ most már egész együtthatós polinom, és az együtthatók legnagyobb közös osztója 1.

Képezzük a következő függvényt:

(6) $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{c}\,\bar{q}(x)+\frac{r(x)}{g(x)}\,.$$

Tegyük fel, hogy $r(x)$ nem a zéruspolinom. Mivel $r(x)$ a $g(x)$-nél alacsonyabb fokú polinom, ezért – a jól ismert határértéktétel szerint — $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{r(x)}{g(x)}=0$ és $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{r(x)}{g(x)}=0$. De akkor a (6)-ban szereplő c konstanshoz található olyan (elég nagy) K természetes szám, melyre

$$-\frac{1}{c}<\frac{r(x)}{g(x)}<\frac{1}{c}, \quad \text{hacsak } |\,x\,|>K,$$

sőt $r(x)\neq 0$, $g(x)\neq 0$ is teljesül, hiszen $r(x)$-nek és $g(x)$-nek is csak véges sok gyöke van (*Bèzout* tétele szerint). Ez viszont azt jelenti, hogy azokra az m egész számokra, melyekre $|\,m\,|>K$, $\frac{f(m)}{g(m)}$ nem lehet egész, hiszen az $\frac{r(m)}{g(m)}$ tört nevezője nagyobb, mint az $\frac{1}{c}\,q(m)$ „tört" nevezője.

Ebből következik, hogy (5)-ben $r(x)$ zéruspolinom,

$$f(x)\equiv g(x)\,q(x),$$

$h(x)\equiv q(x)$ választással tételünket bebizonyítottuk.

Megállapíthatjuk, hogy a **28.** feladat megoldásában „csak ezt" a segédtételt

használtuk fel az ott szereplő egyenletrendszer felállításánál. Azt, hogy az ottani $K(x)$ polinom együtthatói mind egész számok, a rendszer megoldásánál nem használtuk fel, az a rendszer megoldásából jött ki.

Végül megemlítjük, hogy van olyan racionális együtthatós polinom, mely minden egész helyen egész helyettesítési értéket vesz fel. A „kis" *Fermat*-tételből következik, hogy

$$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x,\quad \frac{1}{5}x^5-\frac{1}{5}x \quad \text{stb.}$$

ilyen polinomok *(11. jegyzet)*.

16. A *Mod* $f(x)$ polinom-maradékosztály gyűrű, algebrai testbővítés

A *10. jegyzet* gondolatmenetét szinte változatlanul megismételhetjük.

Legyen $f(x)$ **T**-beli együtthatós n-edfokú polinom $\big(f(x)\in\mathbf{T}[x]\big)$. A $\mathbf{T}[x]$ polinomgyűrű elemeit ekvivalenciaosztályokba sorolhatjuk aszerint, hogy $f(x)$-szel osztva milyen $r(x)$ maradékot adnak. Ez azt jelenti, hogy az $a(x)$ és $b(x)$ polinomok akkor és csak akkor tartoznak ugyanabba a maradékosztályba — amit így is jelölünk:

$$a(x)\equiv b(x)\ \big(\operatorname{mod} f(x)\big),\ \text{vagy}\ \{a(x)\}\overset{f(x)}{=}\{b(x)\}\ \text{—},$$

$$\text{ha } f(x)\mid a(x)-b(x).$$

Az osztályokat bármely elemükkel jellemezhetjük és jelölhetjük, mi általában az n-nél alacsonyabb fokú „maradékokat" választjuk. Az osztályok halmazát *Mod* $f(x)$ jelöli.

A *Mod* $f(x)$ halmazban bevezetjük az összeadás és a szorzás műveletét az

$$\{a(x)\}+\{b(x)\}\overset{f(x)}{=}\{a(x)+b(x)\}$$

és

$$\{a(x)\}\cdot\{b(x)\}\overset{f(x)}{=}\{a(x)\cdot b(x)\}$$

definíciók alapján. Például a szorzás definícióját így mondhatjuk el: Az egyik osztály tetszőleges elemét megszorozzuk a másik osztály tetszőleges elemével (a $\mathbf{T}[x]$-beli szorzás szerint), majd megnézzük, hogy a szorzat melyik osztályban van. Ez az osztály lesz az előbbi két osztály szorzata. A definíció jogossága most is a maradékos osztás egyértelműségéből és többi tulajdonságából következik.

Ellenőrizhetjük, hogy a *Mod* $f(x)$ halmaz a fenti műveletekre nézve *kommutatív, egységelemes gyűrűt alkot*. A zéruselem a $\{o(x)\}$ osztály, az egységelem az $\{1+0x+0x^2+\ldots\}$ osztály (1 a **T** test egységeleme, $o(x)$ a $\mathbf{T}[x]$-beli zéruspolinom).

Például $f(x)\equiv x^2+1$ a V valós számtesten értelmezett $V[x]$ polinomgyűrűben irreducibilis polinom. A *Mod* (x^2+1) gyűrű elemei $\{a+bx\}$ alakban írhatók, ahol a, b tetszőleges valós számok. Az $\{a+bx\}$ és $\{c+dx\}$ osztályokra az összeadás és szorzás műveletét így definiáljuk:

$$\{a+bx\}+\{c+dx\} \overset{x^2+1}{=} \{(a+c)+(b+d)x\},$$

$$\{a+bx\}\cdot\{c+dx\} \overset{x^2+1}{=} \{ac+(ad+bc)x+bdx^2\} \overset{x^2+1}{=} \{(ac-db)+(ad+bc)x\}.$$

Sőt *Mod* (x^2+1) nemcsak gyűrű, hanem test is. Az $\{a+bx\}$ osztály inverze a szorzás műveletére nézve

$$\{a+bx\}^{-1} \overset{x^2+1}{=} \left\{\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}x\right\},$$

ha $a^2+b^2\neq 0$. Erről könnyen meggyőződhetünk.

Már az eddigiekből is látszik, hogy a *Mod* (x^2+1) test és a K komplex számtest „szinte azonosak" (izomorfak; *17.* és *22. jegyzet*).

Általában is igaz a következő tétel: *A Mod* $f(x)$ *halmaz a bevezetett összeadási és szorzási műveletre nézve akkor és csak akkor test, ha* $f(x)$ $\mathbf{T}[x]$*-ben irreducibilis polinom.*

Ha $f(x)$ irreducibilis, akkor az $\{u(x)\}$ osztály inverzét: az $\{u(x)\}^{-1}$ osztályt a következő eljárással határozhatjuk meg. $f(x)$ irreducibilitásából következik, hogy $u(x)$ és $f(x)$ legnagyobb közös osztója az $1+0x+\ldots$ polinom. Az euklideszi algoritmus alapján *(13. jegyzet)* van olyan $v_1(x)$ és $v_2(x)$ polinom, mellyel $1+0x+\ldots\equiv u(x)\cdot v_1(x)+f(x)\cdot v_2(x)$ (1 a **T** egységeleme), tehát

$$\{1+0x\} \overset{f(x)}{=} \{u(x)\}\{v_1(x)\}, \quad \{v_1(x)\} \overset{f(x)}{=} \{u(x)\}^{-1}.$$

Mindez akkor végezhető el, ha $\{u(x)\} \overset{f(x)}{\neq} \{o(x)\}$.

Látni fogjuk, hogy mindezek szoros kapcsolatban vannak az algebrai számok elméletével *(20. jegyzet)*.

Megemlítjük, hogy ha $f(x)$ n-edfokú irreducibilis polinom $\mathbf{T}[x]$-ben, akkor *Mod* $f(x)$ tekinthető **T**-n értelmezett n-dimenziós lineáris térnek, melynek egy bázisa az $\{1\}$, $\{x\}$, $\ldots$, $\{x^{n-1}\}$ osztályokból áll. Ezt így is mondhatjuk a *Mod* $f(x)$

test a **T** test n-edrangú bővítése. Itt valóban bővítésről van szó, mert *Mod* $f(x)$-ben az $\{a+0x+\ldots+0x^{n-1}\}$ osztályok halmaza a műveletek szempontjából ($a \in \mathbf{T}$) azonosítható a **T** test elemeivel (a két struktúra izomorf *(22. jegyzet)*).

Ha $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ alakú irreducibilis polinom $\mathbf{T}[x]$-ben, a neki megfelelő *Mod* $f(x)$-beli együtthatós polinomnak azonban már van gyöke *Mod* $f(x)$-ben: az

$$\{a_0+0x+\ldots\}+\{a_1+0x+\ldots\}x+\ldots+\{a_n+0x+\ldots\}x^n \overset{f(x)}{=} \{o(x)\}$$

egyenletet *Mod* $f(x)$ $\{0+x+0x^2+\ldots\}$ eleme kielégíti, hiszen a behelyettesítést elvégezve, $\{f(x)\} \overset{f(x)}{=} \{o(x)\}$ valóban teljesül.

Összefoglalva: Ha $f(x)$ $\mathbf{T}[x]$-ben irreducibilis, n-edfokú polinom, akkor a *Mod* $f(x)$test a **T** testből lényegében úgy keletkezik, hogy az $f(x)$ polinom gyökét mint új, α-val jelölt elemet a **T** testhez csatoljuk. Az α-val való számolás a gyűrűaxiómák figyelembevételével történik. Egyetlen „számítási szabály" jelent korlátozást:

$$f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_n\alpha^n=0.$$

Ennek megfelelően az új, α-val történő bővítéssel nyert $\mathbf{T}[\alpha]$ test elemei

$$c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2+\ldots+c_{n-1}\alpha^{n-1}$$

alakúak, ahol $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ a **T** test tetszőleges elemei.

Mod $f(x)$ és $\mathbf{T}[\alpha]$ izomorfak, csupán *Mod* $f(x)$ minden $\{a+0x+\ldots\}$ elemét a **T**-beli a-ra, az $\{0+x+0x^2+\ldots\}$ elemet és hatványait α-ra és hatványaira cseréltük ki, a $\mathbf{T}[\alpha]$-beli műveleteket a *Mod* $f(x)$-beli műveleteknek megfelelően végezzük.

Ha a *Mod p* prímtestből indulunk ki, akkor minden n-re van n-edfokú irreducibilis polinom, és az ezzel készített n-edrangú bővítés p^n számú elemet tartalmaz. Megmutatható, hogy az így nyert p^n elemű véges testek mind izomorfak egymással. A véges testek nagyon fontos szerepet játszanak a modern matematika több fontos területén (pl. algoritmuselmélet, gráfelmélet, véges geometriák).

17. Komplex számok bevezetése

Már említettük, hogy az $x^2+1=0$ egyenletnek nincs gyöke a V valós számtestben, azaz x^2+1 irreducibilis a $V[x]$ polinomgyűrűben. Az előző *16. jegyzetnek* megfelelően V-t az x^2+1 polinom i-vel jelölt gyökével bővítjük. Az i-vel való számolást a gyűrűaxiómáknak megfelelően végezzük az $\mathrm{i}^2+1=0$ „számítási szabály" figyelembevételével.

A kapott $V[\mathrm{i}]$ testet K komplex számtestnek nevezzük.

K elemei tehát $a+b\mathrm{i}$ alakú számok, ahol a, b a V valós számtest tetszőleges elemei, $a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}$ akkor és csak akkor, ha $a=c$ és *$b=d$.*

Az összeadás és szorzás definíciói:

$$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}, \quad (a+b\mathrm{i})\cdot(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ac+db)\mathrm{i}.$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy K a bevezetett műveletekre nézve testet alkot. Már említettük is, hogy K lényegében megegyezik (izomorf) a $Mod\ (x^2+1)$ testtel *(16. jegyzet).*

Az $a+b\mathrm{i}$ komplex szám inverze:

$$(a+b\mathrm{i})^{-1}=\frac{1}{a+b\mathrm{i}}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\,\mathrm{i}$$

(ha $a^2+b^2\neq 0$, azaz $a+b\mathrm{i}\neq 0$).

Az $a-b\mathrm{i}$ számot az $a+b\mathrm{i}$ szám *konjugáltjának* hívjuk, és használjuk az

$\overline{a+b\mathrm{i}}=a-b\mathrm{i}$ jelölést is.

Könnyű ellenőrizni a konjugáltakra vonatkozó alábbi azonosságokat:

$$\overline{(\bar{z})}=z, \quad \overline{(z_1+z_2)}=\overline{z_1}+\overline{z_2}, \quad \overline{(z_1\cdot z_2)}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2},$$

ahol z_1 és z_2 K tetszőleges elemei.

$z=\bar{z}$ akkor és csak akkor, ha z (K-n belül) a V valós számtesthez tartozik.

A $z=a+b\mathrm{i}$ szám abszolút értékét $|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$ definiálja.

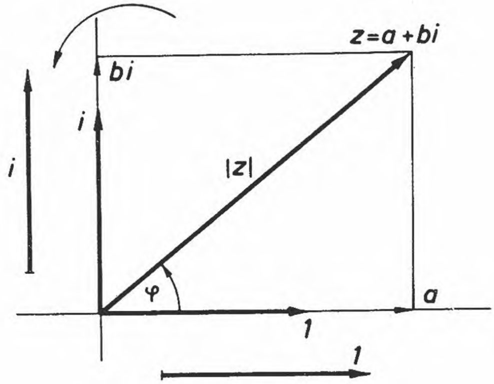
Már az eddigiek is indokolják, hogy a komplex számokat a sík vektoraival azonosítsuk. A sík tetszőleges egységvektorát jelölje 1, ennek pozitív irányú 90°-os elforgatottja legyen i. Az $a+b\mathrm{i}$ komplex szám, az előbbi egységvektorok lineáris kombinációja: $a\cdot 1+b\cdot\mathrm{i}$ *(50. jegyzet).* A geometriai szemléltetés egyszerűen indokolja *(183. ábra),* hogy $z=a+b\mathrm{i}=|z|(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$ alakba írható, ahol φ jelöli az 1 és z vektorok irányított szögét. Ez a *z komplex szám trigonometrikus alakja,* a 0-nál ilyenről nem beszélünk.

A trigonometrikus alak különösen alkalmas a szorzás elvégzésére. Ha $z_1=|z_1|(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)$, $z_2=|z_2|(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)$, akkor

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\,|z_2|\,[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin$$
$$-\sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 +$$
$$+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)] = |z_1|\,|z_2|\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$
$$+ i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Ez *Moivre* képlete *(184. ábra)*. Ebből az is leolvasható, hogy

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$



183. ábra

A *Moivre*-képlet segítségével könnyebben elvégezhető az osztás, a hatványozás és a gyökvonás is.

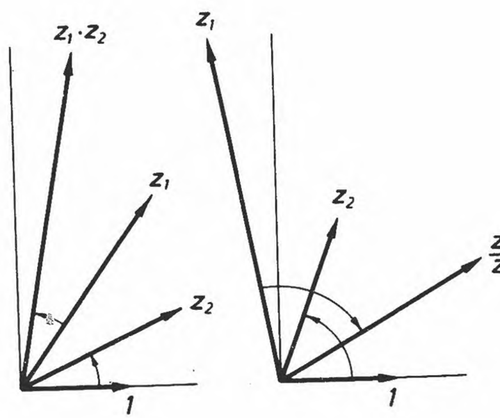
Ha $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2]$$

(184. ábra).

Ha $z = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, akkor

$$z^n = |z|^n\,[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)].$$



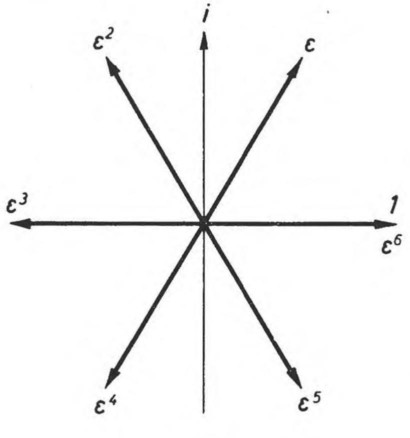
184. ábra

A gyökvonás nem egyértelmű, egy 0-tól különböző komplex számnak n darab n-edik gyöke van, az $x^n = z$ egyenlet gyökei $\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. A *185. ábrán* az x^6—1 egyenlet megoldásait, a hatodik egységgyököket szemléltetjük.

$$\varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

hatványaiként minden hatodik egységgyököt megkapunk. Ugyanígy a

$$\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$



185. ábra

számok az n-edik egységgyökök. Ezek éppen egy n-oldalú szabályos sokszög csúcsait tűzik ki.

A háromszög-egyenlőtlenséget fejezi ki $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$. Ha $z_2 \neq 0$, az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\frac{z_1}{z_2}$ nem negatív valós szám.

A **25.**, **130.**, **132.**, **137.** feladatok megoldásánál ezt a témakört használtuk fel, az *50—51. jegyzet*ben további geometriai alkalmazásokat láthatunk.

18. Az algebra alaptétele és következményei

Láttuk, hogy egy polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint amekkora a foka. Ha azonban $f(x)$ **T**-beli együtthatós legalább másodfokú polinom, mely **T**[x]-ben irreducibilis, akkor $f(x)$-nek nincs **T**-beli gyöke. Azt is láttuk, hogy ilyenkor **T** bővíthető úgy, hogy a bővítés utáni testben már $f(x)$-nek van gyöke.

Ennél sokkal fontosabb azonban az a kérdés: Tetszőleges **T** testhez található-e olyan **T**-nél bővebb $\tilde{\mathbf{T}}$ test, mely valamennyi **T**[x]-beli polinom összes gyökét tartalmazza? *Steinitz* bebizonyította, hogy ilyen $\tilde{\mathbf{T}}$ test valóban létezik. Sőt a $\tilde{\mathbf{T}}$-beli együtthatós polinomok gyökei is $\tilde{\mathbf{T}}$-hez tartoznak. Ezt a $\tilde{\mathbf{T}}$-t (mely lényegében egyértelműen van meghatározva) a **T** test algebrai lezártjának nevezzük. Ez a témakör komoly algebrai segédeszközöket igényel. Mindezek talán még jobban kiemelik a következő tételek jelentőségét:

A **V** *valós számtestnek a lezártja a* **K** *komplex számtest. A* **K** *test lezártja önmaga.* (A *Steinitz*-féle problémakört éppen ezek a tételek vetették fel.)

Elegendő, ha az utóbbi tételt így fogalmazzuk: *Minden komplex együtthatós, legalább elsőfokú polinomnak van gyöke a komplex számok körében.* Ez a tétel az algebra alaptétele, melyet *Gauss* bizonyított be először. Azóta nagyon sokféle

bizonyítása ismeretes, de mindegyik elsősorban az analízis, a komplex függvények témaköréhez kapcsolódik ([2], [3]).

Ha $f(x)$ K-beli együtthatós n-edfokú polinom, az alaptétel szerint van egy x_1 gyöke K-ban. *Bèzout* tétele szerint $f(x) \equiv (x-x_1) f_1(x)$ alakba írható, ahol $f_1(x)$ is K-beli együtthatós, de $(n-1)$-edfokú polinom. $f_1(x)$-nek van egy x_2 gyöke K-ban. *Bèzout* tétele szerint

$$f_1(x) \equiv (x-x_2)\, f_2(x), \quad \text{tehát} \quad f(x) \equiv (x-x_1)(x-x_2)\, f_2(x),$$

ahol $f_2(x)$ K-beli együtthatós $(n-2)$-edfokú polinom. Az eljárást folytatva, azt kapjuk, hogy a K-beli együtthatós $f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ n-edfokú polinomnak pontosan n darab gyöke van (multiplicitással számolva) K-ban, azaz $f(x)$ a következőképpen írható fel:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \equiv a_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Felírhatjuk a gyökök és együtthatók összefüggését kifejező *Vièta*-formulákat is *(14. jegyzet)*. Különösen a **25.** feladat megoldásában a fentiek fontos szerepet játszottak.

Ha $f(x)$ együtthatói valós számok, és az α komplex szám gyöke $f(x)$-nek, azaz $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n = 0$, akkor mindkét oldal konjugáltját véve — a bal oldalon tagonként és tényezőként — azt nyerjük, hogy α konjugáltja, $\bar{\alpha}$ is gyöke $f(x)$-nek:

$$f(\bar{\alpha}) = a_0 + a_1\bar{\alpha} + \ldots + a_n\bar{\alpha}^n = 0.$$

De akkor

$$f(x) \equiv (x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) f_2(x) \equiv [x^2 - (\alpha+\bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}] f_2(x)$$

alakba írható, és $\alpha+\bar{\alpha}$, valamint $\alpha\bar{\alpha}$ valós számok. Ebből következik, hogy $f_2(x)$ is valós együtthatós, $n-2$-edfokú polinom, melyre tovább alkalmazhatjuk a fenti eljárást. Végül is a következő tételhez jutunk:

Minden V-beli együtthatós polinom felbontható legfeljebb másodfokú, $V[x]$-ben irreducibilis polinomok szorzatára. Tehát a $V[x]$-ben irreducibilis polinomok legfeljebb másodfokúak.

19. A szimmetrikus polinomok alaptétele

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók $ax_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}$ kifejezését egytagú kifejezésnek nevezzük. Ebben az a együttható egy előre megadott $\mathbf{T}$ testből való, $i_1, i_2, \ldots, i_n$ nem negatív egész kitevők.

Két egytagút akkor és csak akkor tekintünk egyneműnek, ha a bennük szereplő változók és azok kitevői is rendre megegyeznek (legfeljebb együtthatójuk különbözik). Ellenkező esetben különnemű egytagú kifejezésekről van szó.

Két egynemű egytagú összegét így értelmezzük:

$$ax_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}+bx_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}\equiv(a+b)x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}. \tag{1}$$

Két egytagú szorzatát pedig:

$$(ax_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n})\cdot(bx_1^{j_1}\ldots x_n^{j_n})\equiv abx_1^{i_1+j_1}\ldots x_n^{i_n+j_n}. \tag{2}$$

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók $\mathbf{T}$ testbeli együtthatós $f(x_1, \ldots, x_n)$ polinomján véges sok különnemű egytagú (formális) összegét értjük. Így képezhetjük a $\mathbf{T}[x_1, \ldots, x_n]$ halmazt, mely az összes n-változós $\mathbf{T}$-beli együtthatós polinomból áll.

A $\mathbf{T}[x_1, \ldots, x_n]$ halmaz gyűrűt alkot, ha benne az összeadás és a szorzás műveletét így definiáljuk: Két polinomot úgy adunk össze, hogy az egyneműeket összeadjuk, a különneműek formális összege az összegpolinom. Két polinomot úgy szorzunk össze, hogy az egyik tényezőben szereplő minden egytagút megszorzunk a másik tényezőben fellépő minden egytagúval, és az esetleg fellépő egyneműeket összeadjuk, a különneműek formális összege a szorzatpolinom. Például:

$$(x_1x_2+2x_1x_3)+(3x_1x_3+x_2x_3)\equiv x_1x_2+5x_1x_3+x_2x_3,$$

$$\begin{aligned}(x_1x_2+x_1+x_2)\cdot(2x_1x_2+x_1-x_2)\equiv 2x_1^2x_2^2&+x_1^2x_2-x_1x_2^2\\ +2x_1^2x_2\quad&+x_1^2-x_1x_2\\ +2x_1x_2^2\quad&+x_1x_2-x_2^2\\ \hline \equiv 2x_1^2x_2^2+3x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2\quad&-x_2^2\end{aligned}$$

A definíciókat úgy adtuk meg, hogy a változók helyére $\mathbf{T}$-beli elemeket írva, és a műveleteket a $\mathbf{T}$-beli műveleteknek megfelelően elvégezve, helyes egyenlőségeket kapjunk.

Különösen fontosak a szimmetrikus polinomok.

Ha egy polinomban a változókat akárhogyan permutálva az eredeti polinomot kapjuk, akkor ezt szimmetrikus polinomnak nevezzük. A jelöléseink szerint tehát $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ szimmetrikus polinom, ha

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}), \tag{3}$$

ahol $i_1, i_2, \ldots, i_n$ az $1, 2, \ldots, n$ indexek tetszőleges permutációja.

Például, ha $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$, akkor $1 \to 3$, $2 \to 1$, $3 \to 2$ permutációval $f[x_3, x_1, x_2] = x_3x_1 + x_3x_2 = x_1x_3 + x_2x_3 \not\equiv f(x_1, x_2, x_3)$, tehát $x_1x_2 + x_1x_3$ nem szimmetrikus. Viszont $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ szimmetrikus polinom.

Könnyű megmutatni, hogy a $\mathbb{T}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$-beli szimmetrikus polinomok az összeadás és szorzás műveletére nézve gyűrűt alkotnak: $\mathbb{T}[x_1, \ldots, x_n]$ részgyűrűjét.

Különösen fontosak az elemi szimmetrikus polinomok.

Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók k-adik elemi szimmetrikus polinomján a változókból képezett összes k-tényezős szorzat összegét értjük, ezt σ_k-val jelöljük:

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 \equiv x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n, \\
&\sigma_2 \equiv x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\
&\sigma_3 \equiv x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n, \\
&\vdots \\
&\sigma_n \equiv x_1x_2x_3 \ldots x_n.
\end{aligned} \tag{4}$$

Bebizonyítható a szimmetrikus polinomok alaptétele: *A $\mathbb{T}[x_1, \ldots, x_n]$ polinomgyűrű minden szimmetrikus polinomja egyértelműen felírható a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ elemi szimmetrikus polinomok $\mathbb{T}$-beli együtthatós polinomjaként* ([18]).

Például

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \equiv (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \\ + \ldots + x_{n-1}x_n) \equiv \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Látható, hogy a (4) formulák szoros kapcsolatban állnak a *14. jegyzet*ben látható *Viète*-formulákkal, azok az $f(x)$ polinom együtthatói és a polinom gyökeinek elemi szimmetrikus polinomjai között állapítanak meg összefüggést: $f(x)$ gyökeinek ismeretében az elemi szimmetrikus polinomok helyettesítési értékét és így $f(x)$ együtthatóit határozhatjuk meg. A gyökök elemi szimmetrikus polinomjainak helyettesítési értékét megadva, az $f(x)$ együtthatóit is megadjuk, és ezek meghatározzák a gyököket is.

Mindezek különösen szorosan kapcsolódnak a **15—27.**, **51.**, **52.**, **54.**, **56—58.** feladatok megoldásához.

A szimmetrikus polinomok alaptétele lehetőséget nyújt arra, hogy egy $f(x)$ polinom gyökei bármely szimmetrikus polinomjának helyettesítési értékét a gyökök ismerete nélkül, csupán a polinom együtthatóinak ismeretében kiszámítsuk. A **32.** feladatban is erről van szó, és fontos ez az algebrai számok elméletében is *(20. jegyzet)*.

20. Az algebrai számokról

Most következő fejtegetésünk szorosan kapcsolódik a *16. jegyzet*hez. Legyen R a racionális számtest, $R[x]$ a megfelelő polinomgyűrű.

Az α (valós vagy komplex) *számot algebrai számnak nevezik, ha létezik olyan racionális együtthatós* $a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ *főpolinom, amelynek* α *gyöke. Ha e főpolinom együtthatói egészek, akkor* α*-t algebrai egésznek nevezzük.*

A racionális számok természetesen algebrai számok is, az egész számok algebrai egészek is. Sőt, például $\sqrt{2}$, az x^2-2 polinom gyöke algebrai egész; az i komplex egység az x^2+1 polinom gyöke algebrai egész; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, az x^2-x-1 polinom gyöke algebrai egész; $\cos 120°+i\sin 120° = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, az x^2+x+1 polinom gyöke algebrai egész, bár nem racionális számok. A nem algebrai számokat transzcendens számoknak nevezik. Ilyen például a $\pi=3{,}14\ldots$ szám is *(21. jegyzet)*.

A *13.* és *16. jegyzet*ekhez kapcsolódva kimutatható, hogy minden α algebrai számhoz egyértelműen létezik egy olyan $R[x]$-ben irreducibilis $f(x)$ főpolinom, melynek α gyöke. Ezt α kanonikus polinomjának is nevezik. Ha $f(x)$ n-edfokú, akkor α-t n-edfokú algebrai számnak nevezik. Ha valamely $R[x]$-beli $g(x)$ polinomra $g(\alpha)=0$, akkor $g(x)=f(x)\cdot q(x)$ alakú, ahol $q(x)$ is $R[x]$ eleme. Kiderül, hogy az algebrai egészek gyűrűt alkotnak, az összes algebrai szám pedig testet alkot, sőt az algebrai számok testének a lezártja önmaga, vagyis minden algebrai együtthatós polinom gyökei is algebrai számok *(18. jegyzet)*. Ebben alapvető szerepet játszik a szimmetrikus polinomok alaptétele.

Példaként megmutatjuk, hogy ha α algebrai szám, akkor $\frac{1}{\alpha}$, $(-\alpha)$ is algebrai szám ($\alpha \neq 0$). Legyen $f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ az α kanonikus polinomja (az $\alpha \neq 0$, ezért $a_0 \neq 0$). Ekkor $\frac{1}{\alpha}$ gyöke az

$$x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$$

polinomnak, $(-\alpha)$ gyöke az

$$f(-x) \equiv a_0 - a_1 x + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + (-1)^n x^n$$

polinomnak.

Ha α és β algebrai számok, akkor $\alpha+\beta$ és $\alpha\beta$ is algebrai számok. Legyen α kanonikus polinomja

$$f(x) \equiv a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n,$$

ennek gyökei $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Legyen β kanonikus polinomja

$$g(x) \equiv b_0 + b_1 x + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + x^m,$$

ennek gyökei $\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$.

$\alpha+\beta$ gyöke az alábbi $F(x)$ polinomnak:

$$F(x) \equiv [x-(\alpha_1+\beta_1)][x-(\alpha_1+\beta_2)]\ldots$$
$$\ldots[x-(\alpha_1+\beta_m)][x-(\alpha_2+\beta_1)]\ldots[x-(\alpha_n+\beta_m)],$$

röviden

$$F(x) \equiv \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} [x-(\alpha_i+\beta_j)].$$

Látható, hogy $F(x)$ együtthatói külön az α_i-kben és külön a β_j-kben szimmetrikus polinomok, ezért kifejezhetők a megfelelő elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként és így $f(x)$ és $g(x)$ együtthatóinak polinomjaként. Tehát $F(x)$ együtthatói racionális számok. Ugyanígy látható be, hogy a

$$G(x) \equiv (x-\alpha_1\beta_1)(x-\alpha_1\beta_2)\ldots(x-\alpha_1\beta_m)(x-\alpha_2\beta_1)\ldots(x-\alpha_n\beta_m) \equiv$$

$$\equiv \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (x-\alpha_i\beta_j)$$

polinom is racionális együtthatós. $\alpha\beta$ viszont gyöke $G(x)$-nek.

Természetesen nem állíthatjuk, hogy a fenti $F(x)$ és $G(x)$ irreducibilis polinomok, de akkor irreducibilis polinomok szorzatára bontva, valamelyik tényező éppen az összeg, illetve szorzat kanonikus polinomja lesz.

A **82.** feladat most következő részleges megoldásában a szimmetrikus polinomok alaptételét konstruktív módon alkalmazzuk.

A feladatban feltettük, hogy n nem köbe racionális számnak. Ezért $f(x)=x^3-n$ az $R[x]$-ben irreducibilis polinom, gyökei:

$$\alpha=\alpha_1=\sqrt[3]{n},\quad \alpha_2=\sqrt[3]{n}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\quad \alpha_3=\sqrt[3]{n}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

A $g(x)=x^3-n^2$ az $R[x]$-ben irreducibilis polinom, gyökei:

$$\alpha^2=\alpha_1^2=\sqrt[3]{n^2},\quad \alpha_2^2=\sqrt[3]{n^2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right),\quad \alpha_3^2=\sqrt[3]{n^2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

$x_0=\alpha+\alpha^2$ tehát gyöke a következő harmadfokú polinomnak:

$$F(x)\equiv[x-(\alpha_1+\alpha_1^2)][x-(\alpha_2+\alpha_2^2)][x-(\alpha_3+\alpha_3^2)]\equiv$$

$$\equiv x^3-x^2(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+$$

$$+x[(\alpha_1+\alpha_1^2)(\alpha_2+\alpha_2^2)+(\alpha_1+\alpha_1^2)(\alpha_3+\alpha_3^2)+$$

$$+(\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_3+\alpha_3^2)]-(\alpha_1+\alpha_1^2)(\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_3+\alpha_3^2).$$

A továbbiakban felhasználjuk, hogy

$$\sigma_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\sigma_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=0,$$

$$\sigma_3=\alpha_1\alpha_2\alpha_3=n.$$

$$F(x)\equiv x^3-x^2[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2-2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)]+$$

$$+x[(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)+(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3^2)+$$

$$+(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3^2)]-[(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)+(\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2)+(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3^2+$$

$$+\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2)+(\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2)]=x^3+x[(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-3\alpha_1\alpha_2\alpha_3+(\alpha_1\alpha_2+$$

$$+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)^2-2(\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2)]-[n+n^2+\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+$$

$$+\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)]=x^3-3nx-n-n^2.$$

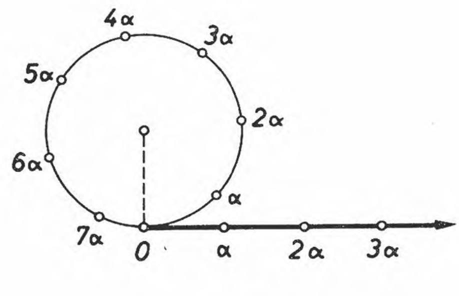
Az is látszik, hogy $F(x)$ másik két gyöke nem valós, nem nyilvánvaló azonban, hogy $F(x)$ az egyetlen olyan harmadfokú főpolinom, melynek $x_0=\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}$ gyöke, csak ha megmutatjuk, hogy $F(x)$ irreducibilis $R[x]$-ben. Ebből is látszik, hogy a közölt eredeti megoldás, látszólagos hosszadalmassága ellenére, mennyire a feladat lényegét tükrözi, belőle $F(x)$ irreducibilitása is következik.

21. Diofantoszi approximáció. Liouville tétele és a transzcendens számok

A **83.** és a **175.** feladatban a körívekre vonatkozó „skatulya"-elv érdekes alkalmazását láttuk. Ez az ötlet szoros kapcsolatban áll az irracionális számok racionális számokkal történő közelítésével, approximációjával. Ez a téma a számelmélet terjedelmes ága, szorosan kapcsolódik a geometriai számelmélethez ([4] II—III. fejezet).

Legyen α pozitív irracionális szám, a számegyenesen jelöljük ki a 0α, α, 2α, $\ldots$, $n\alpha$ számokat, majd „tekerjük fel" ezt a *186. ábrán* látható egységnyi kerületű körre. Az előbb felmért számok a kör kerületének $n+1$ pontját határozzák meg. A pontok között egybeesés nem léphet fel, mert ha a k_1-edik és k_2-edik pont egybeesnék, és ez k körüljárás után következnék be, akkor teljesülne $k_2\alpha-k_1\alpha=k$, tehát $\alpha=\dfrac{k}{k_2-k_1}$ racionális szám lenne.

A „skatulya"-elv értelmében a pozitív körüljárás szerint egymás után következő pontok között van kettő, melyek $\dfrac{1}{n}$-nél kisebb ívet határolnak, különben $\dfrac{n+1}{n}\leqq 1$ ellentmondáshoz jutnánk. Ha az $u\alpha$ és $v\alpha$ pontokra teljesül ez, akkor van olyan p egész szám, hogy $|(u-v)\alpha-p|<\dfrac{1}{n}$, világos hogy $u-v\leqq n$, s ha $u-v=q$-val osztunk,



186. ábra

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{nq}\leqq\frac{1}{q^2}. \tag{1}$$

Tehát az α irracionális számhoz van olyan $\frac{p}{q}$ tört, mely α-t $\frac{1}{q^2}$-nél jobban approximálja. Sőt, ezzel a tulajdonsággal végtelen sok $\frac{p}{q}$ tört rendelkezik.

Létezik ugyanis olyan n_1 szám, melyre

$$(2) \qquad \left|\alpha-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{n_1}.$$

Ezzel az n_1 számmal elvégezve a fenti konstrukciót, van olyan, n_1-nél nem nagyobb nevezőjű $\frac{p_1}{q_1}$ tört, melyre

$$(1') \qquad \left|\alpha-\frac{p_1}{q_1}\right|<\frac{1}{n_1q_1}\leqq\frac{1}{q_1^2}.$$

$\frac{p_1}{q_1}$ különbözik $\frac{p}{q}$-tól, mert (1')-ből $\left|\alpha-\frac{p_1}{q_1}\right|<\frac{1}{n_1}$ is következik, ez pedig (2) szerint $\frac{p}{q}$-ra nem teljesül.

Létezik olyan n_2 szám, továbbá n_2-nél nem nagyobb nevezőjű $\frac{p_2}{q_2}$ tört, hogy

$$(2') \qquad \left|\alpha-\frac{p_1}{q_1}\right|>\frac{1}{n_2} \quad \text{és} \quad (1'') \qquad \left|\alpha-\frac{p_2}{q_2}\right|<\frac{1}{n_2q_2}\leqq\frac{1}{q_2^2}.$$

Az eljárást akármeddig folytathatjuk, kivéve, ha valamely i-re $\left|\alpha-\frac{p_i}{q_i}\right|=0$, vagyis α racionális szám.

Ha $\alpha=\frac{a}{b}$ racionális szám, és $\frac{p}{q}$ tőle különböző racionális szám, az

$$\frac{1}{q^2}>\left|\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{aq-bp}{bq}\right|>\frac{1}{bq}$$

összefüggés csak $q<b$ esetén állhat fenn. Ekkor $\frac{p}{q}$ $\frac{a}{b}+1$ és $\frac{a}{b}-1$ közé esik. Az említett számközben viszont csak véges sok, b-nél kisebb nevezőjű tört van. Tehát, ha α racionális szám, csak véges sok $\frac{p}{q}$ törttel lehet $\frac{1}{q^2}$-nél jobban approximálni.

Az előbbi gondolatmenet általánosításával igazoljuk *Liouville* tételét: *Ha az*

α valós szám n-edfokú algebrai szám, akkor csak véges sok olyan $\frac{p}{q}$ tört létezik, amelyre

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{n+1}}. \tag{3}$$

Világos, hogy ekkor

$$\alpha-1<\frac{p}{q}<\alpha+1.$$

Legyen $f(x)\equiv a_0+a_1x+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$ az α kanonikus polinomja. Tudjuk, hogy $f(x)\equiv(x-\alpha)f_1(x)$ alakba írható, ahol $f_1(x)$ valós együtthatós polinom.

Minthogy α irracionális szám, bármely (3)-beli $\frac{p}{q}$-ra $f\left(\frac{p}{q}\right)\neq 0$, ezért

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|a_0+a_1\frac{p}{q}+\ldots+a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}+\frac{p^n}{q^n}\right|>\frac{1}{q^n}. \tag{4}$$

Másrészt (3) szerint

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|=\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|\cdot\left|f_1\left(\frac{p}{q}\right)\right|<\frac{1}{q^{n+1}}\cdot K, \tag{5}$$

ahol a K egész szám az $|f_1(x)|$ folytonos függvény $[\alpha-1,\ \alpha+1]$ szakaszon felvett függvényértékeinek egy felső korlátja *(25. jegyzet)*.

(4) és (5) összevetéséből

$$K\cdot\frac{1}{q^{n+1}}>\frac{1}{q^n},\qquad \text{azaz}\quad K>q.$$

Viszont az $\alpha-1$ és $\alpha+1$ számok közé csak véges sok, K-nál kisebb nevezőjű tört esik. Ezzel *Liouville* tételét bebizonyítottuk.

Liouville tétele módot ad transzcendens számok konstruálására: Ha ugyanis az α számhoz bármely n természetes számra végtelen sok olyan $\frac{p}{q}$ tört található, melyre $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{n+1}}$, akkor α nem lehet algebrai szám, tehát transzcendens.

Megmutatjuk, hogy például az

$$\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^{4!}}+\ldots+\frac{1}{2^{k!}}+\ldots$$

végtelen sor alakjában megadott szám transzcendens.

Az első k tag összege racionális szám, jelöljük $\frac{p_k}{q_k}$-val (nyilván $q_k = 2^{k!}$). A többi tag összegét végtelen mértani sorral becsülhetjük:

$$\frac{1}{2^{(k+1)!}}+\ldots<\frac{1}{2^{(k+1)!}}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^i}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{(k+1)!}}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=\frac{2}{2^{(k+1)!}}\leqq\left(\frac{1}{2^{k!}}\right)^k.$$

Tetszőleges n-re ha $k>n$ — és ilyen k végtelen sok van —, a megfelelő $\frac{p_k}{q_k}$ törtekre

$$\left|\alpha-\frac{p_k}{q_k}\right|<\frac{1}{(q_k)^k}\leqq\frac{1}{q_k^{n+1}}.$$

A fenti alakú *Liouville*-számok megtalálása után *Hermite* bebizonyította, hogy az $e=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots$ szám $\left[\text{a természetes logaritmus alapszáma: } e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}71\ldots\right]$ transzcendens, majd hasonló módszerrel *Lindemann* kimutatta, hogy $\pi=3{,}14\ldots$ is transzcendens.

A transzcendens számok létezését azóta persze sokkal egyszerűbben igazolják. Megmutatható, hogy az algebrai számok végtelen halmaza megszámlálható: egy-egy értelműen hozzárendelhetjük őket a természetes számok halmazához. A valós számokra ez a hozzárendelés nem lehetséges, azok „többen" vannak. A valós számokból az algebrai számok elhagyásával keletkező transzcendens számok is „többen" vannak, mint a természetes számok, különben a két megszámlálható halmaz egyesítése nem megszámlálható lenne ([7]II.rész). Ez a bizonyítás azonban nem ad módot egyetlen transzcendens szám konkrét megadására sem.

22. Az algebrai struktúra fogalma, izomorf struktúrák

Az eddigiek során többféle algebrai struktúrával találkoztunk: a csoport, gyűrű, test, lineáris tér egy-egy algebrai struktúra. Definícióik közös elemeiből megalkothatjuk az algebrai struktúra általános fogalmát:

Elemek (nem üres) *halmazát algebrai struktúrának nevezzük, ha értelmezve*

vannak e halmazban bizonyos műveletek, és e műveletekre nézve teljesülnek bizonyos azonosságok.

Láttuk, hogy például a K komplex számtest és a $Mod(x^2+1)$ polinom-maradékosztálytest műveleteit alkalmasan megfeleltetve egymásnak, létezik a két halmaz között kölcsönösen egyértelmű művelettartó leképezés, a két test izomorf.

Feleltessük meg egymásnak e halmazok összeadási műveleteit, ill. szorzási műveleteit. $Mod(x^2+1)$ $\{a+bx\}$ eleméhez a K komplex számtest $a+bi$ elemét rendeljük, ahol a és b tetszőleges valós számok.

$$\{a+bx\}+\{c+dx\} \overset{x^2+1}{=} \{(a+c)+(b+d)x\} \to$$
$$\to (a+bi)+(c+di)=[(a+c)+(b+d)i],$$
$$\{a+bx\}\cdot\{c+dx\} \overset{x^2+1}{=} \{(ac-bd)+(ad+bc)x\} \to$$
$$\to (a+bi)\cdot(c+di)=[(ac-bd)+(ad+bc)i]$$

mutatja, hogy a leképezés művelettartó: a „képek" összege egyenlő az összeg „képével", a „képek" szorzata egyenlő a szorzat „képével".

Tudjuk, hogy a pozitív valós számok P halmaza a szorzásra nézve csoportot alkot, a valós számok V halmaza az összeadásra nézve alkot csoportot.

Egyáltalán nem nyilvánvaló, de megmutatjuk, hogy ez a két csoport izomorf. A P-beli szorzásnak a V-beli összeadási művelet a megfelelője.

P tetszőleges x eleméhez rendeljük hozzá V $\lg x$ elemét. Ez a leképezés egy-egyértelmű és művelettartó is:

$$xy=z \to \lg x+\lg y=\lg z.$$

Éppen ez a logaritmusfüggvény nagy előnye. Láthatjuk, hogy nemcsak egy izomorfizmus létezik a két halmaz között, hiszen bármely, 1-től különböző pozitív alapú logaritmus is megfelel (más függvény viszont nem felel meg).

Két algebrai struktúra izomorf, ha a rajtuk értelmezett műveleteket valamilyen módon megfeleltetve egymásnak, létezik a két halmaz között kölcsönösen egy-értelmű, művelettartó leképezés, izomorfizmus.

Az absztrakt algebra egyes algebrai struktúrák olyan tulajdonságaival foglalkozik, melyek izomorfizmussal szemben invariánsak. Tehát az izomorf struktúrákat az absztrakt algebra azonosnak tekinti, és céljául tűzi ki az egymástól különböző (nem izomorf) struktúrák felkutatását. Ezt a programot *Steinitz* 1910-ben fogalmazta meg.

A struktúrák vizsgálatánál a műveleti azonosságok, az axiómák a leglényegesebbek, a műveletek neve, az elemek „minősége" ezen a szinten nem számít.

Az általánosságnak ez a magas foka lehetővé teszi, hogy az elért eredmények

minél szélesebben alkalmazhatók legyenek, tudniillik mindazokra a konkrét struktúrákra, amelyek az axiómákat kielégítik. A matematika és a természettudományok fejlődése újabb és újabb algebrai struktúrákat vetett fel, és vet fel ma is.

Az algebrai struktúra fogalmát tovább általánosítja a matematikai logika. Struktúrafogalma az algebrai struktúrán kívül a geometriai és más típusú struktúrákat is átfogja. A *Steinitz*-féle program hasonló a *Klein*-féle erlangeni programhoz *(41. jegyzet)*. A kettőt „durván" általánosítva, a különböző struktúrák felkutatása a modern matematika programja.

Ez a program azonban így most már túl általános. A társadalom, a tudomány és a matematika fejlődése szempontjából sem mindegy, milyen struktúrákkal foglalkoznak a matematikusok. A megismerés dialektikus útja: a valóságban megragadni a konkrét struktúrákat, ezek leglényegesebb jegyeiből absztrakcióval létrehozni az absztrakt struktúrákat. Az ezek vizsgálatával nyert eredmények birtokában — most már magasabb szinten — visszatérni a konkrétumokhoz, a valósághoz, a gyakorlati alkalmazásokhoz.

23. Függvények kompozíciója, transzformációcsoport

Tekintsük a valós számok részhalmazain értelmezett valós értékű függvények **F** halmazát. Megengedjük, hogy az értelmezési tartomány, és az értékkészlet is, az üres halmaz legyen. Ezt a „függvényt" o jelöli, és zérusfüggvénynek is nevezzük.

Jelölje f és g az **F** halmaz két tetszőleges függvényét. Az f függvény értelmezési tartományát X, értékkészletét $f(X)$ jelöli, azaz $x \in X$-re $f(x) \in f(X)$. Ugyanígy g értelmezési tartománya Y, értékkészlete $g(Y)$ legyen, $y \in Y$-ra $g(y) \in g(Y)$.

Az f és g függvények azonosak (egyenlők): $f \equiv g$, ha az X és Y halmazok elemei megegyeznek, és minden x elemükre $f(x) = g(x)$.

1. Az **F** halmazban egy „$\circ$" műveletet, a *kompozíció* műveletét vezetjük be. **F** tetszőleges f és g függvényéhez a $g \circ f$ függvényt rendeljük az alábbi definíció szerint:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

$g \circ f$ értelmezési tartományába azok az x értékek tartoznak, melyekre $f(x) \in Y$ (ez lehet az üres halmaz is, ekkor $g \circ f \equiv o$).

2. A „$\circ$" művelet asszociatív, azaz $f, g, h \in$ **F** esetén

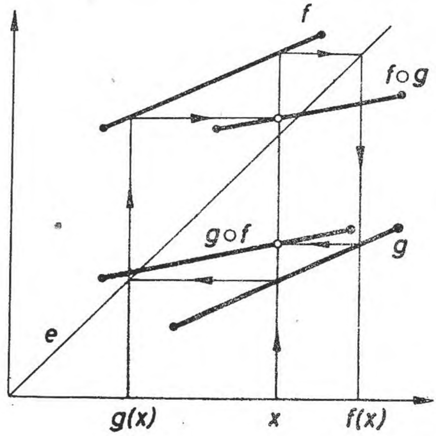
$$h \circ (g \circ f) \equiv (h \circ g) \circ f.$$

Ezután elhagyhatók a zárójelek.

3. Legyen e az a függvény, mely minden x valós számhoz önmagát rendeli: $e(x) = x$. Ez az e az **F** halmaz egységeleme: **F** bármely f elemével

$$e \circ f \equiv f \circ e \equiv f.$$

A *187. ábrán* bemutatjuk a $g \circ f$ és $f \circ g$ függvények grafikonjának szerkesztését, melyet f és g ismeretében az e egységelem segítségével végeztünk el.



187. ábra

Látható, hogy általában $g \circ f \not\equiv f \circ g$.

4. A kompozíció művelete általában nem kommutatív.

5. Az o zérusfüggvényre **F** tetszőleges f elemével

$$f \circ o \equiv o \circ f \equiv o.$$

A függvénykompozíció műveletének bevezetésével új oldalról világíthatjuk meg, sőt általánosíthatjuk a **30.**, **31.**, **83.** feladatokat. A függvénykompozíció — érthető módon — igen fontos szerepet játszik a függvényegyenletek elméletében, de alapvető szerepe van szinte a matematika minden területén. A jelölési módot persze gyakran megváltoztatják.

Például az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz egy-egyértelmű önmagára történő leképezései a permutációk. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak.

$\begin{Bmatrix} 1, 2, 3, 4 \\ 3, 2, 4, 1 \end{Bmatrix}$ jelöli, hogy 1 képe 3, 2 képe 2, 3 képe 4, 4 képe 1.

$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{Bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{Bmatrix}$ mutatja a kompozíció műveletének definícióját.

$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{Bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Bmatrix}$ mutatja, hogyan kapjuk meg egy permutáció inverzét.

Éppen a permutációcsoportok vizsgálata nyomán alakult ki a csoportelmélet. Sőt *Cayley* tétele szerint minden véges csoport egy permutációcsoport részcsoportjával izomorf, tehát a permutációcsoportok vizsgálata alapvető jelentőségű.

Az előbbiek analógiájára elmondhatjuk, hogy egy halmaz önmagára történő egy-egy értelmű leképezései, más szóval transzformációi a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak.

A geometriai transzformációcsoportok, melyeket a *28—41. jegyzet*ekben tárgyalunk, ebbe a kérdéskörbe tartoznak.

24. Jensen tétele, nevezetes egyenlőtlenségek

Az **59—62.**, **126.**, **180.** feladatokban és több szélsőérték-feladat elemi megoldásában olyan egyenlőtlenségeket használtunk fel, melyeket *Jensen* tétele egyetlen általános tételben fog össze, kidomborítva azok közös tartalmát ([7] I. és II. kötet).

Ha a valós számok T (véges vagy végtelen) intervallumán értelmezett $f(x)$ függvényre bármely, T-hez tartozó x_1 és x_2 választásával teljesül

$$f(x_1)+f(x_2)\leqq 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right), \tag{1}$$

akkor teljesül

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\leqq nf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \tag{2}$$

minden, T-hez tartozó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ értékre.

Továbbá, ha az egyenlőség (1)*-ben csak $x_1=x_2$ mellett áll fenn, akkor* (2)*-ben is csak $x_1=x_2=\ldots=x_n$ mellett érvényes.*

Az (1) feltételnek eleget tevő f függvény konkáv függvény. Ha (1)-ben az ellenkező értelmű egyenlőtlenség igaz, konvex függvényről beszélünk. Ekkor (2)-ben is az ellenkező értelmű egyenlőtlenség teljesül. (Helyesebb a „*Jensen*-konkáv”, „*Jensen*-konvex” elnevezés.)

A **61.** feladathoz kapcsolódó megjegyzésben bebizonyítottuk, hogy a $|\operatorname{ctg} x|$ függvény a $(0, \pi)$ intervallumban konvex függvény, a **126.** feladatnál megmutattuk, hogy a $\operatorname{tg} x$ függvény a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban konvex függvény. *Jensen* tételét alkalmazva, nevezetes egyenlőtlenségekhez jutottunk. Most még további példákat említünk.

a) A $\sin x$ függvény $[0, \pi]$-ban konkáv. A háromszög szögösszege π. A háromszög x_1, x_2, x_3 szögeire tehát

$$(3)\qquad \sin x_1 + \sin x_2 + \sin x_3 \leqq 3 \sin\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) = 3 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

A $\lg(\sin x)$ $(0, \pi)$-ben konkáv $\left(\text{ez } \sin x_1 \sin x_2 \leqq \sin^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \text{ következménye}\right)$,

$$\lg(\sin x_1) + \lg(\sin x_2) + \lg(\sin x_3) \leqq 3 \lg\left[\sin\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)\right].$$

Egy háromszög szögeire:

$$(4)\qquad \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \leqq \sin^3\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Az egyenlőség (3) és (4)-nél is $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{\pi}{3}$-ra teljesül. (3) és (4)-ből leolvashatjuk az alábbi tételt: *Adott körbe írt háromszögek közül a szabályos háromszög a maximális kerületű és a maximális területű (55. jegyzet).*

b) A $\lg(x)$ függvény a pozitív számok halmazán konkáv függvény, mert teljesül, hogy

$$x_1 x_2 \leqq \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2, \text{ és így } \lg x_1 + \lg x_2 \leqq 2 \lg\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Jensen tétele alapján

$$\lg x_1 + \lg x_2 + \ldots + \lg x_n \leqq n \lg\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right),$$

azaz

$$(5)\qquad \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

sőt (5)-ben az egyenlőség csak $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ mellett áll fenn.

Ez a mértani és számtani közép közötti nevezetes egyenlőtlenség.

c) Az x^2 függvény a $[0, \infty)$ tartományban konvex függvény, teljesül az

$$x_1^2 + x_2^2 \geqq 2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2.$$

Így

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \geqq n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2.$$

Szokásosabb írásforma:

$$\text{(6)} \qquad \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}} \geqq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},$$

sőt (6)-ban az egyenlőség csak $a_1=a_2=\ldots=a_n$ mellett teljesül. *Ez a négyzetes közép és a számtani közép közötti nevezetes egyenlőtlenség.*

d) Az előbbi példát tovább általánosítva belátható (bár ez már nehezebben), hogy az $x^{k/m}$ függvény konvex függvény a $[0, \infty)$ tartományon, ha $k>m$, és mindkettő természetes szám. *Jensen* tétele alapján

$$x_1^{k/m}+x_2^{k/m}+\ldots+x_n^{k/m} \geqq n\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^{k/m}.$$

Szokásosabb ezt $x_1^{1/m}=a_1$, $x_2^{1/m}=a_2$, $\ldots$, $x_n^{1/m}=a_n$ jelöléssel írni:

$$\text{(7)} \qquad \sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}} \geqq \sqrt[m]{\frac{a_1^m+a_2^m+\ldots+a_n^m}{n}} \qquad (k>m),$$

sőt (7)-ben az egyenlőtlenség csak $a_1=a_2=\ldots=a_n$ mellett teljesül. *Ez a k-adik és m-edik hatványközép közötti egyenlőtlenség.* A példák sorát még tovább is folytathatnánk.

Most rátérünk Jensen tételének bizonyítására. Módszerünk *Cauchy*tól származik. Ő ezzel a meglepő gondolatmenettel bizonyította be a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget. *Jensen* éppen a módszer nagyfokú általánosságát vette észre.

1. *A tételt először arra az esetre igazoljuk teljes indukcióval, amikor a tagok száma kettőnek hatványa.*

Feltéve, hogy $n=k$-ra az állítás igaz, bizonyítunk $n=2k$-ra. A feltevés szerint

$$f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_k) \leqq kf\left(\frac{1}{k}(x_1+x_2+\ldots+x_k)\right),$$

$$f(x_{k+1})+f(x_{k+2})+\ldots+f(x_{2k}) \leqq kf\left(\frac{1}{k}(x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_{2k})\right).$$

A fentieket összeadva, majd a jobb oldalon szereplő két tagra megint (1)-et felhasználva:

$$f(x_1)+\dots+f(x_k)+f(x_{k+1})+\dots+f(x_{2k})\leqq$$

$$\leqq k\left[f\left(\frac{1}{k}(x_1+\dots+x_k)\right)+f\left(\frac{1}{k}(x_{k+1}+\dots+x_{2k})\right)\right]\leqq$$

$$\leqq k\left\{2\cdot f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}(x_1+\dots+x_k)+\frac{1}{k}(x_{k+1}+\dots+x_{2k})\right)\right]\right\}=$$

$$=2k\cdot f\left(\frac{1}{2k}(x_1+\dots+x_k+x_{k+1}+\dots+x_{2k})\right).$$

Tehát k-ról $2k$-ra az állítást igazoltuk. Mivel az (1) feltétel szerint az állítás 2-re igaz, igaz 4-re, 8-ra, ..., 2-nek minden hatványára.

2. *Most megmutatjuk, hogy ha az állítás igaz $n=k+1$-re, akkor igaz $n=k$-ra is.* Feltesszük tehát, hogy

$$f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_k)+f(x_{k+1})\leqq(k+1)f\left(\frac{1}{k+1}(x_1+x_2+\dots+x_k+x_{k+1})\right).$$

Legyen $x_{k+1}=\frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k)$. Ezt behelyettesítve:

$$f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_k)+f\left(\frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k)\right)\leqq$$

$$\leqq(k+1)f\left(\frac{1}{k+1}\left[x_1+\dots+x_k+\frac{1}{k}(x_1+\dots+x_k)\right]\right)=$$

$$=(k+1)f\left(\frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k)\right).$$

Tehát

$$f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_k)\leqq kf\left(\frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k)\right).$$

Ezzel $k+1$-ről k-ra az állítást igazoltuk.

3. *Tetszőleges n tagra most már így bizonyítunk:* Megkeressük 2-nek azt a legkisebb kitevőjű hatványát, mely n-nél nagyobb. Legyen ez 2^m. Képezzük az alábbi 2^m darab tagot:

$$\underbrace{\underbrace{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,}_{n\text{ darab}}\ \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n),\ \dots,\ \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n).}_{2^m\text{ darab}}$$

Erre a 2^m darab számra az 1. rész szerint az állítás igaz, de akkor a 2. rész

bizonyítása szerint igaz az $\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)$ számok fokozatos elhagyásával megmaradó tagokra, végül az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokra is. Az utóbbi lépésben azt használtuk fel, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokhoz a számtani közepüket hozzávéve, az így kapott $n+1$ szám számtani közepe ugyanaz marad. A két rész bizonyításának ez volt a fő ötlete.

4. *A bizonyítást végigkövetve, láthatjuk, hogy ha* (1)*-ben az egyenlőség csak* $x_1=x_2$ *mellett áll fenn, akkor* (2)*-ben is csak* $x_1=x_2=\ldots=x_n$ *mellett áll fenn az egyenlőség.*

Ugyanezzel a módszerrel bizonyítható *Jensen* tétele k-változós függvényekre, melyek tehát szám k-asokhoz rendelnek számot. A szám k-asokat vektoroknak tekintjük *(3. jegyzet)*.

Ha az $f(\mathbf{x})$ *függvény egy* **T** *„konvex" vektortartományban van értelmezve, és bármely,* **T***-hez tartozó* $\mathbf{x}_1$ *és* $\mathbf{x}_2$ *vektorra*

$$\text{(I.)}\qquad f(\mathbf{x}_1)+f(\mathbf{x}_2)\leqq 2f\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\right],$$

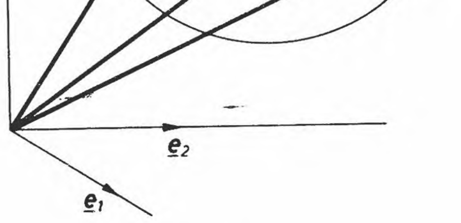
akkor teljesül

$$\text{(II.)}\qquad f(\mathbf{x}_1)+f(\mathbf{x}_2)+\ldots+f(\mathbf{x}_n)\leqq nf\left[\frac{1}{n}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_n)\right]$$

minden, **T***-hez tartozó* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *vektorra.*

Ha (I.)*-ben az egyenlőség csak* $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$ *mellett áll fenn akkor* (II.)*-ban is* $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2=\ldots=\mathbf{x}_n$ *mellett érvényes az egyenlőség.*

A **T** tartományt akkor nevezzük „konvex"-nek, ha bármely **x** és **y** vektorral együtt az $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}$ vektor is **T**-hez tartozik, ahol $\alpha+\beta=1$; $\alpha, \beta\geqq 0$ *(46. jegyzet), (188. ábra).*



188. ábra

A (I.) egyenlőtlenségnek eleget tevő $f(\mathbf{x})$ függvényt konkávnak nevezzük. Ellenkező irányú egyenlőtlenség esetén konvex függvényről van szó. Erre (II.)-ban is ellenkező irányú egyenlőtlenség teljesül.

e) Ha az **x** és **y** k dimenziós vektorok skaláris szorzatát szokásosan definiáljuk:

$$\mathbf{x}\mathbf{y}=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ky_k,$$

az $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^2$ függvény a szám k-asok terében értelmezett konvex függvény, mert

$$\mathbf{x}_1^2+\mathbf{x}_2^2\geqq 2\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)\right]^2,$$

ekvivalens az $(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)^2\geqq 0$ egyenlőtlenséggel.
Tehát

$$(8)\qquad \mathbf{x}_1^2+\mathbf{x}_2^2+\ldots+\mathbf{x}_n^2\geqq n\left[\frac{1}{n}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_n)\right]^2=\frac{1}{n}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\ldots+\mathbf{x}_n)^2.$$

f) Legyen $k=2$, s az $\mathbf{x}$ vektor komponenseit jelölje x, y.

Az $f(\mathbf{x})=f(x, y)=\sqrt{xy}$ az $(x>0,\ y>0)$ tartományban konkáv függvény:

$$\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}\leqq 2\sqrt{\frac{1}{2}(x_1+x_2)\cdot\frac{1}{2}(y_1+y_2)}$$

ekvivalens a $0\leqq\left(\sqrt{x_1y_2}-\sqrt{x_2y_1}\right)^2$ egyenlőtlenséggel. *Jensen* tételéből

$$\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}+\ldots+\sqrt{x_ny_n}\leqq n\sqrt{\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\cdot\frac{1}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)}.$$

Ezt szokás $x_i=a_i^2$, $y_i=b_i^2\ (i=1, 2, \ldots, n)$ jelöléssel így írni:

$$(9)\qquad (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqq(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

Ez a *Cauchy—Bunyakovszkij*-féle egyenlőtlenség, amit a **62.** feladat megjegyzésében és a 3. *jegyzet*ben is igazoltunk.

A példák sorát még tovább is folytathatnánk.

25. A Lagrange-féle középértéktételről

Könyvünk feladatanyagában a differenciálszámítás legalapvetőbb tételeit elsősorban a függvények menetének vizsgálatánál, a szélsőértékek meghatározásánál alkalmazzuk, pl. a **63.**, **64.**, **67.**, **181.**, **197.**, **198.** feladatokban. Az integrálszámítás tételei közül csak a határozott integrál kiszámítására vonatkozó *Newton—Leibniz*-szabályt alkalmazzuk a **102.** és a **161.** feladat megoldásánál.

Mindkét témakör szorosan kapcsolódik a *Lagrange*-féle középértéktételhez.

Vázlatosan ismertetjük a legfontosabb vonatkozásokat (az analízis tankönyvekben a bizonyítások is megtalálhatók).

Az $f(x)$ valós változós valós értékű függvénynek az $x=a$ helyen — az értelmezési tartomány torlódási pontjában — van határértéke, ha létezik olyan A szám, hogy tetszőleges pozitív ε számot megadva, található olyan pozitív δ szám, hogy minden — az értelmezési tartományba eső — x számra, melyre $0<|x-a|<\delta$, teljesül az $|f(x)-A|<\varepsilon$ egyenlőtlenség. Ennek jelölése $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. *(2., 27. jegyzet.)*

Láthatjuk, hogy az a helyet kizártuk a vizsgálódás köréből, a függvény esetleg az a helyen nincs is értelmezve. *Ha azonban* $\lim f(x)=f(a)$, *akkor az $f(x)$ függvényt az a helyen folytonosnak mondjuk.*

Az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ zárt szakaszon folytonos, ha ott minden pontban folytonos. Alapvető jelentőségű a következő tétel: *Az $[a, b]$ zárt szakaszon folytonos függvény az $[a, b]$ zárt szakaszt egy $[m, M]$ zárt szakaszra képezi le* (esetleg $m=M$). Részletezve: a függvény az $[a, b]$ szakaszon felveszi legkisebb és legnagyobb értékét a m-et és a M-et (*Weierstrass* tétele), a függvény bármely, m és M közötti értéket felvesz [speciálisan, bármely $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket is; ez *Bolzano* tétele).

Az $f(x)$ függvény az x_0 pontban — az értelmezési tartomány belső pontjában — differenciálható, ha létezik a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

határérték, az x_0 helyhez tartozó differenciálhányados (derivált).

Az $f(x)$ függvény az (a, b) nyílt szakaszon differenciálható, ha ott minden pontban differenciálható. A pontokhoz a megfelelő differenciálhányadosokat rendelve kapjuk az $f'(x)$ deriváltfüggvényt. [Geometriailag $f'(x_0)$ a függvénygörbe $(x_0, f(x_0))$ pontjához tartozó érintőjének iránytangense.]

Megmutatható, hogy az x_0 pontban differenciálható függvény ott folytonos is, de a megfordítás nem igaz.

Az x_0 pontbeli derivált előjele megszabja a függvény „lokális menetét”.

Ha $f'(x_0)>0$, akkor van olyan δ szám, hogy $0<x-x_0<\delta$ esetén $f(x)-f(x_0)>0$, $0<x_0-x<\delta$ esetén $f(x_0)-f(x)>0$, vagyis a függvény lokálisan növő. Ha $f'(x_0)<0$, akkor $f(x)$ az x_0 helyen lokálisan fogyó. Csupán a definíciót kell alkalmaznunk.

Ebből a tételből adódik, hogy *ha az (a, b) nyílt szakaszon differenciálható $f(x)$ függvény az (a, b) ξ pontjában veszi fel szélsőértékét* (maximumát vagy minimumát, 189. ábra), *akkor $f'(\xi)=0$.* Ez szükséges feltétel ahhoz, hogy a függvény az (a, b) ξ pontjában vegye fel a szélsőértéket, de nem elégséges feltétel.

(Ezt mutatja az $f(x)=x^3$ függvény, mely a $(-1,1)$ nyílt szakaszon differenciálható; az $x=0$ helyen deriváltja 0, itt mégsem vesz fel szélsőértéket.) Most elégséges feltételt keresünk, ehhez éppen a *Lagrange*-féle középértéktétel vezet el. Ezt készíti elő

Rolle tétele: Ha $f(x)$ az $[a, b]$ zárt szakaszon folytonos, (a, b)-ben differenciálható függvény és $f(a)=f(b)=0$, akkor (a, b)-ben van olyan ξ hely, ahol $f'(\xi)=0$. Nyilván ilyen hely az, ahol $f(x)$-nek maximuma vagy minimuma van *(189. ábra)*.

Rolle tételét az

$$F(x)=f(x)-\frac{x[f(b)-f(a)]+bf(a)-af(b)}{b-a}$$

„segédfüggvényre" alkalmazhatjuk, mert $F(x)$ differenciálható (a, b)-ben, továbbá könnyű ellenőrizni, hogy folytonos $[a, b]$-ben és $F(a)=F(b)=0$. Van tehát olyan, (a, b)-ben levő ξ, melyre

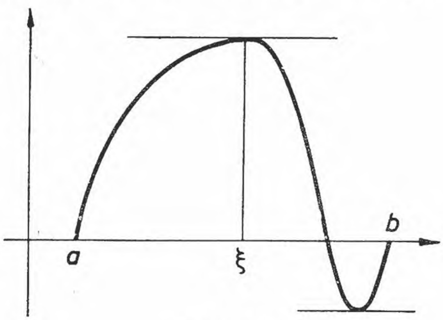
$$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ebből következik a

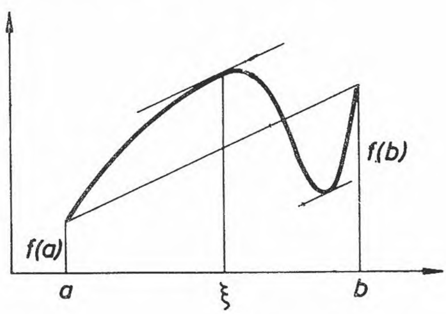
Lagrange-féle középértéktétel:

Ha $f(x)$ az $[a, b]$ zárt szakaszon folytonos és a szakasz belsejében, (a, b)-ben differenciálható, akkor van olyan, (a, b)-ben levő ξ, hogy $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a függvénygörbe $(\xi, f(\xi))$ ponthoz tartozó érintője párhuzamos a görbe végpontjait összekötő húrral *(190. ábra)*.



189. ábra



190. ábra

A Lagrange-tétel fontos következményei a következő tételek:

1. Ha az (a, b) nyílt szakaszon $f'(x)=0$, akkor $f(x)=c$ állandó.

2. Ha az (a, b) nyílt szakaszon $f'(x)>0$, akkor $f(x)$ az (a, b)-ben szigorúan növő, tehát ha $a<x_1<x_2<b$, akkor $f(x_1)<f(x_2)$.

Ha az (a, b) nyílt szakaszon $f'(x)<0$, akkor $f(x)$ itt szigorúan fogyó.

3. Ha az x_0 helyen $f'(x_0)=0$, és van olyan δ szám, hogy $f'(x)<0$, ha $0<x_0-x<\delta$; és $f'(x)>0$, ha $0<x-x_0<\delta$ — azaz a függvény az x_0 hely előtt fogyó, utána növő —, akkor az $f(x)$ függvénynek az x_0 helyen „lokális minimuma" van.

Az előző pontban szereplő feltételeket értelemszerűen megváltoztatva a „lokális maximum" létezésének elégséges feltételét is megkapjuk.

Ha tehát a derivált előjelviszonyainak ismeretében megkeressük a lokális szélsőértékeket, majd ezeket egymással és az $[a, b]$ szakasz végpontjaiban felvett függvényértékekkel összehasonlítjuk, akkor megállapíthatjuk a függvény minimumát és maximumát $[a, b]$ zárt szakaszon.

Most nézzük, hogy kapcsolódik ez az integrálszámításhoz. Az $f(x)$ korlátos függvény $[a, b]$ szakaszra vonatkozó határozott integrálját a következőképpen értelmezzük:

Az $[a, b]$ szakaszt $a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ osztópontokkal n részre osztjuk. Az i-edik szakasz hosszát $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$, a függvényértékek alsó, illetve felső határát az $[x_{i-1}, x_i]$ szakaszon m_i, illetve M_i jelölje *(2. jegyzet)*.

Képezzük az

$$s_n=\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \quad \text{és} \quad S_n=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

alsó, illetve felső összegeket. Könnyű megmutatni, hogy új osztópontok beiktatásával az alsó összeg nem csökken, a felső összeg nem növekszik, s hogy bármely felosztáshoz tartozó alsó összeg a felső összegek halmazának alsó korlátja, bármely felosztáshoz tartozó felső összeg az alsó összegek halmazának felső korlátja.

Létezik tehát az alsó összegek s felső határa, és a felső összegek S alsó határa *(2. jegyzet)*. Ha ez a kettő egyenlő, akkor $f(x)$ az a, b szakaszon integrálható, s az integrált így jelöljük:

$$s=S=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Megmutatható, hogy az $[a, b]$ szakaszon integrálható függvények halmaza bővebb az $[a, b]$-ben folytonos függvények halmazánál.

A differenciálás és integrálás kapcsolatára utal a *Newton—Leibniz*-szabály:

Ha $f(x)$ $[a, b]$-ben integrálható függvény, és létezik olyan $F(x)$ függvény, melyre ugyanitt $F'(x)=f(x)$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Ezt a *Lagrange*-féle középértéktétel segítségével be is bizonyítjuk. Alkalmazzuk az integrál definíciójában szereplő jelöléseket. Minden $[x_{i-1}, x_i]$ szakaszon — a középértéktétel szerint — van olyan ξ_i pont, melyre $F(x_i)-F(x_{i-1})=$ $=f(\xi_i)\Delta x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Mivel $m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i$, ezért — Δx_i-vel szorozva, és utána összegezve — az előbbiek szerint

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} F(x_i)-F(x_{i-1})=F(b)-F(a) \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Minthogy $f(x)$ integrálható, és a fenti egyenlőtlenség tetszőleges felosztásra igaz, ezért $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

Megemlítjük, hogy a tétel feltételei közül az integrálhatóságot nem lehet elhagyni, van ugyanis olyan $F(x)$ függvény, melynek deriváltja az $F'(x)=f(x)$ $[a, b]$-ben létezik, de $f(x)$ $[a, b]$-ben nem integrálható. Másrészt egy integrálható $g(x)$ függvényhez nem feltétlenül létezik *primitív függvény,* azaz olyan $G(x)$, melyre $G'(x)=g(x)$ igaz. A folytonos függvények viszont integrálhatók, és mindig van primitív függvényük is:

Ha $f(x)$ folytonos az $[a, b]$ szakaszon, és $x \in [a, b]$, *akkor az* $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *függvény* az *x-ben differenciálható, és $F'(x)=f(x)$.*

26. Az euklideszi geometria felépítéséről

Eukleidész törekvése nyomán a geometria felépítésében a következő utat követjük. A szemlélet alapján bizonyos alapelemeket és az ezek kapcsolatait kifejező alaprelációkat ismertnek tételezzük fel, nem definiáljuk őket más fogalmakkal. (A későbbi fogalmakat már ezek segítségével definiáljuk.)

Az alapelemekre és az alaprelációkra vonatkozó axiómákat mondunk ki (amelyeket a szemlélet alapján igaznak találunk), majd ezekből logikai úton felépítjük az egész geometriát. Az axiómák mintegy „pótolják” az alapelemek

és alaprelációk definícióit, ezért axiomatikus definícióról is beszélünk. Az euklideszi geometria első modern megalapozása *D. Hilbert* nevéhez fűződik [22].

Rendszerének váza a következő.

Alapelemek: a pont, az egyenes, a sík és a tér.

Alaprelációk: az illeszkedés (tartalmazás), az egyenes három pontjára vonatkozó elválasztás (rendezés), a szakaszokra, illetve szögekre vonatkozó egyenlőség (egybevágóság). *Hilbert* az axiómákat az alábbi öt csoportra osztotta (az alábbitól kissé eltérő sorrendben).

I. *Az illeszkedés axiómái.*
II. *A rendezés axiómái.*
III. *Az egybevágóság axiómái.*
IV. *A folytonosság axiómái.*
V. *A párhuzamossági axióma.*

Az axiomatikus módszer a geometria után a matematika többi fejezetébe, sőt más tudományokba (pl. a fizikába) is bevonult.

A párhuzamossági axiómával kapcsolatos kutatások vezették el *Bolyai Jánost* és *N. I. Lobacsevszkijt* az első nem euklideszi geometria felfedezéséhez, s ez döntő lökést adott az axiomatikus módszer és az egész matematika fejlődésének.

Ma már nem euklideszi geometriák sokaságáról beszélhetünk. A matematikai térfogalom egyre általánosabbá vált, és ezen belül speciális térfogalmak, újabb és újabb geometriai elméletek bontakoztak ki. A modern fizika fejlődése során a speciális és általános relativitás elméletéből kiderült, hogy tapasztalati terünk leírásánál az euklideszi geometria földi méretekben jó közelítés, naprendszerünk méreteiben — pl. a Merkur bolygó mozgásának leírásánál — alkalmazása a tapasztalattól eltérő eredményekre vezetett. A csillagászati megfigyelésekkel szinte tökéletes egyezésben van *Einstein* relativitáselmélete, mely a „tér—idő" leírására egy alkalmas *Riemann*-geometriát használ.

27. Konvexitás, a sík részekre bontása, Jordan tétele

A könyvben található geometriai feladatok nagy részében, de különösen a **230.** feladatban az alakzatok konvexitásának, a sík részekre bontásának kérdéseit többnyire a szemléletre hivatkozva döntöttük el. Ez a témakör teljes szigorúsággal csak a rendezési axiómák alapján tárgyalható (Eukleidésznél ez még hiányzik), amit középiskolai szinten — indokoltan — elhagynak. A helyzetgeometriai (topológiai) és a méréssel kapcsolatos kérdéseknél ez a témakör nagyon fontos szerepet játszik. Ezért röviden vázoljuk a legfontosabb fogalmak kialakításának főbb menetét (síkgeometriára korlátozódva).

Axiomatikusan definiált alapreláció az egyenes három pontjára vonatkozó elválasztás: B elválasztja A-t és C-t, vagyis B az A és C között van. Ezt szokás (ABC)-vel vagy (CBA)-val jelölni.

Például a *szakasz* definíciója: Az egyenes két pontja legyen A és C. Tekintsük az egyenes mindazon B pontjait, amelyekre (ABC). Ezen B pontok összessége az A és C pontokkal együtt az AC (zárt) *szakasz*, ahol A és C a szakasz végpontjai, a B pontok pedig a szakasz belső pontjai. Ha A-t és C-t elhagyjuk, akkor nyílt szakaszt kapunk.

Definiálhatjuk az AB, BC, CA szakaszok alkotta háromszöget (A, B, C nincsenek egy egyenesen, nem kollineárisak), továbbá a töröttvonalat, sokszögvonalat, félegyenest. Egy rendezett pontpárjának megadásával az *egyenest irányíthatjuk.*

A rendezési axiómák között különösen fontos a *Pasch-féle axióma:* Ha egy háromszög síkjában levő egyenes nem halad át a háromszög egyik csúcsán sem, de metszi a háromszög egyik oldalát, akkor ez az egyenes a háromszögnek legalább még egy oldalát metszi.

Ez az axióma döntő szerepet játszik az alábbi tétel bizonyításában: *Egy síkban levő egyenes a síkot két részre osztja* a következő értelemben: a síknak az egyenestől különböző pontjait két *osztályba* sorolhatjuk úgy, hogy két pont akkor és csak akkor tartozik ugyanabba az osztályba, ha a két pontot összekötő szakasznak nincs közös pontja a megadott egyenessel.

Egy ilyen osztályt az egyenessel együtt (zárt) *félsíknak* nevezünk. Az adott egyenes pontjai a félsík *határpontjai,* a többi pontot *belső* pontnak, a sík félsíkhoz nem tartozó pontjait *külső* pontoknak nevezzük.

Egy nem kollineáris rendezett ponthármast megadva, a síkot irányíthatjuk.

Egy *alakzat konvex,* ha bármely két pontjával együtt tartalmazza azok összekötő szakaszát is (a nem konvex alakzatok a konkáv alakzatok).

Az egyenes, sík, félegyenes, szakasz, félsík stb. konvex alakzatok. Konvex alakzatok közös része is konvex. Minden alakzat egyértelműen meghatározza a *konvex burkát,* vagyis azt a konvex alakzatot, melyet az alakzatot tartalmazó minden konvex alakzat tartalmaz.

Egy *sokszögvonalat „konvexnek"* mondunk, ha minden oldalegyenese határol egy olyan félsíkot, amely a sokszögvonal minden csúcsát tartalmazza.

Ezeket a félsíkokat *pozitív támaszfélsíkoknak* nevezzük. A pozitív támaszfélsíkok közös részét *„konvex" sokszögtartománynak* (vagy egyszerűen *„konvex" sokszögnek*) nevezzük. (Kimutatható, hogy a „konvex" sokszög valóban konvex alakzat.)

A sokszögvonal pontjai a *konvex sokszög határpontjai,* a sokszög többi pontjai *belső pontok;* a konvex sokszöghöz nem tartozó pontok a *külső pontok.*

Egy alakzat két pontja vagy összeköthető az alakzathoz tartozó töröttvonallal, vagy sem. Ennek alapján az alakzat pontjait osztályokba sorolhatjuk: egy osztályba tartoznak az egymással összeköthető pontok. Az osztályok az *alakzat komponensei.*

Ha csak egy ilyen komponens van, az *alakzat (poligonálisan) összefüggő.*

Egy konvex sokszögvonal a sík pontjait az előbbiek értelmében is *két osztályba sorolja,* azaz *két részre osztja.*

A **230.** *feladat kérdését így fogalmazhatjuk meg:* n darab konvex k-szögvonalat a síkból elhagyva, maximálisan hány komponensű alakzat keletkezik?

Egy egyszerű (önmagát nem metsző) zárt töröttvonalat *sokszögvonalnak* nevezünk. *A sokszögvonal a síkot két részre osztja* — az egyik tartalmaz egyenest, ez a sokszög külseje, a másik nem tartalmaz egyenest, ez a sokszög belseje.

A *P pont környezetének* nevezzük egy olyan konvex sokszög belsejét, mely a P-t belsejében tartalmazza.

Az *A pont a sík X ponthalmazára nézve torlódási pont* (röviden: A az X torlódási pontja), ha A bármely környezete tartalmaz X-hez tartozó, A-tól különböző pontot (lehetséges, hogy $A \in X$, de az is lehet, hogy $A \notin X$).

Tekintsük a síkban az alábbi T ponthalmazt és ennek H részhalmazát. T (zárt) *tartomány és H a határa,* ha teljesülnek a következő feltételek:

1. Ha egy P pont a T-nek H-hoz nem tartozó pontja, akkor P-nek van olyan környezete, amely csupa T-hez tartozó, de H-hoz nem tartozó pontokból áll.
2. Ha P nem tartozik a T-hez, akkor van olyan környezete, amely T egyetlen pontját sem tartalmazza.
3. Ha a P pont H-hoz tartozik, akkor bármely környezete tartalmaz T-hez nem tartozó pontot, valamint T-hez tartozó, de H-hoz nem tartozó pontot is.

A teljes sík is tartomány, a határa üres alakzat, a félsík és határegyenese, a sokszögtartomány és határvonala rendelkezik a fenti tulajdonságokkal.

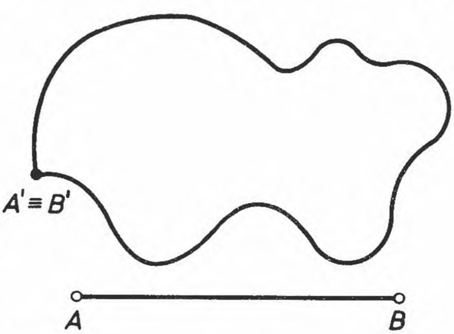
Hasonlóan beszélhetnénk a *pont környezetéről,* egy *ponthalmaz torlódási pontjáról, konvex tartományokról* az egyenesen, illetve a térben.

A szakasz topologikus képét (a síkban síkbeli) *Jordan-görbének* nevezzük. Ez azt jelenti, hogy ha P és Q a szakasz tetszőleges különböző pontjai, akkor képeik, P' és Q' is különböznek (a leképezés egy-egy értelmű), továbbá P' tetszőleges környezetéhez van P-nek olyan környezete, hogy ez utóbbi pontjainak képei P' kiszemelt környezetében vannak (a leképezés folytonos), végül P tetszőleges környezetéhez van P'-nek olyan környezete, hogy e környezetnek a képhalmazhoz tartozó pontjaira a pontok ősei P kiszemelt környezetébe essenek (a leképezés inverze is folytonos).

Megmutatható, hogy az egyszerű töröttvonal *Jordan-görbe.*

Ennek alapján általánosíthatjuk az alakzatok poligonális összefüggését, *Jordan*-görbék segítségével értelmezhetjük az alakzatok *(ív szerinti) összefüggését*, az alakzatok komponenseit. (Pl. a körvonal ív szerint összefüggő, poligonálisan viszont nem összefüggő.)

Zárt Jordan-görbéről beszélünk, ha a többi követelmény értelemszerű megtartása mellett a szakasz végpontjainak képe azonos *(191. ábra).*



191. ábra

Jordan tétele: A síkot egy zárt Jordan-görbe két részre osztja: egy külső és egy belső tartományra, mindegyiknek a görbe a határa (a külső rész tartalmaz egyenest, a belső nem).

Egy belső pontot is tartalmazó síkbeli (zárt) tartományt *egyszeresen összefüggőnek* nevezünk, ha (ív szerint) összefüggő, továbbá bármely, határponttól határpontig a tartomány belsejében haladó *Jordan*-görbe felbontja komponensekre.

A *Jordan*-tételben fellépő mindkét tartomány egyszeresen összefüggő.

Ezzel rámutattunk a **230.** feladat általánosítási lehetőségeire is. Például n darab zárt *Jordan*-görbe maximálisan hány részre osztja a síkot, ha két görbének legfeljebb $2k$ metszéspontja lehet? Eredményünk ugyanaz, mint az eredeti feladatban.

Mellékeredmény: n darab kör a síkot maximálisan $n(n-1)+2$ részre bontja ($k=1$).

Hasonló kérdések felvethetők nemcsak a síkban, hanem más felületeken is. Például a mentőöv alakú tóruszon a *Jordan*-tétel nem igaz. Többek között ilyen kérdésekkel foglalkozik a geometria egyik viszonylag fiatal ága, a topológia [2].

28. A sík és a tér egybevágósági transzformációi és ezek előállítása tükrözések kompozíciójával

A szakaszok egyenlőségének ismeretére támaszkodva, definiálhatjuk a síknak (esetleg más) *síkra történő azon leképezéseit* (transzformációit), *melyeknél a tetszőleges A és B pontok A', illetve B' képeire $AB=A'B'$, azaz a leképezés távolságtartó. Ezeket a leképezéseket egybevágóságoknak nevezzük.*

Az egybevágósági axiómák alapján igazolható a következő tétel: Ha megadunk a síkban egy félsíkot és ennek határán egy félegyenest, továbbá (esetleg egy másik síkban) *egy másik félsíkot és annak határán egy félegyenest, akkor egy és csak egy olyan egybevágóság van, amely az adott félsíkot és az ennek határán adott félegyenest a másik adott félsíkba és az annak határán adott félegyenesbe viszi át (192. ábra).*

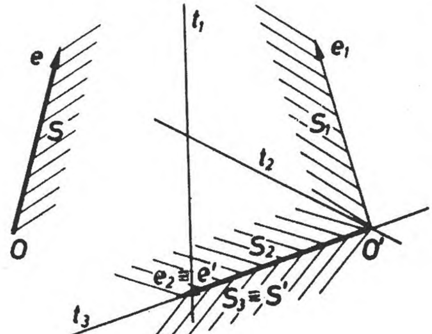
Továbbá, az egybevágósági transzformáció szögtartó, megtartja az illeszkedést és az elválasztást is (tehát egyenes képe egyenes, szakasz képe szakasz stb.). A fenti tételek a „merev" síklap mozgásának a szemlélet alapján jól ismert tulajdonságait mondják ki. (Középiskolai szinten ezek a tételek axiómák, s belőlük vezetjük le a szakaszok és szögek egyenlőségének fogalmát).

A függvények kompozíciójának művelete a geometriai transzformációkra is alkalmazható, hiszen a transzformáció is függvény *(23. jegyzet).*

Világos, hogy két egybevágóság egymás utáni végrehajtásával (kompozíciójával) ismét egybevágósághoz jutunk (ha AB képe az első leképezésnél $A'B'$, $A'B'$ képe a második leképezésnél $A''B''$, akkor $AB=A'B'$, $A'B'=A''B''$, tehát $AB=A''B''$).

Könnyen ellenőrizhető, hogy a síkot önmagára képező egybevágóságok a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, a sík egybevágóságcsoportját *(1., 23. jegyzet).* A csoport egységeleme az **I** azonos leképezés, amely minden ponthoz önmagát rendeli. Az egybevágóságcsoportban alapvető szerepet játszanak az egyenesre vonatkozó tükrözések — röviden egyenestükrözések —, amelyek *involutív* (vagy másodrendű) *leképezések,* azaz ha **e** egyenestükrözés, akkor $\mathbf{ee}=\mathbf{I}$ *(193 a ábra).*

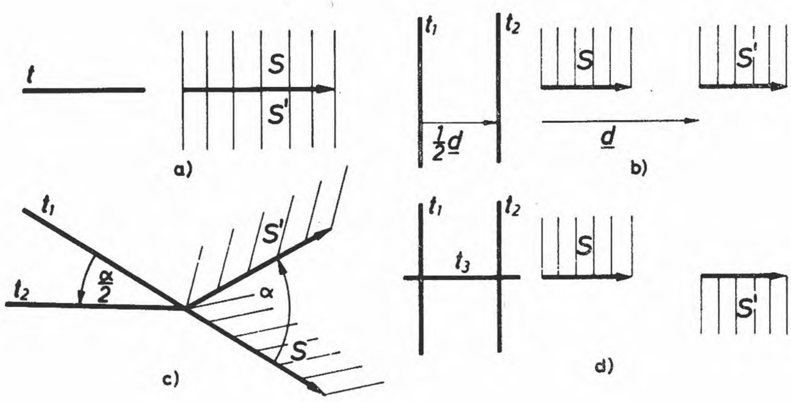
Minden egybevágóság előállítható legfeljebb 3 egyenestükrözés kompozíciójával. A *192. ábrán* megadott O pontot, e félegyenest és S félsíkot a megadott O', e', S' alakzatba $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$ egyenestükrözések ebben a sorrendben vett kompozíciója, a $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3$ viszi. A $\mathbf{t}_1$ az O-t viszi O'-be, e, S képe e_1, S_1; $\mathbf{t}_2$ az e_1-et viszi e'-be, O' helyben marad, S_1 képe S_2; $\mathbf{t}_3$ az S_2-t viszi S'-be, O', e' helyben marad. Ha pl. $O\equiv O'$, akkor a $\mathbf{t}_1$ tükrözésre persze nincs szükség, esetleg $\mathbf{t}_2$ és $\mathbf{t}_3$ is elmaradhat.



192. ábra

Az azonos leképezésen kívül a síkban négyféle egybevágóság van (193. ábra).

1. *Egyenestükrözés: (193/a ábra)*



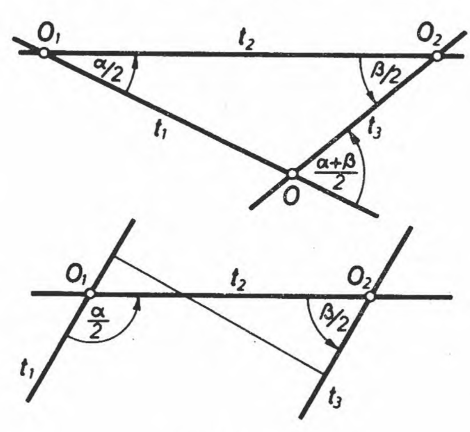
193. ábra

2. *Eltolás:* Két tükrözéssel helyettesíthető, a t_1 és t_2 tengelyek az eltolás irányára merőlegesek, (irányított) távolságuk az eltolás távolságának a fele — helyzetük egyébként tetszőleges *(193/b ábra).*

3. *Forgatás:* Két tükrözéssel helyettesíthető, a t_1 és t_2 tengelyek a középpontra illeszkednek, és (irányított) szögük az elforgatás szögének a fele, helyzetük egyébként tetszőleges *(193/c ábra).*

4. *Eltolás tükrözés* (három egyenestükrözés szükséges, ezek mindig megválaszthatók úgy, hogy közülük kettő a harmadikra merőleges legyen, *193/d ábra*).

A tükrözés megváltoztatja a sík irányítását. *Az azonosság, az eltolások és a forgatások megtartják az irányítást, ezek alkotják a sík mozgáscsoportját,* mely az egybevágóságcsoport részcsoportja. Az *azonosság és az eltolások* a mozgáscsoporton belül is egy *részcsoportot alkotnak* (két eltolás kompozíciója is eltolás), mégpedig ez a *részcsoport kommutatív.*



194. ábra

A **127—133.** feladatok megoldásában ezek a transzformációk fontos szerepet játszottak. A **132.** feladatban a tükrözések kompozíciója különösen szép megoldáshoz vezetett. Felhasználtuk a következő tételt:

Az O_1 középpontú, α irányított szögű elforgatás és az O_2 középpontú, β irányított szögű elforgatás kompozíciója

a) *O* középpontú, $\alpha+\beta$ irányított szögű *elforgatás*, ha $\alpha+\beta \neq k\ 360°$;

b) *eltolás*, ha $\alpha+\beta=k\ 360°$.

A bizonyítás, az *O* pont szerkesztése, illetve az eltolás nagyságának és irányának meghatározása is leolvasható a *194. ábráról:* $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2$ az első elforgatás, $\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3$ a második elforgatás, $\mathbf{t}_1\mathbf{t}_2\mathbf{t}_2\mathbf{t}_3=\mathbf{t}_1\mathbf{t}_3$ a két elforgatás kompozíciója.

Előbbi gondolatmenetünket a térben is követhetjük. Alaptételünk most így szól: *Ha megadunk a térben egy félteret, ennek határán egy félsíkot, ennek határán egy félegyenest* (röviden *zászlóalakzatot*), *továbbá egy másik* (az előzőtől nem feltétlenül különböző) *zászlóalakzatot, akkor pontosan egy olyan egybevágóság létezik, mely az első zászlóalakzatot a másodikba viszi át.*

A tér egybevágóságai a kompozíció műveletével csoportot alkotnak. Az **I** azonos leképezés a csoport egységeleme. Az *egybevágóságcsoport*ban minden elem előállítható mint legfeljebb 4 *síktükrözés* kompozíciója. Itt a síktükrözés, azaz a síkra történő tükrözés az alaptétel alapján a következőképpen jellemezhető: Az egyik zászlóalakzat a Σ-val jelölt sík által határolt egyik féltérből, a Σ-ban tetszőlegesen felvehető félsíkból és ennek határán felvett félegyenesből áll, a másik zászlóalakzat a Σ által határolt másik féltérből, de az előbbi félsíkból és félegyenesből áll. Az alaptétel alapján egyértelműen létező és $\mathbf{\Sigma}$-val jelölt egybevágóságnál Σ minden pontja fixpont, Σ sík által határolt félterek pedig felcserélődnek.

Az azonos leképezésen kívül a térben hatféle egybevágóság van:

1. *Síktükrözés*

2. *Eltolás:* Két síktükrözéssel helyettesíthető, a Σ_1 és Σ_2 tükörsíkok az eltolás irányára merőlegesek, (irányított) távolságuk az eltolás távolságának a fele — helyzetük egyébként tetszőleges.

3. *Forgatás:* Két síktükrözéssel helyettesíthető, a Σ_1 és Σ_2 tükörsíkok a forgatás tengelyére illeszkednek, és (irányított) szögük a forgatás szögének a fele — helyzetük egyébként tetszőleges.

4. *Eltolástükrözés:* Három síktükrözés kompozíciójaként áll elő: $\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_3$, itt a Σ_1 és Σ_2 tükörsíkok párhuzamosak, a Σ_3 tükörsík mindkettőre merőleges.

5. *Forgatástükrözés:* Három síktükrözés kompozíciója: $\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_3$, itt a Σ_1 és Σ_2 tükörsíkok a Σ_3 tükörsíkra merőleges egyenesben metszik egymást. A leképezés egyetlen fixpontja a három sík közös pontja.

6. *Csavarmozgás* vagy *forgatáseltolás:* Négy síktükrözés kompozíciója: $\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_3\mathbf{\Sigma}_4$, itt a Σ_1 és Σ_2 tükörsíkok olyan egyenesben metszik egymást, mely a Σ_3 és Σ_4 tükörsíkok mindegyikére merőleges.

Az egybevágóságcsoportban háromféle involutív (vagy másodrendű) leképezés van: a $\mathbf{\Sigma}$ *síktükrözés;* az **e** *egyenestükrözés,* ez 180° szögű elforgatás az *e*

egyenes körül, mely a Σ_1 és Σ_2 egymásra merőleges tükörsíkok metszésvonala: $\mathbf{e}=\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_2=\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_1$; a **P** *ponttükrözés,* ez speciális forgatástükrözés, amikor a Σ_1, Σ_2, Σ_3 tükörsíkok páronként merőlegesen a P pontban metszik egymást: $\mathbf{P}=\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_3=\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_3=\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_3\mathbf{\Sigma}_1=\mathbf{\Sigma}_3\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_1$.

A fenti osztályozásnál is felhasználható a *három tükrözés tétele: A* $\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_3$ *kompozíció egyetlen* $\mathbf{\Sigma}$ *síktükrözés, ha a* Σ_1, Σ_2, Σ_3 *tükörsíkok egy egyenesre illeszkednek vagy egy egyenesre merőlegesek.*

A síktükrözés megváltoztatja a tér irányítását, az azonosság, az eltolások, forgatások és csavarmozgások *megtartják az irányítást,* ezek alkotják a tér *mozgáscsoportját,* mely az egybevágóságcsoport részcsoportja. A mozgáscsoport elemei páros számú síktükrözés kompozíciójaként állíthatók elő. Sőt igaz az alábbi tétel: *Minden mozgás előáll legfeljebb két egyenestükrözés kompozíciójaként. Ezek közül az első egyenes választható úgy, hogy előre adott ponton haladjon át.* Ennek a tételnek a bizonyítását feladatként az olvasóra bízzuk.

Azok az egybevágóságok, melyeknél egy rögzített O pont fixpont, az O középpontú gömbök bármelyikének egybevágóságcsoportját alkotják. A *gömbi egybevágóságcsoport* bármely eleme legfeljebb három síktükrözés kompozíciója. Ennek részcsoportja a *gömbi mozgáscsoport,* mely az azonosságon kívül forgatásokat tartalmaz.

Az olvasóra bízzuk, hogy a tér egybevágóságcsoportjában további részcsoportokat keressen.

Végül egy szép feladat: *Az a és b kitérő egyenesekhez adjuk meg azokat az f forgástengelyeket, melyek körül adott* ω *szöggel forgatva, az a egyenes a b egyenesbe jut. Mi a megoldhatóság feltétele?*

29. A sík hasonlósági transzformációi

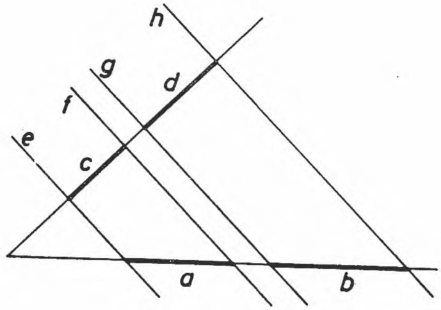
Legyen λ tetszőleges pozitív valós szám. A síknak (esetleg másik) síkra történő olyan leképezését, amelynél a tetszőleges *AB szakaszra és A'B' képére* $A'B'=\lambda\cdot AB$, λ *arányú hasonlóságnak nevezzük.*

Az egybevágóságok $\lambda=1$ arányú hasonlóságok is.

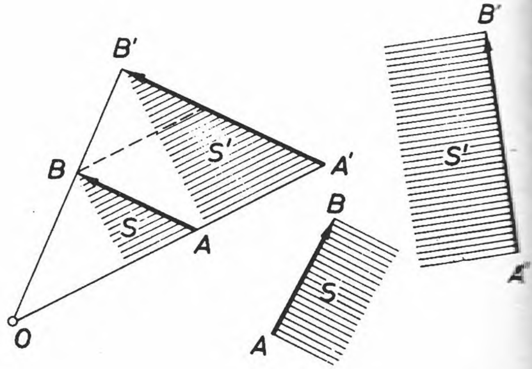
Nem magától értetődő, hogy létezik $\lambda\neq 1$ arányú hasonlóság. Ebben alapvető szerepet játszik a párhuzamos szelők tétele és annak megfordítása. Ezt több feladat megoldásában is felhasználtuk. (Ha $e \parallel f \parallel g \parallel h$, akkor $a:b=c:d$. Ha $e \parallel f \parallel g$, és a *195. ábra* szerinti helyzetben $a:b=c:d$, akkor $h \parallel g$).

Ha a sík O pontjához önmagát rendeljük, egy tetszőleges A ponthoz pedig az OA félegyenesnek azt az A' pontját, melyre $OA'=\lambda\cdot OA$, akkor tetszőleges

AB szakaszra és $A'B'$ képére $A'B' = \lambda AB$ és $A'B' \parallel AB$. A fenti leképezést λ arányú középpontos hasonlóságnak (homotécia) nevezzük, O a középpont *(196. ábra)*.



195. ábra



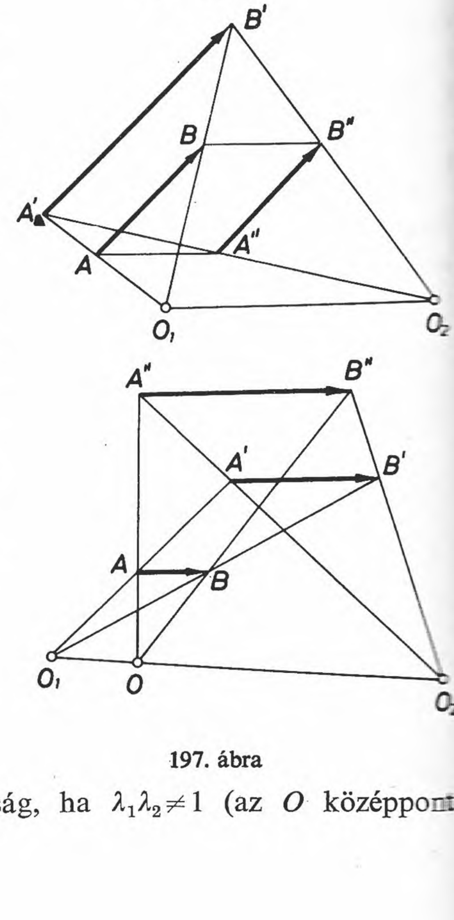
196. ábra

A síkot önmagára képező hasonlóságok a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak: a *sík hasonlóságcsoportját*. Az egybevágóságcsoport ennek részcsoportja.

A hasonlóságok szögtartó leképezések, ebből már következik, hogy az illeszkedést és a rendezést is megtartják.

A hasonlóságok osztályozásánál alapvető a következő tétel: *Ha megadunk a síkban egy S félsíkot és ennek határán az AB szakaszt, továbbá* (esetleg egy más síkban) *egy S' félsíkot és ennek határán az $A'B'$ szakaszt, akkor egy és csak egy olyan hasonlóság van, amely A-hoz A'-t, B-hez B'-t, S pontjaihoz S' pontjait rendeli, s a hasonlóság aránya* $\lambda = \frac{A'B'}{AB}$ *(196. ábra).*

Ennek alapján könnyen bebizonyítható, hogy az O_1 középpontú, λ_1 arányú és az O_2 középpontú, λ_2 arányú középpontos hasonlóságok kompozíciója



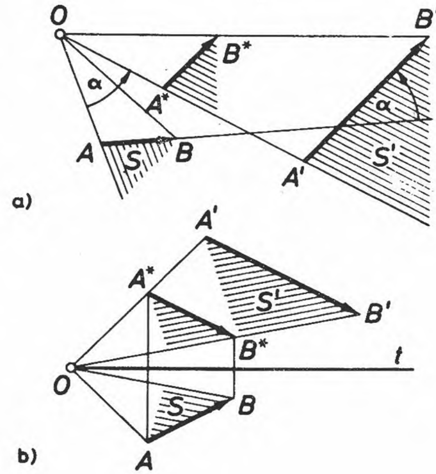
197. ábra

a) $\lambda = \lambda_1 \lambda_2$ arányú középpontos hasonlóság, ha $\lambda_1 \lambda_2 \neq 1$ (az O középpont az $O_1 O_2$ egyenesen van, *197. ábra)*;

b) eltolás, ha $\lambda_1\lambda_2=1$ (az eltolás iránya O_1O_2-vel párhuzamos). Ezt felhasználtuk a **137.** és **207.** feladatban.

Bebizonyítható továbbá, hogy az egybevágóságokon és a középpontos hasonlóságon kívül még kétfajta hasonlóság van:

a) *a forgatásnyújtás* (azonos középpontú elforgatás és középpontos hasonlóság kompozíciója, *198/a ábra)*, ekkor a leképezés irányítástartó (**184.** feladat);



198. ábra

b) *a tükrözésnyújtás* (egyenestükrözés és középpontos hasonlóság kompozíciója, ahol az utóbbi középpontja illeszkedik az előbbi tengelyére, *198/b ábra*), ekkor a leképezés megváltoztatja az irányítást (**185.** feladat).

Az olvasóra bízzuk a tér hasonlóságcsoportjának áttekintését. Mutassuk meg, hogy egy 1-től különböző arányú hasonlóságnak mindig van fixpontja.

30. A sík affin transzformációi

A síknak (esetleg egy másik) *síkra történő egy-egy értelmű egyenestartó leképezését affinitásnak nevezzük.* A síkot önmagára képező affinitások a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, a sík affinitáscsoportját.

Világos, hogy a hasonlóságcsoport az affinitáscsoport részcsoportja, hiszen a hasonlóságok is egy-egy értelmű egyenestartó leképezések. A *199. ábrán* szemléltetjük, hogy van olyan affinitás, ami nem hasonlóság.

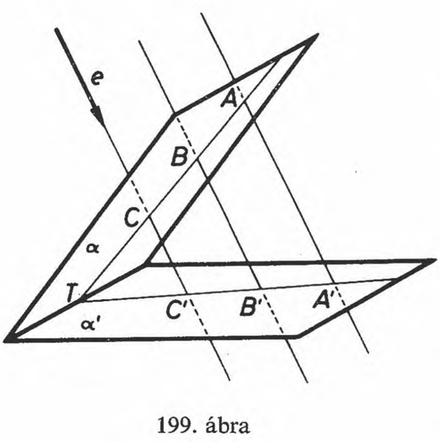
Tekintsük az egymást metsző α és α' síkokat, továbbá a mindkettőt metsző e egyenest. Az α síkot az e egyenessel párhuzamosan az α' síkra vetítjük, azaz $e \parallel AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel \ldots$.

Különösen fontos a következő tétel:

Ha megadjuk a síkban a nem kollineáris A, B, C pontokat, továbbá (esetleg egy másik síkban) *a nem kollineáris A', B', C' pontokat, akkor egy és csak egy olyan affinitás van, amely az A, B, C pontokhoz rendre az A', B', C' pontokat rendeli* (*200. ábra.* Az $ABX = A'B'X'$ és $CXP = C'X'P'$ osztóviszonyokkal P-ből P' meg is szerkeszthető).

Egy egyenes A, B, C (különböző) pontjainak osztóviszonyát, az (ABC) valós számot így definiáljuk:

$$(ABC) = \frac{AC}{CB},$$ ahol AC és CB a megfelelő irányított szakaszok előjeles hossza.

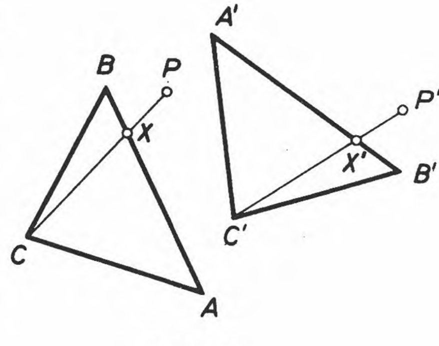


199. ábra

Az affinitás osztóviszonytartó leképezés, azaz a kollineáris A, B, C pontok A', B', C' képeire $(ABC) = (A'B'C')$.

Ebből az is következik, hogy az affinitás területarány-tartó (a térbeli affinitás térfogatarány-tartó) leképezés, megtartja az egyenes pontjainak elrendezését.

Megmutatható, hogy a kör affin képe ellipszis, sőt minden ellipszis tekinthető egy forgáshenger síkmetszetének.



200. ábra

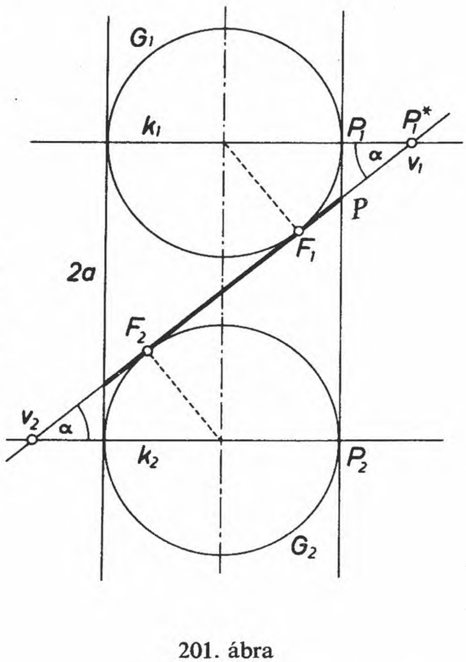
Ez az észrevétel kapcsolódik a **192.** feladathoz. Tegyük fel, hogy az S metsző sík $90°-\alpha$ szöget zár be a henger forgástengelyével. A hengerbe két *Dandelin*-gömböt csúsztattunk; a G_1 gömb az F_1 pontban érinti a síkot, k_1 körben a hengert; a G_2 gömb az F_2 pontban érinti a síkot, k_2 körben a hengert. A k_1 kör síkja v_1, a k_2 kör síkja v_2-ben metszi a metszősíkot. A k metszetgörbe tetszőleges P pontjára (a *201. ábrá*tól függetlenül)

$$PF_1+PF_2=PP_1+PP_2=P_1P_2=2a$$
(állandó),

hiszen a gömbhöz külső pontokból húzott érintőszakaszok egyenlők, a k_1 és k_2 körök közti alkotók egyenlők. A k metszetgörbe pontjai F_1, F_2 fókuszú $2a$ nagytengelyű ellipszisen vannak.

v_1 és v_2 az F_1, illetve F_2 fókuszokhoz tartozó vezéregyenesek, azaz ha P-ből pl. a v_1 egyenesre PP_1^* merőlegest állítunk, akkor

$$PF_1 : PP_1^* = PP_1 : PP_1^* = \sin\alpha \ (<1)$$
állandó.



201. ábra

Affin transzformációval az osztóviszonyokra, a terület- és térfogatarányokra vonatkozó tételek általánosíthatók, így a **161.** és **193.** feladatokban is több kikötés elhagyható. A **140.**, **141.**, **187.** feladatok állítása — a többi feltétel értelemszerű megtartása mellett — kör helyett ellipszisre is megfogalmazható.

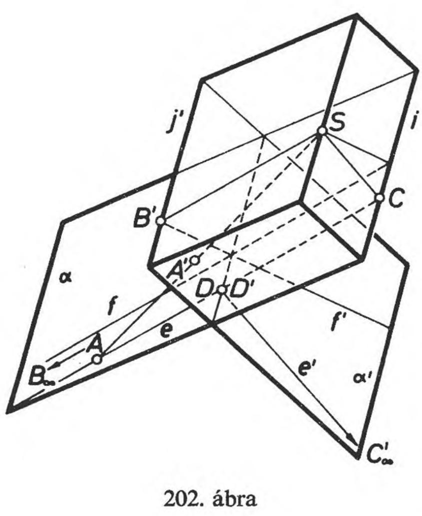
31. Az ideális elemekkel bővített sík projektív transzformációi

Ha az α és α' síkok metszik egymást, és az S pont egyikükre sem illeszkedik, akkor az α síkot az S-ből az α' síkra vetíthetjük, azaz az α sík tetszőleges A pontjához az α' síknak azt az A' pontját rendeljük, mely az SA egyenesen van *(202. ábra)*.

Így egyenestartó leképezéshez jutottunk, de vannak kivételes pontok és egyenesek. A *202. ábrán* az α sík i egyenesének pontjait α'-vel párhuzamos sugarak vetítik, i tetszőleges C pontjának nincsen képe az α' síkban. Az α' sík j' egyenesének pontjait viszont α-val párhuzamos sugarak vetítik, j' tetszőleges B' pontjának nincs őse az α síkban.

Hogy ezeket a kivételeket megszüntessük, a térben új alapelemeket: *ideális (végtelen távoli) pontokat, ideális egyeneseket* és egy *ideális síkot* vezetünk be:

A tér minden egyeneséhez egy ideális pontot csatolunk, a párhuzamos egyenesekhez ugyanazt az ideális pontot csatoljuk. Az egy síkban levő egyenesek ideális pontjai alkotják a sík ideális egyenesét, párhuzamos síkokhoz ugyanaz az ideális egyenes tartozik. Az ideális pontok alkotják az ideális síkot, ennek egyenesei az ideális egyenesek. Hogy az ideális elemektől elkülönítsük ezeket, a régi pontokat, egyeneseket, síkokat közönségesnek nevezzük. A közönséges és ideális pontok alkotják a projektív teret, ennek síkjai a projektív síkok, egyenesei projektív egyenesek ([6] 44. §).

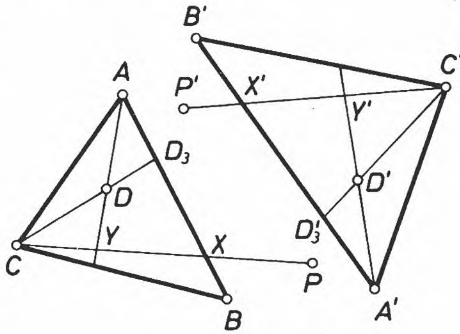


202. ábra

A *202. ábrán* látható vetítés az α projektív síkot egy-egy értelműen képezi le az α' projektív síkra (az α sík i egyenesének C pontjához az α' sík i'_∞ ideális egyenesének C'_∞ ideális pontját rendeljük, az α' sík j' egyenesére illeszkedő B' pontjának az őse az α sík j_∞ ideális egyenesének B_∞ pontja), s a leképezés egyenestartó.

A projektív síknak (esetleg más) *projektív síkra történő egy-egy értelmű egyenestartó leképezését projektivitásnak* (projektív kollineáció) *nevezzük.*

A projektív síkot önmagára képező projektivitások a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak: a projektív sík projektivitáscsoportját. A sík affinitásait olyan projektivitásoknak tekintjük, amelyekkel ideális pont képe ideális pont, tehát az ideális egyenes önmagára képeződik. Ebben az értelmezésben azt mondhatjuk, hogy az affinitáscsoport a projektivitáscsoport részcsoportja.



203. ábra

A *202. ábra* példája mutatja, hogy van olyan projektivitás, ami nem affinitás.

Különösen fontos a következő tétel: *Ha megadjuk a projektív síkban a háromanként nem kollineáris A, B, C, D, továbbá* (esetleg egy másik síkban) *a háromanként nem kollineáris A', B', C', D' pontokat, akkor egy és csak egy olyan projektivitás van, amely az A, B, C, D pontokhoz rendre az A', B', C', D' pontokat rendeli (203. ábra).* (Az $(ABD_3X)=(A'B'D_3'X')$ és $(CXYP)=(C'X'Y'P')$ kettősviszonyokkal *(32. jegyzet)* *P*-ből *P'* meg is szerkeszthető).

32. Kettősviszony, projektív pontsorok és sugársorok, Papposz — Steiner-tétel

Egy közönséges egyenes *A, B, C, D* (különböző) közönséges pontjainak kettősviszonyát, az $(ABCD)$ valós számot így definiáljuk:

$$(ABCD)=\frac{AC\cdot DB}{CB\cdot AD},$$ ahol a jobb oldalon a megfelelő irányított szakaszok előjeles hossza szerepel.

A közönséges pontra illeszkedő *a, b, c, d* egyenesek $(abcd)$ kettősviszonyának értelmezése:

$$(abcd)=\frac{\sin(ac)\cdot\sin(db)}{\sin(cb)\cdot\sin(ad)}$$ (irányított szögekkel).

E definíciók célszerűségét mutatja, hogy érvényes a *Papposz—Steiner*-tétel ([6] 45. §):

Ha az a, b, c, d egyenesek az E közönséges pontra illeszkednek, és ezeket egy E-re nem illeszkedő tetszőleges e egyenes rendre az A, B, C, D közönséges pontokban metszi, akkor

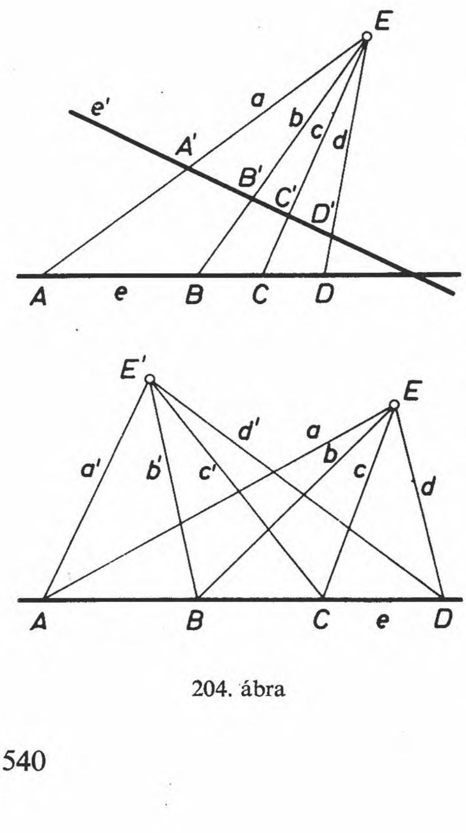
$$(abcd)=(ABCD).$$

Bebizonyítható, hogy a kettősviszony fogalma ideális elemekre is kiterjeszthető úgy, hogy a *Papposz—Steiner*-tétel érvényben maradjon. Érvényesek a következő tételek: *Ha a projektív sík tetszőleges E pontján áthaladó a, b, c, d egyeneseket az E-re nem illeszkedő e és e' egyenesek az A, B, C, D, illetve A', B', C', D' pontokban metszik, akkor*

$$(ABCD)=(A'B'C'D').$$

Ha a projektív sík tetszőleges e egyenesére illeszkedő A, B, C, D pontokra az e-re nem illeszkedő E és E' pontokon áthaladó a, b, c, d, illetve a', b', c', d', egyeneseket illesztünk, akkor

$$(abcd)=(a'b'c'd').$$



204. ábra

Ilyenkor azt mondjuk, hogy az A, B, C, D és A', B', C', D' pontsorok az E pontra nézve perspektívek, az a, b, c, d és a', b', c', d' sugársorok az e egyenesre nézve perspektívek *(204. ábra)*.

Általánosabban igaz a következő tétel:

A projektivitás kettősviszonytartó leképezés. Ha egy projektivitás az e egyenes A, B, C pontjaihoz rendre az e' egyenes A', B', C' pontjait rendeli, akkor az e egyenes D pontjához az e' egyenesnek azt az egyértelműen meghatározott D' pontját rendeli, melyre

$$(ABCD)=(A'B'C'D').$$

Ha egy projektivitás az E tartópontú sugársor a, b, c egyeneseihez rendre az

E' tartópontú sugársor a', b', c' egyeneseit rendeli, akkor az E sugársor d egyeneséhez az E' sugársornak azt az egyértelműen meghatározott d' egyenesét rendeli, melyre

$$(abcd) = (a'b'c'd').$$

Ennek megfelelően beszélünk projektív pontsorokról és projektív sugársorokról. Speciálisan a perspektív pontsorok és sugársorok is projektívek.

Tétel: *Az e és e' projektív pontsorok akkor és csak akkor perspektívek, ha e és e' metszéspontja önmagának felel meg, az E és E' projektív sugársorok akkor és csak akkor perspektívek, ha a közös EE' egyenes önmagának felel meg.*

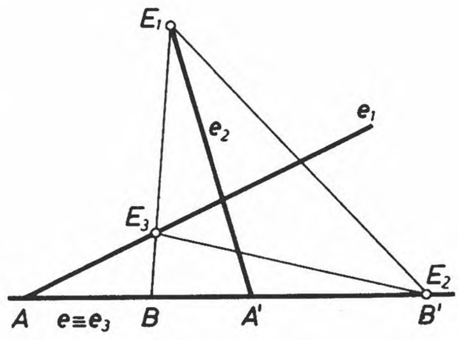
Erre a tételre gyakran mint *alaptételre* fogunk hivatkozni.

Az eddigi és az ezután következő tételekben is megfigyelhetjük a **dualitás elvének** érvényesülését.

Minden olyan síkalakzatra vonatkozó tétel, amelyben csupán pont, egyenes, illeszkedés (metszés, összekötés) szerepel, átírható egy újabb helyes tételre úgy, hogy pont helyett egyenest, egyenes helyett pontot, illeszkedés helyett ismét illeszkedést (összekötést, metszést) írunk. A továbbiakban egy tétel és duálisa közül csak az egyiket fogalmazzuk meg.

33. Az egyenes projektív involúciója, harmonikus négyes, teljes négyszög

Az e egyenes önmagára történő projektív leképezését involúciónak nevezzük, ha önmagával képezett kompozíciója az azonos leképezés. Tehát, ha tetszőleges X képe X', akkor X' képe X, vagy más szavakkal: a leképezés megegyezik az inverzével. A *205. ábra* is mutatja, hogy ha az e önmagára történő projektív leképezésnél A képe A', A' képe A és B képe B', akkor B' képe — amit az előbbi három pontpár már meghatároz — éppen B. Ugyanis e-t E_1-ből e_1-re, majd e_1-et E_2-ből e_2-re, majd e_2-t E_3-ból $e_3 \equiv e$-re vetítve, végül is A képe A', A' képe A, B képe B' és B' képe éppen B lesz.



205. ábra

Például az e egyenes pontjainak az egyenes O pontjára történő tükrözése felfogható olyan involúciónak, melynél O és az egyenes ideális pontja önmagának felel meg, tehát két fixpont van.

Az e egyenes két fixponttal rendelkező involúcióját *harmonikus involúciónak* is mondjuk. Ha F_1 és F_2 a fixpontok *(206. ábra)*, az X pont X' képét már egyértelműen meghatározhatjuk csupán vonalzó segítségével, csak a *206. ábrát* kell előállítanunk. Itt ugyanis A_1-ből vetítve, az F_1, F_2, X, X' pontoknak F_3, F_2, A_4, A_2, majd A_3-ból vetítve, ezeknek F_1, F_2, X', X felel meg: a két vetítés kompozíciója involúció.

Ha speciálisan F_2 ideális pont, akkor az egyenes F_1-re vonatkozó tükrözését kapjuk, és X tükörképe csupán vonalzóval szerkeszthető, s ez szoros kapcsolatban van a **206.** feladattal, azt újra indokolja *(206/b ábra)*.

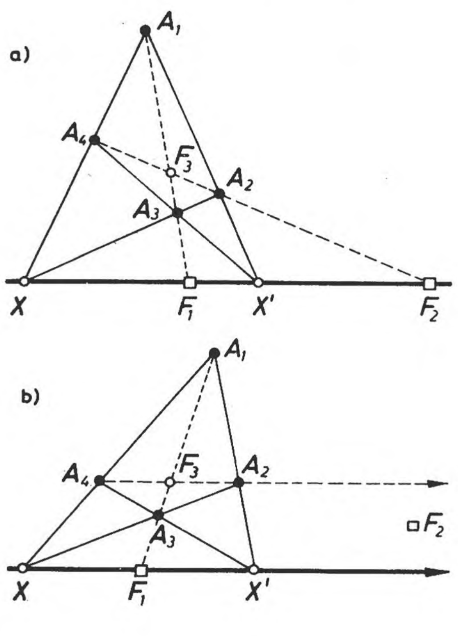
A kettősviszony definícióját is felhasználva *(32. jegyzet)* adódik, hogy

$$(F_1F_2XX')=(F_1F_2X'X)=\frac{1}{(F_1F_2XX')}=-1.$$

Ilyenkor mondjuk, hogy az F_1, F_2, X, X' pontok harmonikus négyest alkotnak.

A *206. ábrán* az $A_1A_2A_3A_4$ négyszög teljes négyszög. A csúcsok összekötésével ennek 6 oldalát kapjuk meg. A szemköztes oldalak metszéspontjai az X, X', F_3 átlós pontok. Az átlós pontokat összekötő 3 egyenes pedig átló. Az egyenesen három ponthoz teljes négyszög segítségével könnyű olyan negyedik pontot szerkeszteni, hogy a négy pont harmonikus négyest alkosson *(206. ábra)*. Speciálisan harmonikus négyest alkot két pont, a felezőpontjuk és az illető egyenes ideális pontja.

A dualitás elvének megfelelően beszélhetünk egy sugársor involúciójáról is.



206. ábra

34. Desargues perspektív háromszögekre vonatkozó tétele

Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy O pontra nézve perspektívek, ha az AA', BB', CC' egyenesek az O ponton, az ún. centrumon mennek át. Az ABC és $A'B'C'$ háromszögek egy o tengelyre nézve perspektívek, ha az AB és $A'B'$, BC és $B'C'$, CA és $C'A'$ egyenesek páronkénti metszéspontjai az o egyenesen vannak.

A projektív geometriában alapvető szerepet játszik *Desargues tétele:*

Két háromszög pontra nézve akkor és csak akkor perspektív, ha egyúttal tengelyre nézve is az.

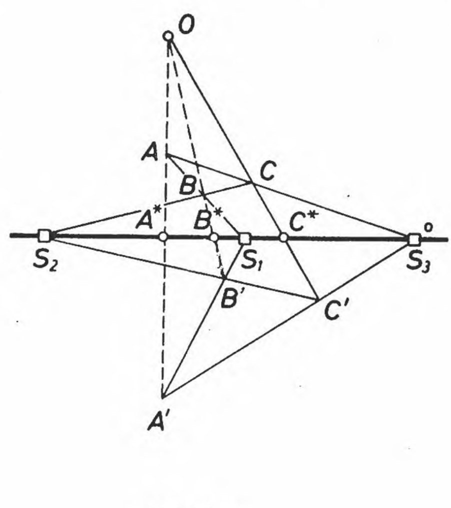
A bizonyítás vetítések egymásutánjával, a projektív geometria alaptételének felhasználásával történik. (A tétel önmaga duálisa, elegendő, ha csak az egyik részét igazoljuk *(207. ábra)*.

Tegyük fel, hogy az ABC és $A'B'C'$ háromszögek az O pontra nézve perspektívek, AB és $A'B'$ metszéspontja legyen S_1, BC és $B'C'$ metszéspontja S_2. Megmutatjuk, hogy az $S_1S_2=o$ egyenesre AC és $A'C'$ S_3 metszéspontja is illeszkedik.

Az $OAA'=a$, $OBB'=b$, $OCC'=c$ egyenesnek o-val való metszéspontjait rendre A^*, B^*, C^* jelölje.

a-t S_1-ből b-re vetítve, O, A, A^*, A' képe O, B, B^*, B'; b-t S_2-ből c-re vetítve, O, B, B^*, B' képe O, C, C^*, C'. A kettő kompozíciója projektív leképezés, melynél O, A, A^*, A' képe O, C, C^*, C'. O képe önmaga, ezért a két pontsor perspektív: AC, $A'C'$ és $A^*C^*=o$ az S_3 pontra illeszkedik.

A *Desargues*-tétel alkalmazásával a **112., 113., 133., 168., 213.** feladatok perspektív háromszögeihez fűzhetünk észrevételeket.



207. ábra

35. Forgáskúp síkmetszetei

Megmutatható, hogy a kör projektív képe ellipszis, hiperbola vagy parabola, sőt ezek mindig egy forgáskúp síkmetszetének is tekinthetők. Ehhez a következő észrevételeket fűzzük.

Tegyük fel, hogy az S metszősík $90° - \alpha$ szöget zár be a kúp tengelyével, a kúpalkotók pedig $90° - \beta$ szöget *(208—210. ábra)*.

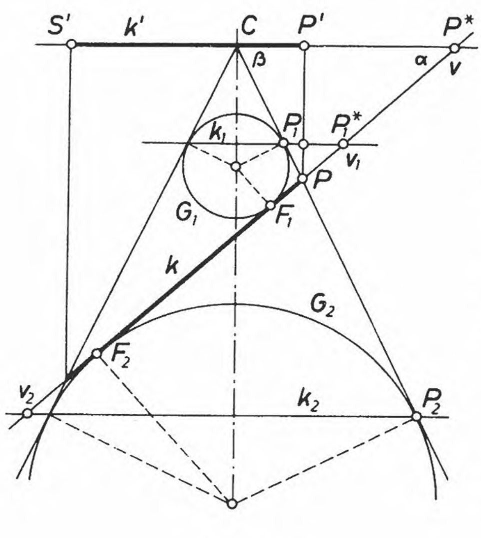
1. *Ha $\alpha < \beta$, a k metszetgörbe ellipszis.* A G_1, G_2 *Dandelin*-gömbök k_1, ill. k_2 körökben érintsék a kúpot, F_1, F_2 pontokban az S síkot, k_1 és k_2 síkjának S-sel való metszésvonala v_1, ill. v_2 legyen. A k metszetgörbe tetszőleges P pontjára (a *208. ábrától* függetlenül)

$$PF_1 + PF_2 = PP_1 + PP_2 = P_1P_2 = 2a \qquad \text{(állandó)},$$

hiszen a gömbhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, a k_1 és k_2 körök közti alkotók egyenlők. A metszetgörbe pontjai F_1, F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszisen vannak (sőt annak minden pontját megkapjuk). A v_1 és v_2 az F_1, ill. F_2 fókuszokhoz tartozó vezéregyenesek, azaz ha P-ből pl. a v_1 egyenesre PP_1^* merőlegest állítunk, akkor

$$PF_1 : PP_1^* = PP_1 : PP_1^* = \sin\alpha : \sin\beta \quad (<1) \quad \text{állandó.}$$

Vetítsük a k metszetgörbét a kúp tengelyével párhuzamosan a kúp tengelyére merőleges, a kúp csúcsán áthaladó S' síkra. A kapott k' vetületi görbe — mint ellipszis affin képe — ellipszis.



208. ábra

Megmutatjuk, hogy C ennek fókusza, S' és S v metszésvonala a hozzá tartozó vezéregyenes *(208. ábra)*.

Ha P vetülete P', és $P'P^*$ a v-re merőleges, akkor

$$P'C : P'P^* = PC\cos\beta : PP^*\cos\alpha =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \quad (<1) \text{ állandó.}$$

Ez az észrevételünk kapcsolódik a **148.** feladat megjegyzéseihez.

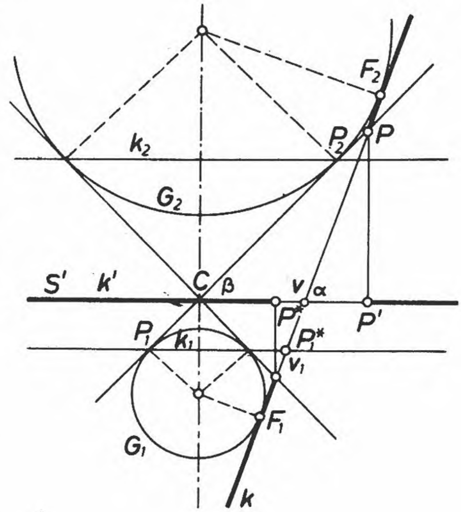
2. Ha $\alpha > \beta$, a k metszetgörbe hiperbola *(209. ábra)*.

Az előbbi jelölések értelemszerű megváltoztatásával

$$|PF_1 - PF_2| = |PP_1 - PP_2| = 2a$$
(állandó).

A k metszetgörbe pontjai F_1, F_2 fókuszú, $2a$ főtengelyű hiperbolán vannak (sőt annak minden pontját megkapjuk), v_1, v_2 az F_1, ill. F_2 fókuszokhoz tartozó vezéregyenesek:

$$PF_1 : PP_1^* = PP_1 : PP_1^* = \sin\alpha : \sin\beta$$
(>1) állandó.



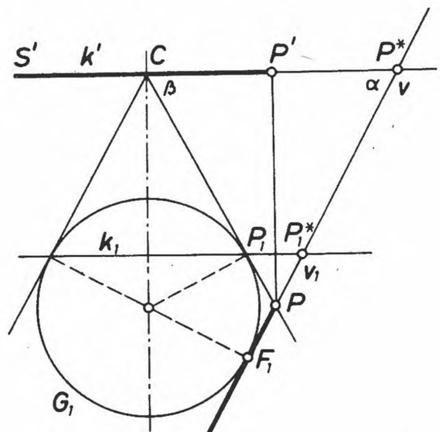
209. ábra

A metszősíkkal párhuzamos kúpalkotók ideális pontjait is a hiperbolához csatolhatjuk, így a hiperbolának két ideális pontja lesz, ezek meghatározzák az aszimptoták irányát.

A k metszetgörbe k' vetülete is hiperbola *(209. ábra)*, C ennek fókusza, v a hozzá tartozó vezéregyenes:

$$P'C : P'P^* = PC\cos\beta : PP^*\cos\alpha =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} \quad (>1) \quad \text{állandó.}$$



210. ábra

3. Ha $\alpha = \beta$, a k metszetgörbe parabola *(210. ábra)*.

$$PF_1 : PP_1^* = PP_1 : PP_1^* = 1.$$

A metszetgörbe pontjai F_1 fókuszú, v_1 vezéregyenesű parabolán vannak (sőt annak minden pontját megkapjuk). A metszősíkkal párhuzamos kúpalkotó

ideális pontját is a parabolához csatolhatjuk, így a parabolának egy ideális pontja lesz. Ez meghatározza a tengely irányát.

A k metszetgörbe k' vetülete is parabola *(210. ábra)*, C ennek fókusza, v a hozzá tartozó vezéregyenes: $P'C : P'P^* = 1$.

36. A kúpszeletek projektív származtatása

Az eddigiek lehetőséget nyújtanak a kúpszeletek projektív definíciójára.

A **141.** feladat megoldásában is láttuk, hogy ha az $A^* \equiv S$ és $D^* \equiv S'$ tartópontú sugársorok egybevágók (ezért projektívek is), és az SS' egyenes nem önmagának felel meg, akkor a megfelelő egyenesek metszéspontjai kört alkotnak *(211. ábra)*, és fordítva: a kör tetszőleges két pontját kiszemelve, a köri pontokat ezekkel összekötve, két egybevágó sugársort kapunk.

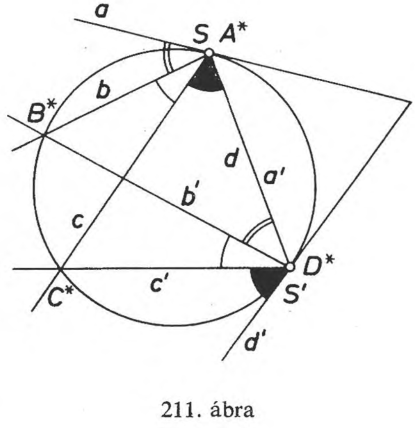
Az előző jegyzet alapján általában mondhatjuk, hogy a kúpszelet két projektív sugársor megfelelő egyeneseinek metszéspontja (a perspektív sugársorokat kizárjuk).

A kúpszelet pontjainak $(A^*B^*C^*D^*)$ kettősviszonyát is definiálhatjuk az

$$(abcd) = (a'b'c'd') = (A^*B^*C^*D^*)$$

egyenlőség alapján.

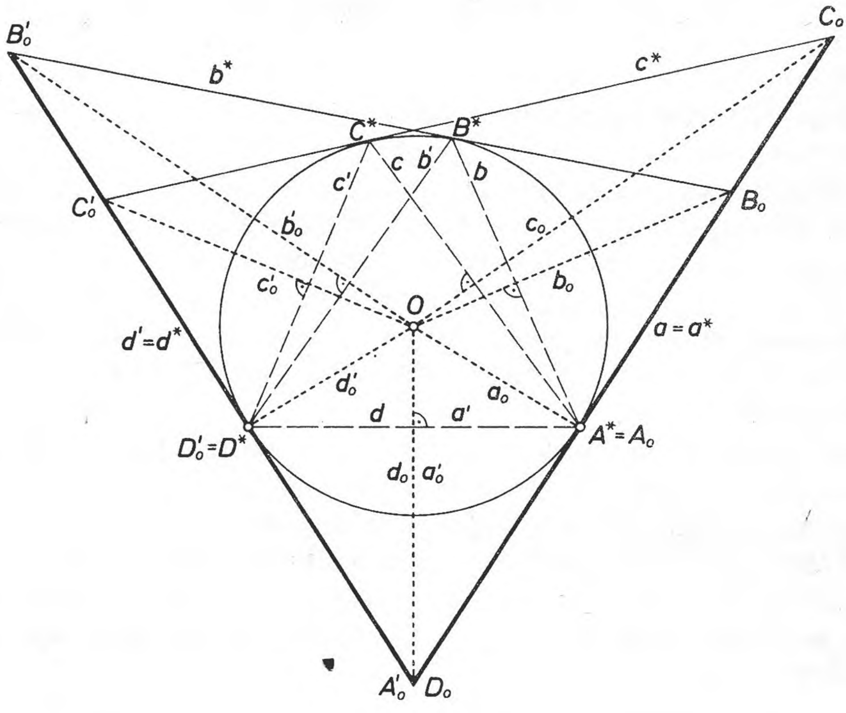
Steiner előbbi észrevétele alapján a kúpszelet érintőiből alkotott ún. *vonalkúpszelet projektív definíciójára* is lehetőség nyílik.



211. ábra

A *212. ábra* úgy keletkezett a *211. ábrából,* hogy meghúztuk az A^*, B^*, C^*, D^* pontokhoz tartozó a^*, b^*, c^*, d^* érintőket, továbbá az O középpontból merőlegeseket állítottunk az a, b, c, d és a', b', c', d' egyenesekre. Az így kapott a_0, b_0, c_0, d_0, ill. a_0', b_0', c_0', d_0' sugársorok a merőlegesség miatt egybevágók az előbbiekkel, és így egymással is tehát

$$(a_0b_0c_0d_0) = (abcd) = (a'b'c'd') = \\ = (a_0'b_0'c_0'd_0').$$



212. ábra

Viszont az a^* és d^* érintőkön az A_0, B_0, C_0, D_0, illetve A_0', B_0', C_0', D_0' pontokat az a^* és a_0, b^* és b_0, c^* és c_0, d^* és d_0, illetve a^* és a_0', b^* és b_0', c^* és c_0', d^* és d_0' egyenesek páronkénti metszéspontjai adják.

Ezért

$$(A_0B_0C_0D_0)=(a_0b_0c_0d_0)=(a_0'b_0'c_0'd_0')=(A_0'B_0'C_0'D_0').$$

Ezt általánosítva mondhatjuk, hogy *a vonalkúpszeletet két projektív pontsor megfelelő pontjait összekötő egyenesek alkotják.*

A kúpszelet érintőinek $(a^*b^*c^*d^*)$ kettősviszonyát is definiálhatjuk:

$$(A_0B_0C_0D_0)=(A_0'B_0'C_0'D_0')=(a^*b^*c^*d^*).$$

Az előbbiekkel összevetve adódik:

$$(A^*B^*C^*D^*)=(a^*b^*c^*d^*).$$

37. Pascal tétele

A kúpszeletek közös projektív tulajdonságaira talán *Pascal* tétele és ennek duálisa, *Brianchon* tétele világít rá legjobban.

Egy $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ hatszöget *Pascal*-félének nevezünk, ha az X_1X_2 és X_4X_5, X_2X_3 és X_5X_6, X_3X_4 és X_6X_1 szemközti oldalegyenesek páronkénti metszéspontjai egy egyenesen, az ún. *Pascal*-egyenesen sorakoznak.

Pascal tétele: Egy hatszög akkor és csak akkor Pascal-féle, ha csúcsai kúpszeleten vannak. (Feltesszük, hogy a csúcsok között nincs három egy egyenesen.) Ha pl. az X_1 és X_2 csúcs egybeesik, akkor X_1X_2 oldalegyenesen a kúpszelet X_1-beli érintőjét értjük.

E tétel módot ad arra, hogy öt pontjával adott kúpszelethez további pontokat, illetve az adott pontokban érintőket szerkesszünk.

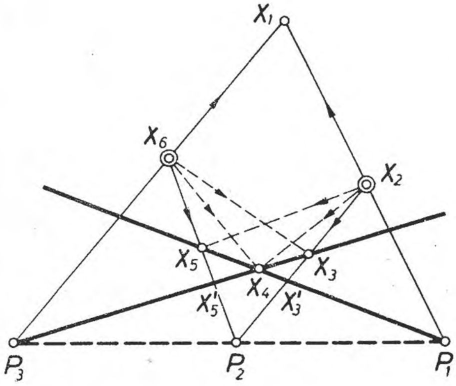
Pascal tétele a kúpszeletek projektív definíciójából vetítésekkel levezethető. Csak a tétel egyik részét igazoljuk, a másik fele indirekt módon adódik.

Tegyük fel, hogy $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$ kúpszeletbe írt hatszög, igazoljuk, hogy a szemköztes oldalegyenesek P_1, P_2, P_3 metszéspontjai egy egyenesen vannak *(213. ábra)*.

Tudjuk, hogy X_2-ből és X_6-ból vetítve az X_1, X_3, X_4, X_5 pontokat, a vetítő sugárnégyesek projektívek. Ezeket a sugarakat az X_4X_5, illetve X_3X_4 egyenesekkel elmetszve, rendre a P_1, X_3', X_4, X_5, illetve P_3, X_3, X_4, X_5' pontsorokat kapjuk.

Az előbbi megfeleltetés ezeket projektív módon rendeli egymáshoz, és az X_4 metszéspont képe önmaga. De akkor a két pontsor perspektív, és az $X_3'X_3$ és X_5X_5' egyenesek P_2 metszéspontja a P_1P_3 egyenesen van.

A **138.** feladat *Pascal* tételének speciális esete.



213. ábra

38. Desargues involúciótételei

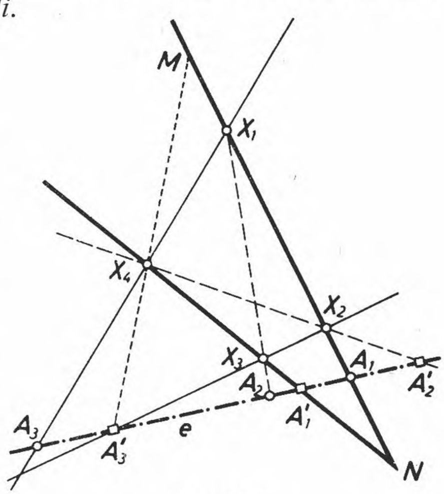
Érdekes *Desargues* teljes négyszögre vonatkozó involúciótétele.

Ha az $X_1X_2X_3X_4$ teljes négyszög szemköztes X_1X_2 és X_3X_4, X_1X_3 és X_2X_4, X_1X_4 és X_2X_3 oldalegyeneseit a négyszög csúcsaira nem illeszkedő e egyenes rendre A_1 és A_1', A_2 és A_2', A_3 és A_3' pontokban metszi, akkor van olyan involúció, mely ezeket a pontokat páronként egymáshoz rendeli.

Bizonyítási eszközünk ismét a vetítések kompozíciója *(214. ábra)*.

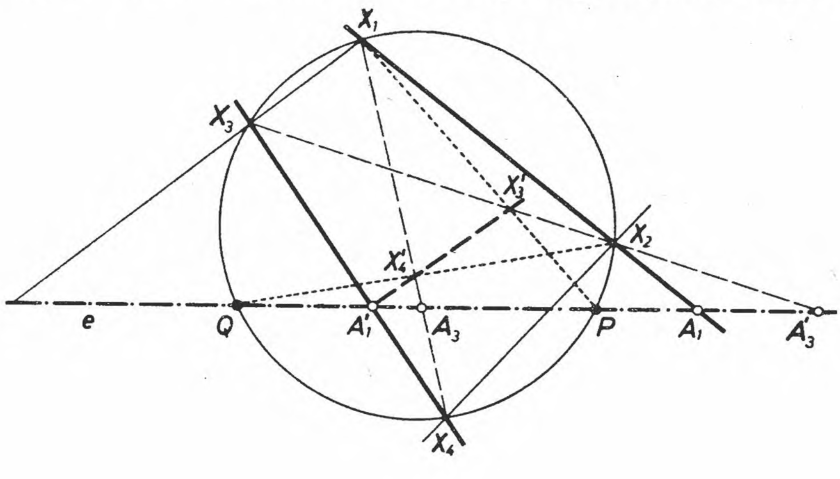
Az e egyenest előbb X_1-ből az X_3X_4 egyenesre, ezt A_3'-ből az X_1X_2 egyenesre, végül ezt X_4-ből e-re vetítjük.

Az A_1, A_1', A_2, A_3 pontok képei rendre N, A_1', X_3, X_4, majd N, A_1, X_2, M, majd A_1', A_1, A_2', A_3' lesz. A három vetítés kompozíciója végül is az A_1, A_1', A_2, A_3 pontokhoz rendre az A_1', A_1, A_2', A_3' pontokat rendeli, és mivel A_1 és A_1' felcserélődött, a leképezés involúció *(33. jegyzet)*.



214. ábra

Desargues involúciótétele kúpszeletbe írt teljes négyszögre: Ha $X_1X_2X_3X_4$ a k



215. ábra

kúpszeletbe írt négyszög, e pedig olyan egyenes, mely nem halad át a négyszög egyik csúcsán sem, akkor az e egyenesnek az $X_1X_2X_3X_4$ négyszög által meghatározott involúciója felcseréli egymással e-nek k-val való két metszéspontját (ha *e* metszi *k*-t), *illetve önmagába viszi át e és k érintési pontját* (ha *e* érinti *k*-t).

Ez a tétel az előbbi tétel és a *Pascal*-tétel következménye.

e és *k* metszéspontjait jelöljük P-vel és Q-val; ha a kettő egybeesik, PQ egyenesen értjük a *k*-hoz P-ben húzott érintőt *(215. ábra)*.

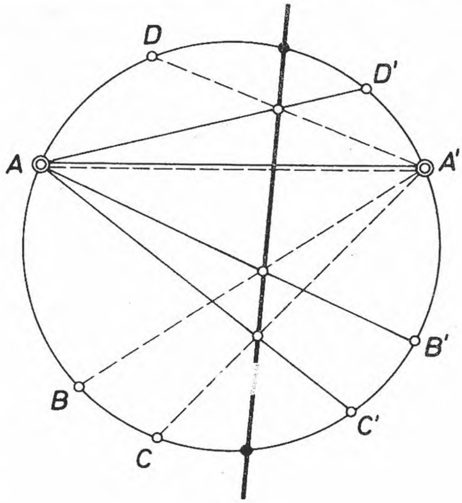
A *Pascal*-tételt az $X_1PQX_2X_3X_4$ hatszögre alkalmazva, a szemközti oldalegyenesek metszéspontjai, X_3', A_1', X_4' egy egyenesen vannak. De akkor az $X_1X_2X_3'X_4'$ teljes négyszög az *e* egyenesen olyan involúciót határoz meg, mely A_1-et A_1'-vel, A_3-t A_3'-vel, P-t Q-val cseréli fel. Ez az involúció viszont ugyanaz, mint amit az $X_1X_2X_3X_4$ négyszög határoz meg az *e* egyenesen, hiszen az A_1, A_1', A_3, A_3' pontpárokban megegyeznek.

A **140.** és a **141.** feladatok *Desargues* utóbbi involúciótételének speciális esetei. Az involúció mindkét esetben az egyenes pontjainak egy pontra történő tükrözése, az ideális pont önmagának felel meg.

39. Kúpszelet és vonalkúpszelet önmagára történő projektív leképezése. Steiner-féle fixpont-szerkesztés

A *k* kúpszelet pontjainak önmagára történő projektív leképezéséről beszélünk, ha a megfelelő pontokat a kúpszelet tetszőleges S pontjából vetítve, a kapott két sugársor projektív, azaz a leképezés megtartja a kúpszeleten értelmezett kettősviszonyt [*(36. jegyzet)* pl. $(ABCD)=(A'B'C'D')$]. A leképezés fixpontjait is megszerkeszthetjük. Ha ugyanis az A, B, C, D... pontokat A'-ből, az A', B', C', D'... pontokat A-ból vetítjük, az így kapott két sugársor is projektív. Sőt perspektívek is, hiszen az AA' sugár önmagának felel meg, ezért a megfelelő sugarak egy egyenesen metszik egymást. Ez az egyenes kimetszi a kúpszeletből a leképezés esetleges fixpontjait (legfeljebb két fixpont lehet) *(216. ábra)*.

Az előbbiek alapján a perspektív háromszögekre vonatkozó *Desargues*-tétel felhasználásával igazolható a következő, *Steiner*-től származó tétel.



216. ábra

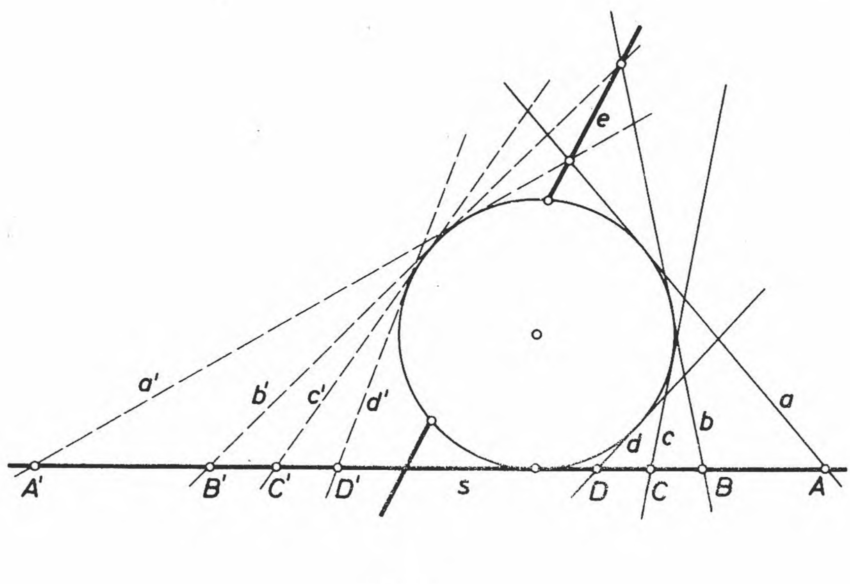
A kúpszelet pontjainak önmagára történő projektív leképezése akkor és csak akkor involúció, ha a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy ponton mennek át. Ez a pont az esetleges fixpontokban húzott érintők metszéspontja. A bizonyítást az olvasóra bízzuk.

A fentiek dualizálásával kapjuk a következőket:

A *v* vonalkúpszelet egyeneseinek önmagára történő projektív leképezéséről beszélünk, ha a megfelelő egyeneseket a vonalkúpszelet tetszőleges *s* egyenesével elmetszve, a kapott két pontsor is projektív, azaz a leképezés megtartja a vonalkúpszeleten értelmezett kettősviszonyt [*(36. jegyzet)* pl. $(abcd)=(ABCD)=$ $=(A'B'C'D')=(a'b'c'd')$].

A *Steiner*-tétel duálisa a következő tétel:

A vonalkúpszelet pontjainak önmagára történő projektív leképezése akkor és csak akkor involúció, ha megfelelő egyenesek metszéspontjai egy egyenesen



217. ábra

sorakoznak. Ez az egyenes az esetleges fix egyenesek érintési pontjait köti össze (217. ábra).

A **187**. feladat éppen ez utóbbi tétel specializálásából származik, amikor a vonalkúpszelet egy kör érintőiből áll, és az s egyenes szerepét a kör t érintője játssza, az érintők körében értelmezett involúciót a t érintő A pontra vonatkozó tükrözése származtatja. A tükrözésnek van két fixpontja: az A pont és t ideális pontja, így az érintő involúciójában fix elemek az A-ból húzott érintő és az ideális pontból húzott (t-től különböző) érintő.

40. Poncelet tétele

A **139., 213., 214., 215.** feladatokban olyan háromszögekről és négyszögekről volt szó, amelyeknek csúcsai egy kör pontjai, oldalegyenesei egy másik kör érintői.

Poncelet tétele ezt a témakört általánosabban világítja meg.

Ha egy n csúcsú és oldalú $X_1X_2...X_n$ zárt töröttvonal csúcsai a k kúpszelet különböző pontjai, X_1X_2, X_2X_3, ..., X_nX_1 oldalegyenesei a k' kúpszelet érintői, akkor k akármelyik Y_1 pontjából indulunk is ki, ha megrajzoljuk az $Y_1Y_2Y_3...$ poligont úgy, hogy csúcsai k (különböző) *pontjai, Y_1Y_2, Y_2Y_3, ... oldalegyenesei pedig k' érintői legyenek, akkor $Y_{n+1}=Y_1$.*

Másképpen, ha a töröttvonal egy esetben az n-edik lépésben záródik, akkor minden esetben az n-edik lépésben záródik.

Ha k r sugarú kör, k' pedig ϱ sugarú kör, és a körök középpontjainak távolsága d, akkor és csak akkor lesz $n=3$, ha

$$d=\sqrt{r(r-2\varrho)}, \quad \text{azaz} \quad \frac{1}{r+d}+\frac{1}{r-d}=\frac{1}{\varrho}.$$

A *Poncelet*-tétel körökre és háromszögekre vonatkozó esete elemi úton is könnyen igazolható ([7] I. rész).

Az $n=4$ eset feltétele már nehezebben bizonyítható [3]:

$$\frac{1}{(r+d)^2}+\frac{1}{(r-d)^2}=\frac{1}{\varrho^2}.$$

Poncelet tétele nyilván igaz, ha két koncentrikus körről van szó, hiszen ha

vágósságcsoportjához tartozó geometria. Ebben két szakasz, két szög, két kör, két háromszög, ... nem feltétlenül ekvivalens, csak ha „egybevágók”.

A hasonlósági geometriában bármely két szakasz, két kör ekvivalens, de két szög már nem feltétlenül ekvivalens, csak az „egyenlő” szögek, két háromszög nem feltétlenül ekvivalens, csak ha „hasonlók” stb.

Az affinitáscsoportnak részcsoportja a hasonlóságcsoport, ennek részcsoportja az egybevágóságcsoport. Ezért az affin geometria általánosabb, mint a hasonlósági geometria, s ez általánosabb, mint az egybevágósági geometria. Az általánosabb geometria tételei vonatkoznak a speciálisabbra is, de az utóbbi változatosabb, gazdagabb, vannak olyan tételei, melyek az előbbire nem érvényesek.

Mi a hasonlósági és affin geometriát is az egybevágósági (euklideszi) geometriával vezettük be. Megtehető azonban, hogy ezeket bizonyos alapelemek, alaprelációk és axiómák alapján az euklideszi geometriától függetlenül alapozzuk meg.

Például az affin geometriában az osztóviszony, területarány (térfogatarány) fogalma, ugyanígy a vektorok, a velük végzett összeadás, számmal való szorzás művelete az euklideszi geometriától függetlenül is definiálható.

Mondhatjuk, hogy pl. a **109.**, **128.**, **134.**, **155.**, **158.**, **162.**, **163.**, **168.**, **173.**, **194.**, **206.**, **207.** feladatok affin geometriai tételek, hiszen szövegezésükben (esetleg apróbb átfogalmazással) csupán affin geometriai alapfogalmak szerepelnek.

A projektív transzformációk bevezetésekor az euklideszi síkot új elemekkel, az ideális egyenes pontjaival bővítettük. Az előbbiek szellemében ha az alakzatok ekvivalenciáját a projektivitások csoportja alapján értelmezzük, akkor az ideális és a közönséges elemek közti különbség eltűnik, hiszen a csoport leképezéseinél ideális elemeknek közönséges elemek is megfelelhetnek, és fordítva.

A projektív geometria az alakzatoknak azokkal a tulajdonságaival foglalkozik, amelyek a projektív transzformációknál változatlanok, invariánsak. A projektív geometriában bármely két (nem elfajuló) négyszög ekvivalens, ekvivalensek egymással a kör, ellipszis, hiperbola, parabola. Az egyenesre illeszkedő rendezett pontnégyesek közül azonban azok és csak azok ekvivalensek, melyeknek a kettősviszonya megegyezik. A kettősviszony erre az ekvivalenciaosztályra jellemző invariáns szám.

Láttuk, hogy az affinitások a projektivitások egy részcsoportját alkotják (pontosabban azok a projektivitások, amelyeknél egy kiszemelt egyenes önmagába megy át, az affinitások csoportjával izomorf részcsoportot alkotnak), ezért a projektív geometria még az affin geometriánál is általánosabb.

Mi a projektív geometriát is az euklideszi geometrián keresztül vezettük be.

van záródó töröttvonal, akkor az elforgatható a közös középpont körül. Két általános helyzetű körre a *Poncelet*-tétel még elemi eszközökkel igazolható. Az általános tétel bizonyítása meglepően nehéz, és még napjainkban is aktuális, hogy minél egyszerűbb bizonyítást keressünk.

41. A geometriai transzformációk áttekintése F. Klein „Erlangeni program"-ja alapján

A *28—30. jegyzet*ekben beszéltünk az euklideszi sík egybevágósági, hasonlósági, affin transzformációcsoportjáról. Szemeljük ki ezek közül például az affinitások csoportját.

Megtehetjük, hogy két alakzatot akkor és csak akkor tekintünk ekvivalensnek, ha van olyan affinitás, ami az egyiket a másikba viszi. Az alakzatokat osztályokba sorolhatjuk. Egy osztályba tartoznak az egymással ekvivalens alakzatok, amelyek között nem teszünk különbséget.

Az osztályba sorolást biztosítja, hogy az affinitások csoportot alkotnak, és így az előbb értelmezett ekvivalencia valóban *ekvivalenciareláció:*

1. A reláció *reflexív.* Az A alakzat önmagával ekvivalens: $A \sim A$, hiszen a csoporthoz tartozó azonos leképezés önmagába viszi.

2. A reláció *szimmetrikus.* Ha $A \sim B$, akkor $B \sim A$, hiszen az A-t B-re képező leképezés inverze — amely a csoporthoz tartozik — B-t A-ra képezi.

3. A reláció *tranzitív.* Ha $A \sim B$ és $B \sim C$, akkor $A \sim C$, hiszen az A-t B-re és B-t C-re képező transzformációk kompozíciója—amely a csoporthoz tartozik— A-t C-re képezi.

Ezeknek az osztályoknak a vizsgálatával foglalkozik az *affin geometria.* Ezt így is mondják: *az affin geometria az alakzatoknak azokkal a tulajdonságaival foglalkozik, amelyek az affin transzformációknál nem változnak meg,* más szóval invariánsak.

Az affin geometriában például a pontok, egyenesek, szakaszok, konvex szögtartományok, háromszögek, paralelogrammák, parabolák, hiperbolák egy-egy osztályt alkotnak. A körök és ellipszisek is egyetlen osztályba tartoznak.

Az egyenesre illeszkedő rendezett ponthármasok közül azok és csak azok tartoznak egy osztályba, melyeknek az osztóviszonya megegyezik. Ez az osztóviszony az osztályt jellemző invariáns szám.

Ugyanígy értelmezhetjük a többi transzformációcsoporthoz tartozó geometriát is. Ebben az értelmezésben a szokásos *euklideszi síkgeometria a sík egybe-*

Ismert azonban a projektív geometria önálló axiomatikus felépítése is. A kettősviszony fogalma az általunk adott metrikus definícióval szemben az euklideszi geometriától függetlenül is definiálható. A *32—40. jegyzet*ekben tárgyalt tételek is mind jól beilleszthetők egy ilyen tárgyalásba.

A projektív csoport bizonyos tulajdonságú részcsoportjai elvezetnek bennünket a Bolyai—Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometriához és a Riemann-féle elliptikus geometriához is.

Felix Klein a fenti gondolatokat az erlangeni egyetemen 1872-ben tartott magántanári program előadásában vázolta. Ez az „Erlangeni program" nemcsak a geometria, hanem a matematika szinte minden fejezetének fejlődésében komoly szerepet játszott *(22. jegyzet)*. (Később még szó lesz az ún. *körgeometriáról*. Ez szoros kapcsolatban van a komplex függvények elméletével is. *51. jegyzet*).

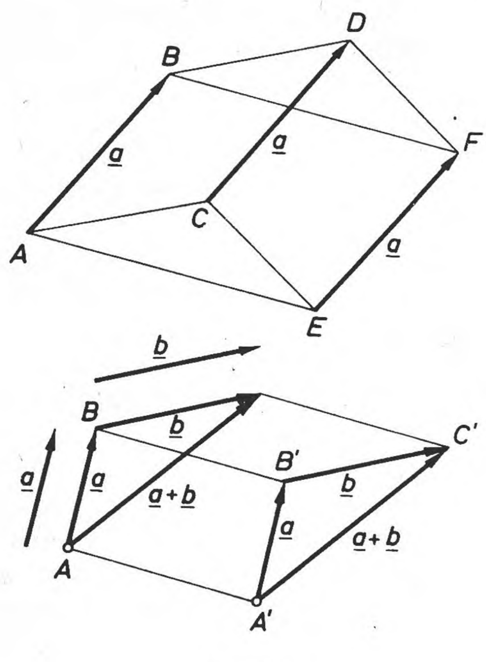
Általánosan mondhatjuk a következőket: Ha megadunk egy halmazt, akkor definiálhatjuk a halmaz önmagára történő egy-egy értelmű leképezéseinek csoportját. Ez a halmazon értelmezett legáltalánosabb (és ezért semmitmondó) geometriát értelmezi. Az előbbi csoport egy részcsoportjával a halmaz egy geometriáját értelmezhetjük, mely a halmaz „alakzatainak" azokkal a tulajdonságaival foglalkozik, melyek a kiszemelt részcsoport leképezéseinél változatlanok. Minél „szűkebb" a részcsoport, annál többféle tulajdonság lép fel, annál gazdagabb lesz a geometria. Egy részcsoport kiválasztását természetesen többféle szempont alakítja ki. Ilyen szempontok például a valósággal való kapcsolat, a tudománytörténeti hagyományok, a matematika belső fejlődése.

A valósággal való kapcsolatra utalunk, amikor ezt mondjuk: az egybevágósági geometria „a merev testek" geometriája, a projektív geometria pedig a „homogén közegben haladó fénysugarak" geometriája.

A fentebb vázolt geometriai struktúrák szervesen kapcsolódnak algebrai struktúrákhoz, és összefonódnak a matematika általános struktúrafogalmában *(22. jegyzet)*.

42. Vektorok bevezetése

A sík (vagy a tér) *irányított szakaszait osztályokba soroljuk. Az* $\overrightarrow{AB}$ *és* $\overrightarrow{CD}$ *irányított szakaszokat akkor és csak akkor soroljuk ugyanabba az osztályba, ha AB és CD egyállású, azonos irányú, egyenlő szakaszok* (másképpen, ha AB-ből eltolással kapjuk CD-t). *Ezt így is jelölhetjük:* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\mathbf{a}$, *ahol* **a** *az említett*



218. ábra

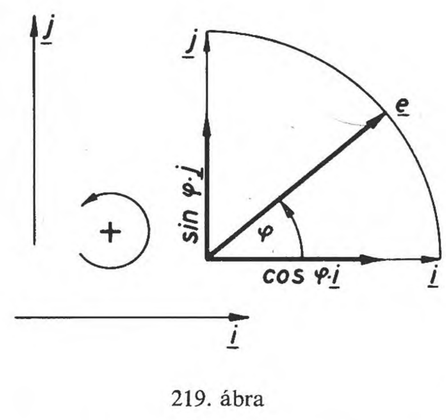
osztálynak a neve. (Geometriailag nyilvánvaló, hogy ha $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, akkor $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$, továbbá ha $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ és $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF}$, akkor $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}$. Ez biztosítja, hogy az osztályba sorolás lehetséges.) (*218. ábra*).

Az osztályokat vektoroknak nevezzük, de nem okoz félreértést, ha — a fentiek értelmében — az osztályok elemeit (az osztályok reprezentánsait) is vektoroknak mondjuk.

Az egy osztályba tartozó irányított szakaszok hossza egyenlő, ez a vektor *abszolút értéke,* **a** abszolút értékének a jele $|\mathbf{a}|$. Ha $|\mathbf{a}|=1$, akkor **a**-t egységvektornak nevezzük.

A vektorok körében bevezethetjük az összeadás és a számmal való szorzás műveletét.

Ha $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$, akkor az $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$ vektort az **a** és **b** vektorok összegének nevezzük, és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$-vel jelöljük. (Geometriailag nyilvánvaló, hogy ha az A pont helyett az A' pontból indulunk ki, vagyis $\overrightarrow{A'B'}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{B'C'}=\mathbf{b}$, akkor $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}$, tehát az összegvektor egyértelmű.) (*218. ábra.*)



219. ábra

Könnyen igazolható, hogy a vektorok az összeadásra nézve csoportot alkotnak (1. jegyzet). A csoport egységeleme a **0** vektor. Ebbe az osztályba azok az „irányított" szakaszok tartoznak, melyeknek kezdő- és végpontja azonos.

Legyen λ valós szám. Az **a** vektor λ-szorosán azt a $\lambda\mathbf{a}$-val jelölt vektort értjük, mely egyállású **a**-val, hossza $|\lambda|\,|\mathbf{a}|$, iránya pedig **a** irányával egyezik vagy ellentétes aszerint, hogy λ pozitív vagy negatív.

Könnyen igazolható, hogy a bevezetett összeadásra és számmal való szorzásra teljesülnek a lineáris tér axiómái. Az egyenes vektorai egydimenziós, a sík vektorai kétdimenziós, a tér vektorai háromdimenziós lineáris teret alkotnak *(3. jegyzet)*. Ez azt jelenti, hogy ha például a térben $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ nem egysíkú vektorok, akkor minden **a** vektor egyértelműen írható $\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3$ alakban. Az (u_1, u_2, u_3) számhármas az **u** vektornak az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ bázisvektorokra vonatkozó koordinátái.

Megmutatható, hogy az így kapott $\mathbf{u}\to(u_1, u_2, u_3)$ megfeleltetés a tér vektorai és a számhármasok között egy-egy értelmű és műveletttartó leképezés: *izomorfizmus*. Tehát, ha $\mathbf{u}\to(u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v}\to(v_1, v_2, v_3)$, akkor $\mathbf{u}+\mathbf{v}\to(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)=(u_1, u_2, u_3)+(v_1, v_2, v_3)$; ha $\mathbf{u}\to(u_1, u_2, u_3)$, akkor $\lambda\mathbf{u}\to(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)=$ $=\lambda(u_1, u_2, u_3)$. *(3. jegyzet)*.

Ha a síkban a bázisvektorok az egymásra merőleges **i**, **j** egységvektorok (**i**-t $+90°$ forgás viszi **j**-be), akkor az **i**-vel φ forgásszöget bezáró **e** egységvektor koordinátái definiálják a $\cos\varphi$ és $\sin\varphi$ szögfüggvényeket *(219. ábra)*:

$$\mathbf{e}=\cos\varphi\,\mathbf{i}+\sin\varphi\,\mathbf{j}.$$

Mindezeket felhasználtuk a **41.** és **43.** feladat megoldásában is.

43. Vektorok skaláris szorzata

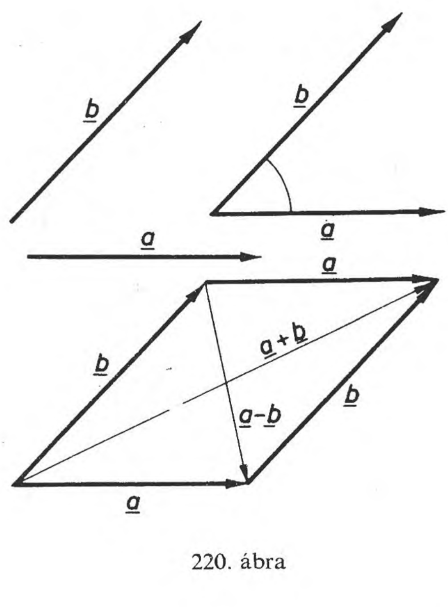
Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzatát, az **ab**-vel jelölt valós számot így definiáljuk:

$$\mathbf{ab}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

ahol $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ a két vektor hajlásszöge *(220. ábra)*.

Geometriailag bizonyítható, hogy a tér vektoraira bevezetett skaláris szorzat teljesíti a skaláris szorzat szokásos axiómáit *(3. jegyzet)*.

A skaláris szorzat tulajdonságaiból azonnal adódik a háromszögekre vonatkozó cosinustétel. Könnyen adódik a **124.** feladatban is felhasznált következő tétel:



220. ábra

A paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével (220. ábra).

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2+(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2+2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2+\mathbf{a}^2-2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2=2\mathbf{a}^2+2\mathbf{b}^2.$$

A skaláris szorzat tulajdonságait alkalmazva oldottuk meg a **135.**, **169.** és **170.** feladatot, s felhasználjuk ezeket a későbbiekben is *(47. jegyzet)*.

Ha az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ egységvektorok páronként merőleges bázisvektorok, akkor az $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$ és $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+y_2\mathbf{e}_2+y_3\mathbf{e}_3$ vektorok skaláris szorzata:

$$\mathbf{xy}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

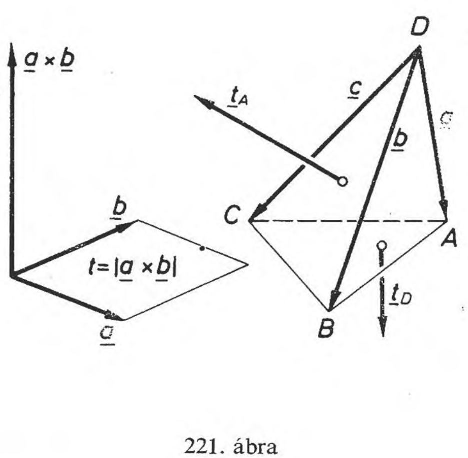
Speciálisan

$$\mathbf{xx}=\mathbf{x}^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2.$$

Tehát a tér vektorainak és a számhármasoknak $\mathbf{x}\to(x_1, x_2, x_3)$ megfeleltetése egyben a két euklideszi tér izomorfizmusa is *(3. jegyzet)*.

44. Vektorok vektoriális szorzata

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzata, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ olyan vektor, melynek hossza $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$, ez a vektor merőleges $\mathbf{a}$-ra és $\mathbf{b}$-re, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jobbrendszert alkot *(221. ábra)*.



221. ábra

Geometriailag $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

A definíció alapján bizonyíthatók az alábbi tulajdonságok:

(I) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$, ebből $(\mathbf{a}\times\mathbf{a})=0$ következik.

(II) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2)=\mathbf{a}\times\mathbf{b}_1+\mathbf{a}\times\mathbf{b}_2$.

(III) $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b})$.

(IV) Ha az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ egymásra merőleges bázis-egységvektorok jobbrendszert alkotnak, akkor $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2$.

Ezekből a tulajdonságokból következik $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ kiszámítása $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ koordinátáiból:

$$(*)\qquad (a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\times(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3)=$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e}_3.$$

Az (I)—(IV) tulajdonságok egyértelműen megszabják az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektoriális szorzatának (*) kiszámítási módját. Lehetséges volna — az algebra módszerével —, hogy a vektoriális szorzatot az előbbi tulajdonságokkal mint axiómákkal definiáljuk, ekkor persze a geometriai jelentés nem szembetűnő, de levezethető a (*) formula alapján:

$$(**)\qquad |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2=$$
$$=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2(\mathbf{a},\mathbf{b})=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Az első lépésben a *Lagrange*-azonosságot használtuk fel, a második lépésben a skalárszorzat definícióját. De tekinthetjük (**)-ot a számhármasokra vonatkozó *Lagrange*-azonosság bizonyításának (**62.** feladat).

A vektoriális szorzat segítségével bebizonyítjuk a poliéderek egy érdekes tulajdonságát (ezt a *48. jegyzet*ben felhasználjuk).

Tekintsünk egy tetraédert. Ennek minden lapjára merőlegesen kifelé mutató vektort állítunk, melynek hossza az illető lap területének mértékszáma. Állítás: az így kapott lapterületvektorok összege nullvektor.

Ugyanezt mondhatjuk akkor is, ha befelé irányítjuk a lapterületvektorokat.

Tekintsük az $ABCD$ tetraédert, melynek $\mathbf{a}=DA$, $\mathbf{b}=DB$ és $\mathbf{c}=DC$ élvektorai jobbrendszert alkotnak *(221. ábra)*.

A lapterületvektorokat a szemközti csúccsal indexeljük:

$$\mathbf{t}_A=\frac{1}{2}(\mathbf{c}\times\mathbf{b}),\quad \mathbf{t}_B=\frac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{c}),\quad \mathbf{t}_C=\frac{1}{2}(\mathbf{b}\times\mathbf{a}),$$

$$\mathbf{t}_D=\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})\times(\mathbf{c}-\mathbf{a})=-\frac{1}{2}(\mathbf{c}\times\mathbf{b})-\frac{1}{2}(\mathbf{a}\times\mathbf{c})-\frac{1}{2}(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$$

a vektoriális szorzás tulajdonságaiból következik.

Egy poliéder kifelé irányított lapterületvektorainak összege nullvektor. Ez az előbbiből következik, ha a poliédert tetraéderekre bonthatjuk fel.

45. A paralelepipedon és a tetraéder előjeles térfogata vektorokkal

Axiomatikusan értelmezzük az **a**, **b**, **c** *vektorok által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogatát, amelyet* $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$*-vel jelölünk. Axiómáink a térfogatfogalommal szemben támasztott követelményeket általánosítják.*

(I) Bármely két vektort felcserélve, a térfogat előjelet vált:

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -V(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -V(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -V(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Ebből pl. $V(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = 0$, $V(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ következik.

(II) A térfogat bármely vektorváltozóban lineáris, például

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2) = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_1) + V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}_2).$$

(III) A térfogat bármely vektorváltozóban homogén,

$$\lambda V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = V(\lambda\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = V(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}, \mathbf{c}) = V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda\mathbf{c}).$$

(IV) Ha $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ egymásra merőleges bázisegységvektorok, amelyek jobbrendszert alkotnak, akkor

$$V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1.$$

Ha tehát a fenti követelményeknek megfelelő hozzárendelés létezik, akkor a fentiek alapján

$$(1)\quad \begin{aligned} V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= V(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,\ b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3,\ c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3) = \\ &= (a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1) \cdot V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

A determinánsokra vonatkozó tételek szerint az így definiált $V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ függvény eleget tesz az (I)—(IV) axiómáknak *(4. jegyzet)*.

Látható, hogy a (IV) kikötés a térfogategységet rögzítette (a kocka térfogata 1), ettől függetlenül is beszélhetünk két paralelepipedon előjeles térfogatarányáról az (1) képlet alapján:

$$\frac{V(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{V(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ezt az észrevételt használtuk fel a **162.** feladat II. megoldásában.

A háromdimenziós tér mintájára értelmezhető az n dimenziós euklideszi térben a paralelepipedon térfogata és az n dimenziós affin térben paralelepipedonok térfogataránya *(4., 49. jegyzet)* n-edrendű determinánsok segítségével.

46. Helyvektor. Az egyenes és a sík paraméteres vektoregyenlete

Ha megadunk a síkon egy O kezdőpontot (origót), akkor a sík tetszőleges P pontja egyértelműen jellemezhető a $\mathbf{p}=\overrightarrow{OP}$ vektorral, amit a P pont helyvektorának nevezünk.

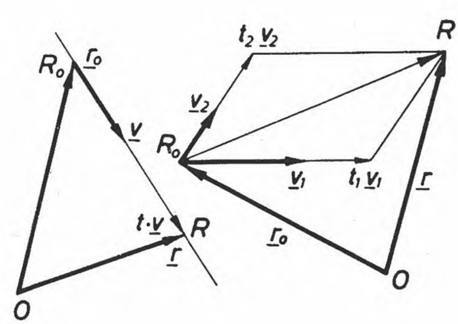
Az R_0 ponton átmenő $\mathbf{v}$ irányvektorú egyenes paraméteres egyenlete:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v} \quad (t \text{ valós szám}).$$

A $t=0$ időpontban R_0-ból induló, $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó tömegpont a t időpontban az R pontban lesz *(222. ábra)*.

Az R_0 ponton áthaladó $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ vektorokkal párhuzamos ($\mathbf{v}_1 \nparallel \mathbf{v}_2$) sík pontjait a (t_1, t_2) valós számpárral jellemezhetjük *(222. ábra):*

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t_1\mathbf{v}_1+t_2\mathbf{v}_2.$$



222. ábra

Az AB szakasz tetszőleges P pontjához van olyan t paraméter, hogy

$$\mathbf{p}=\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$$

(223. ábra).

Ebből következik, hogy a $\mathbf{p}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$ helyvektorú P pont akkor és csak akkor van az O-ra nem illeszkedő AB egyenesen, ha $\alpha+\beta=1$. Ha pl. $\alpha=0$, akkor $P\equiv B$, ha $\alpha=1$, akkor $P\equiv A$. A többi esetben $\frac{BP}{BA}=\alpha$.

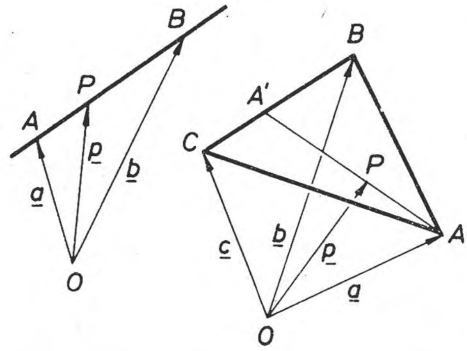
Ha az X pontra az $(ABX) = \frac{AX}{XB}$ osztóviszony μ/λ $(\lambda\neq 0)$, akkor $\lambda+\mu\neq 0$ és

$$\mathbf{x}=\frac{\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}}{\lambda+\mu}.$$

Az ABC sík tetszőleges P pontjához van olyan (t_1, t_2) számpár, hogy *(223. ábra)*

$$\mathbf{p}=\mathbf{a}+t_1(\mathbf{b}-\mathbf{a})+t_2(\mathbf{c}-\mathbf{a})=(1-t_1-t_2)\mathbf{a}+t_1\mathbf{b}+t_2\mathbf{c}.$$

Ebből leolvasható, hogy a $\mathbf{p}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ helyvektorú P pont akkor és csak akkor van az O-ra nem illeszkedő ABC síkon, ha $\alpha+\beta+\gamma=1$. Ha pl. $\alpha=0$,



223. ábra

akkor P a BC egyenesen van, ha $\alpha=1$, akkor az AP és BC egyenesek párhuzamosak. A többi esetben az AP és BC egyenesek egy A' pontban metszik egymást, és $\frac{A'P}{A'A}=\alpha$, továbbá az $(AA'P)$ osztóviszony $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$.

Ezeket a tételeket használtuk fel a **134., 162., 195.** feladatok megoldásában is. Ezeket általánosíthatjuk az n dimenziós affin geometriában is *(49. jegyzet)*.

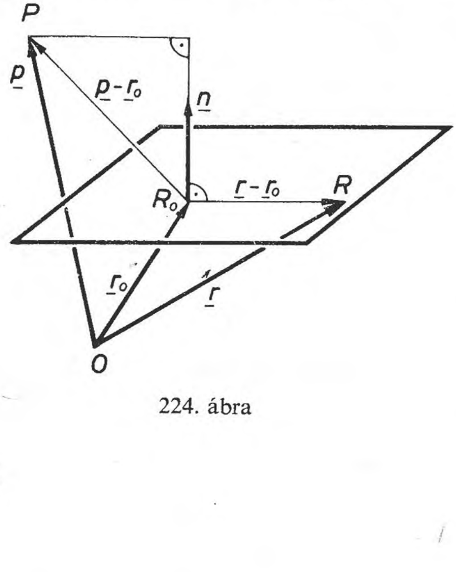
47. Sík vektoregyenlete normálvektor segítségével

A tér $R_0(\mathbf{r}_0)$ pontján áthaladó S síkot a rá merőleges $\mathbf{n}$ normálvektor egyértelműen jellemzi *(224. ábra)*. Egy $R(\mathbf{r})$ pont akkor és csak akkor van a síkon, ha $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\perp\mathbf{n}$, tehát skaláris szorzással

(1) $\quad \mathbf{n}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0;\quad$ azaz $\quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$

ahol $\mathbf{n}(A, B, C)$, $\mathbf{r}(x, y, z)$, $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, és a bázisvektorok egymásra merőleges egységvektorok.

Ha az $\mathbf{n}$ *egységvektor, akkor* a tér tetszőleges $P(\mathbf{p})$ pontjának az S síktól mért d előjeles távolságát egyszerűen a $\mathbf{p}$ behelyettesítésével számíthatjuk ki:



224. ábra

(2) $\quad \mathbf{n}(\mathbf{p}-\mathbf{r}_0)=d.$

Itt d akkor pozitív, ha P az S-től $\mathbf{n}$ irányába eső féltérben van (az (1) egyenletnek megfelelően $d=0$, ha P az S síkban van).

(2) bizonyítása a skalárszorzat definíciója alapján a *224. ábráról* leolvasható. A (2)-ből kiolvasható, hogy az S-től $\mathbf{n}$ irányába eső nyílt féltér pontjaira

(3) $\mathbf{n}(\mathbf{p}-\mathbf{r}_0)>0$; (4) $\mathbf{n}(\mathbf{p}-\mathbf{r}_0)<0$

pedig az ellenkező nyílt féltér pontjaira teljesül.

A síkban az e egyenes normálvektorával hasonló tételeket fogalmazhatunk meg. Sőt, az n dimenziós euklideszi térbe is értelemszerűen minden átvihető *(49. jegyzet)*.

48. A lineáris programozás témaköréről

A **66.** feladatot a *47. jegyzet*nek megfelelően átfogalmazhatjuk:
A $4x+y+2z=4$ és $3x+6y-2z=6$ síkok metszésvonalának az első térnyolcadba ($x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$) eső pontjai közül melyik van legközelebb, illetve legtávolabb az origón áthaladó $\mathbf{n}(5; -6; 7)$ normálvektorú S síkhoz.

Az $(x; y; z)$ pont előjeles távolsága S-től ugyanis — $|\mathbf{n}|=\sqrt{25+36+49}=$ $=\sqrt{110}$ miatt — $\frac{1}{\sqrt{110}}(5x-6y+7z)=\frac{K}{\sqrt{110}}$.

A feladat megoldásából is kitűnik, hogy a $\left(0; \frac{10}{7}; \frac{9}{7}\right)$ és $\left(\frac{6}{7}; \frac{4}{7}; 0\right)$ pontok közé eső szakaszról van szó. Az előbbi végpontokban K és így az említett síktól mért távolság is minimális, illetve maximális.

Kérdezhetjük például, hogy az

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z\geqq c_1,\\
&\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z\geqq c_2,\\
(1)\qquad &\vdots\\
&\alpha_k x+\beta_k y+\gamma_k z\geqq c_k
\end{aligned}$$

feltételek mellett a $K=\alpha x+\beta y+\gamma z$ lineáris függvény hol veszi fel szélsőértékeit. Az (1) feltétel k darab féltér közös részét — általában egy poliédertestet — jellemez, K pedig arányos az $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ síktól mért előjeles távolsággal. A geometriai megfogalmazás áttekinthetővé teszi a feladat megoldását.

Hasonló szerepe van az n dimenziós tér szerepeltetésének az n változós lineáris függvények szélsőértékeinek meghatározása során, ahol a feltételeket n változós lineáris egyenlőtlenségek fejezik ki.

Ilyen jellegű feladatok tartoznak a *lineáris programozás* témakörébe. A sokváltozós, nagyméretű tervezési feladatok gyors megoldását megkönnyíti a számítógépek alkalmazása.

Most megvizsgáljuk a **179.** feladat segédtételének érvényességi körét. Vegyünk fel a térben k darab síkot, legyenek ezek normálvektorai az $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_k$ egységvektorok. A síkok egy-egy tetszőleges pontjának helyvektorát $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_k$ jelölje. A tér tetszőleges P pontjának helyvektorát $\mathbf{p}$-vel jelölve, a P pontnak a lapoktól mért előjeles távolságösszege

$$D=\mathbf{n}_1(\mathbf{p}-\mathbf{r}_1)+\mathbf{n}_2(\mathbf{p}-\mathbf{r}_2)+\ldots+\mathbf{n}_k(\mathbf{p}-\mathbf{r}_k)= \\ =(\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\ldots+\mathbf{n}_k)\mathbf{p}-(\mathbf{n}_1\mathbf{r}_1+\mathbf{n}_2\mathbf{r}_2+\ldots+\mathbf{n}_k\mathbf{r}_k). \tag{2}$$

Vezessük be az $\mathbf{n}=\mathbf{n}_1+\mathbf{n}_2+\ldots+\mathbf{n}_k$ jelölést.

Ha $\mathbf{n}\neq 0$, *akkor létezik* (végtelen sok) *olyan* $\mathbf{q}$ *helyvektor, melyre*

$$\mathbf{n}_1\mathbf{r}_1+\mathbf{n}_2\mathbf{r}_2+\ldots+\mathbf{n}_k\mathbf{r}_k+D=\mathbf{n}\mathbf{q}.$$

Ekkor (2) *a következő alakba írható:* $0=\mathbf{n}(\mathbf{p}-\mathbf{q})$.

Tehát adott D mellett a (2)*-nek megfelelő* $\mathbf{p}$ *vektorok egy* $\mathbf{n}$ *normálvektorú síkot határoznak meg* (ennek egy pontját $\mathbf{q}$ jelöli ki).

Ha $\mathbf{n}=\mathbf{0}$, *akkor*

$$D=(\mathbf{n}_1\mathbf{r}_1+\mathbf{n}_2\mathbf{r}_2+\ldots+\mathbf{n}_k\mathbf{r}_k) \tag{3}$$

független $\mathbf{p}$*-től, tehát a tér minden pontjának az említett lapoktól mért előjeles távolságösszege állandó.*

Ebből kiolvashatjuk a következő tételt:

Ha egy egységvektorokból álló zárt vektorlánc vektoraira sorban merőleges síkokat bocsátunk, akkor a tér minden pontjának a lapoktól mért előjeles távolságösszege állandó.

A *44. jegyzet*ben megmutattuk, hogy a poliédereknél a befelé irányított lapterületvektorok összege 0. Ha tehát a poliéderlapok egyenlő területűek, akkor ezzel a területértékkel osztva, azt kapjuk, hogy a befelé irányított normál egységvektorok összege is zérus. Az előbbi tétel feltételei teljesülnek, ezért az állítás is igaz.

Ebből következik, hogy bármely szabályos testre a belső pontoknak a lapoktól mért távolságösszege állandó. De igaz ez az egyenlő oldalú tetraéderre is (ezt már a **179.** feladat bizonyításánál is láttuk), más tetraéderre viszont nem igaz *(53. jegyzet)*.

49. Az n dimenziós affin geometria és euklideszi geometria

Láttuk, hogy a sík (és a tér) rendezett pontpárjait osztályokba sorolva, olyan vektorokhoz jutottunk, melyek a vektorösszeadásra és a számmal való szorzásra nézve lineáris teret alkotnak.

Járjuk végig a fordított utat általánosabban.

Tekintsünk egy a valós számtesten értelmezett n-dimenziós lineáris teret, $\mathbf{L}_n$-et. Az A_n n-dimenziós affin tér vektorait és pontjait $\mathbf{L}_n$ segítségével axiomatikusan értelmezzük:

1. Az A_n minden rendezett pontpárjához hozzárendeljük $\mathbf{L}_n$ egy-egy elemét, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}=\ldots=\mathbf{a}$ jelöli, hogy az AB, CD, ... rendezett pontpárokhoz $\mathbf{L}_n$ $\mathbf{a}$-val jelölt elemét rendeljük.

2. Ha O az A_n tetszőleges pontja, és $\mathbf{a}$ az $\mathbf{L}_n$ tetszőleges eleme, akkor az A_n térnek egyetlen olyan A pontja van, melyre $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$.

3. Ha $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$, akkor $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Az így definiált A_n affin térben minden definíció, így az egyenes és a kétdimenziós „sík" definíciója is (a *46. jegyzet*nek megfelelően) $\mathbf{L}_n$ segítségével történik. k darab független elem segítségével k-dimenziós „síkot" definiálhatunk stb.

Ha a kiindulásnál $\mathbf{L}_n$ helyett egy valós számtesten értelmezett euklideszi térből, $\mathbf{E}_n$-ből indulunk ki, akkor az előbbi axiomatikus definícióval az E_n n dimenziós euklideszi térhez jutunk. Az $\mathbf{E}_n$-beli skaláris szorzat segítségével definiálható E_n pontpárjainak (vektorainak) merőlegessége, a *Cauchy—Bunyakovszkij* egyenlőtlenség segítségével pontpárok (vektorok) hajlásszöge stb. Mindezek 2 és 3 dimenzióban a már megismert eredményekhez vezetnek.

$\mathbf{L}_n$, illetve $\mathbf{E}_n$ gyanánt a valós szám n-esek halmazát szokás választani, az utóbbi esetben a skaláris szorzatot a *3. jegyzet*nek megfelelően választják.

Az A_n, ill. E_n tér geometriája az n dimenziós affin geometria, illetve eukleideszi geometria. Ennek bővebb kifejtése az algebra és a geometria szoros kapcsolatára, az algebrai és geometriai struktúrák kapcsolatára utal.

50. A komplex számsík

A síkban egymásra merőleges $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ egységvektorokat megadva, a sík vektoraihoz komplex számokat rendelhetünk a következőképpen: a $\mathbf{z}=x\mathbf{e}_1+y\mathbf{e}_2$ vektorhoz a $z=x+yi$ komplex számot rendeljük (x, y valós számok). A megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, továbbá műveletartó:

ha $\quad \mathbf{z}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 \to x_1 + y_1 i = z_1,$

$\quad\quad \mathbf{z}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 \to x_2 + y_2 i = z_2,$

akkor $\quad \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \to z_1 + z_2;$

ha $\quad \mathbf{z} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \to x + yi = z,$

és λ valós szám, akkor $\quad \lambda\mathbf{z} \to \lambda z.$

A közönséges vektorokkal szemben a komplex számok használata újat hoz annyiban, hogy a komplex számok körében értelmezett szorzás segítségével értelmezhetjük a sík vektorainak olyan szorzását, amelynél az eredmény síkbeli vektor:

ha $\quad \mathbf{z}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_1 \leftrightarrow x_1 + y_1 i = z_1,$

$\quad\quad \mathbf{z}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 \leftrightarrow x_2 + y_2 i = z_2,$

akkor $\quad \mathbf{z}_1\mathbf{z}_2 = (x_1x_2 - y_1y_2)\mathbf{e}_1 + (x_1y_2 + y_1x_2)\mathbf{e}_2 \leftarrow$

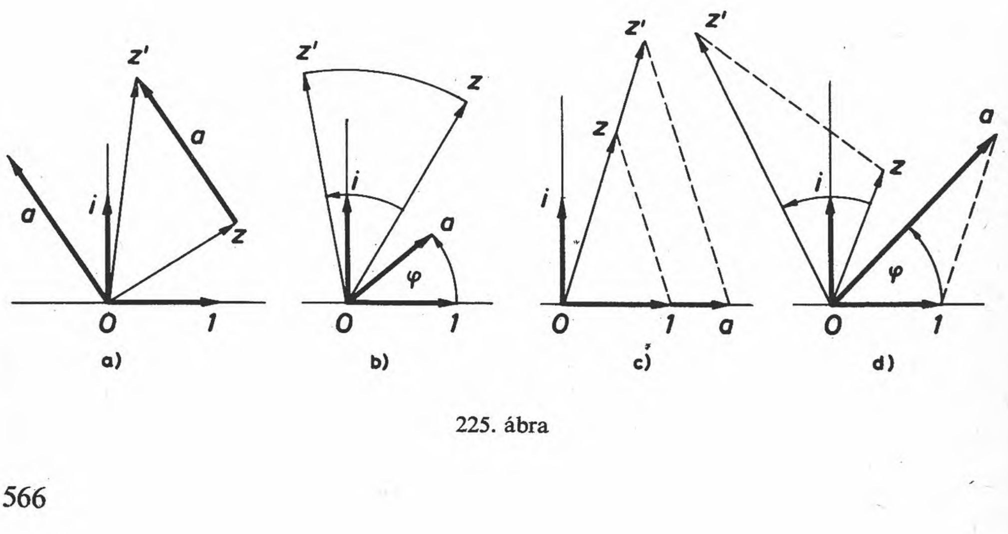
$\quad\quad \leftarrow z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i.$

Ha felveszünk a síkban egy O kezdőpontot, akkor a sík pontjait jellemző helyvektorokat és a többi vektort is a nekik megfelelő komplex számokkal helyettesíthetjük. Ilyenkor beszélünk komplex számsíkról.

A vektorok trigonometrikus alakja lehetőséget nyújt a komplex számok trigonometrikus alakjának bevezetésére úgy, ahogy ezt a *17. jegyzet*ben tettük.

Ezzel a vektorok szorzását geometriailag is szemléltethetjük.

Lehetőség nyílik a komplex számokkal végzett műveletek geometriai felhasználására is.



225. ábra

Az euklideszi sík már megismert transzformációi könnyen jellemezhetők a komplex számokkal végzett műveletek segítségével. Ezek közül a legfontosabbakat vesszük sorra.

A komplex számsík Z pontjához hozzárendeljük a Z' pontot (a megfelelő komplex számok z, illetve z').

1. Legyen $z'=z+a$, ahol $a\neq 0$ rögzített komplex szám. Így a komplex számsík eltolását kapjuk *(225/a ábra)*.

2. $z'=az$, ahol $a=\lambda(\cos\varphi+i\sin\varphi)\neq 0$ rögzített komplex szám:

a) ha $\lambda=1$, akkor φ irányított szögű forgatásról *(225/b ábra)*;

b) ha $\lambda\neq 1$ és $\varphi=0$, akkor O középpontú, λ arányú, középpontos hasonlóságról *(225/c ábra)*;

c) ha $\lambda\neq 1$ és $\varphi\neq 0$, akkor 0 körüli, λ arányú, φ irányított szögű forgatás nyújtásról van szó *(225/d ábra)*.

Mindezeket felhasználtuk a **130.**, **132.**, **137.** feladat megoldásában.

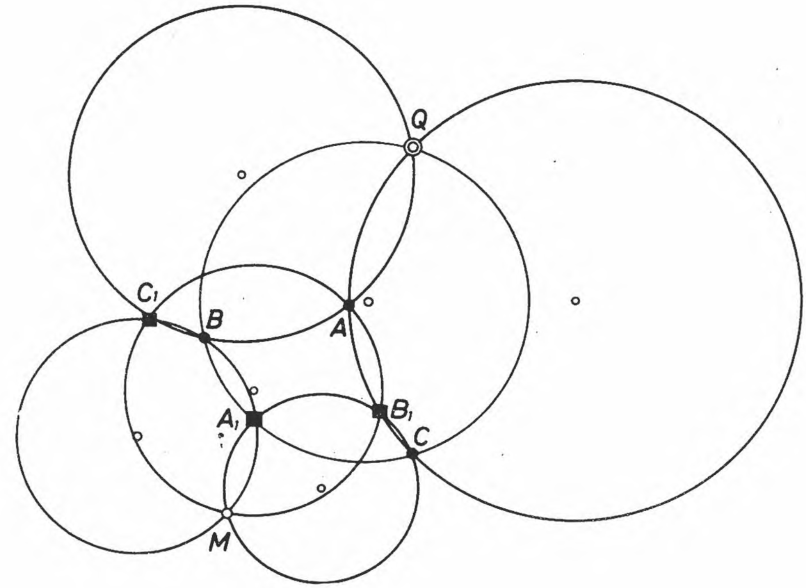
51. A körgeometria és a zárt komplex számsík

Az „Erlangeni program" szellemében megtehetjük, hogy az euklideszi síkgeometriában a pont és egyenes helyett a pontot és „kört" választjuk alapelemeknek, mégpedig úgy, hogy a köröket és az egyeneseket is a „körök" közé soroljuk. A körök és az egyenesek különbségét a következőképpen szüntetjük meg:

1. Az euklideszi sík minden egyeneséhez egyetlen ideális pontot csatolunk, ezzel mintegy az egyenesek „végeit összeragasztjuk", a síkot egyetlen ponttal lezárjuk. Így nyerjük a *Mőbius*-féle síkot (vagy körgeometriai síkot). Ebben a közönséges pontok és az ideális pont szerepe már nem különbözik.

2. Ekvivalenseknek tekintünk két alakzatot, ha létezik a *Mőbius*-síknak olyan egy-egy értelmű „kört körbe" vivő (körtartó) leképezése, amely az egyik alakzatot a másiknak felelteti meg.

A *Mőbius*-sík körtartó leképezései a kompozíció műveletére nézve csoportot alkotnak, a körgeometriai csoportot. A *körgeometria* azokkal a tulajdonságokkal foglalkozik, amelyek az előbbi csoport leképezéseinél változatlanok (invariánsak). A körgeometria is egy nem euklideszi geometria. (Mi az euklideszi sík segítségével definiáltuk a *Mőbius*-síkot, de ez definiálható axiomatikusan a „körök" és pontok illeszkedésére a „köri" pontok elrendezésére és az ekvivalen-



226. ábra

ciát értelmező csoport szerkezetére vonatkozó axiómák alapján is.) *(41. jegyzet)*.

Tipikusan körgeometriai tétel a *Miquel*-tétel *(226. ábra)*: *Ha a*

$$QAC_1B, \quad QBA_1C, \quad QCB_1A,$$
$$MAC_1B_1, \quad MBA_1C_1, \quad MCB_1A_1$$

pontnégyesek közül öt pontnégyes egy-egy „körön" van, akkor a hatodik pontnégyes is egy „körön" van.

Ha a *226. ábrá*ra olyan egy-egy értelmű „körtartó" leképezést alkalmazunk, amelynél a Q pontnak a sík ideális pontja felel meg, akkor a **204.** feladat *148. ábrá*ján szereplő elhelyezkedéshez jutunk: az QAC_1B, QBA_1C, QCB_1A „körök" egyenesek.

A komplex számok segítségével tárgyalhatók a körgeometria kérdései is. Vázoljuk ennek lehetőségét. A komplex számokat a ∞ szimbólummal „zárjuk le". A ∞ szimbólum és a közönséges komplex számok között a következő „műveleteket" definiáljuk:

(1) $$\frac{a\infty+b}{c\infty+d}=\frac{a}{c} \quad (c\neq 0);$$

$$\infty + z = z + \infty = \infty; \quad \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty \, (z \neq 0); \quad \frac{z}{\infty} = 0, \text{ és } \frac{z}{0} = \infty \, (z \neq 0)$$

Az ∞ szimbólummal lezárt „komplex számok" halmazát egy-egy értelműen képezik le önmagára a

$$(2) \quad z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{és} \quad (3) \quad z' = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

alakú leképezések, ahol az a, b, c, d közönséges komplex számokra $ad-bc \neq 0$. (Pl. a (2) leképezésnél $\infty \to \frac{a}{c}$; $-\frac{d}{c} \to \infty$ az (1) szabályok szerint.)

Ha az euklideszi sík O pontjából kiindulva, a sík pontjaihoz komplex számokat rendelünk, a síkot Mőbius-síkká lezáró ideális ponthoz pedig a ∞ szimbólumot rendeljük, akkor a zárt komplex síkhoz jutunk.

A (2), (3) *alakú leképezések és csak ezek a Mőbius-sík egy-egy értelmű „kör"-tartó leképezéseit értelmezik.*

Ennek két vonatkozását is említjük.

a) A $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ behelyettesítésével látszik, hogy a *Mőbius*-sík minden „körének" közönséges pontjai

$$(4) \qquad Az\bar{z} + B\bar{z} + \bar{B}z + C = 0$$

alakú egyenletet elégítenek ki, ahol A és C valós számok, $\bar{B}$ jelenti a B-hez konjugált komplex számot, továbbá $B\bar{B} - AC > 0$.

(4) akkor és csak akkor jelent egyenesen levő pontokat, ha $A = 0$. (2) és (3) helyettesítésével is meggyőződhetünk róla, hogy a (4) alakú egyenletet kielégítő pontok képei is (4) alakú egyenletnek tesznek eleget.

A **191.** feladatban a $z = u + iv$ sík $mu - v = 0$ egyenese (4)-nek megfelelően

$$(4') \qquad (m+i)z + (m-i)\bar{z} = 0; \quad m \neq 0.$$

A leképezés

$$z' = \frac{1+z}{1-z}, \quad \text{inverze} \quad z = \frac{z'-1}{z'+1}$$

alakú volt. A $z' = x + iy$ képpontok

$$(m+i)\frac{z'-1}{z'+1} + (m-i)\frac{\bar{z}'-1}{\bar{z}'+1} = 0$$

egyenletet elégítenek ki. A közös nevezőre hozás és a műveletek elvégzése után azt kapjuk, hogy a képgörbe pontjai a (4) alakú

$$(4'') \qquad mz'\bar{z}'+iz'+(-i)\bar{z}'-m=0 \quad (m\neq 0)$$

egyenletet elégítik ki, azaz $m(x^2+y^2)-2y-m=0$, körön levő pontokhoz jutottunk.

b) A *Mőbius*-sík tetszőleges z_1, z_2, z_3, z_4 (különböző) „komplex számokkal" jellemzett pontnégyeséhez (z_1, z_2, z_3, z_4)-gyel jelölt komplex számot, kettősviszonyt rendelünk:

$$(5) \qquad (z_1, z_2, z_3, z_4)=\frac{(z_1-z_3)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_1-z_4)}.$$

Ha z_1, z_2, z_3, z_4 valamelyike ∞, akkor a kettősviszonyt az (1)-ben bevezetett műveleti szabályokkal értelmezhetjük.

Kissé hosszadalmas számolással megmutathatjuk, hogy a (2) leképezéseknél $(z_1', z_2', z_3', z_4')=(z_1, z_2, z_3, z_4)$, a (3) alakú leképezéseknél viszont $(z_1', z_2', z_3', z_4')=$

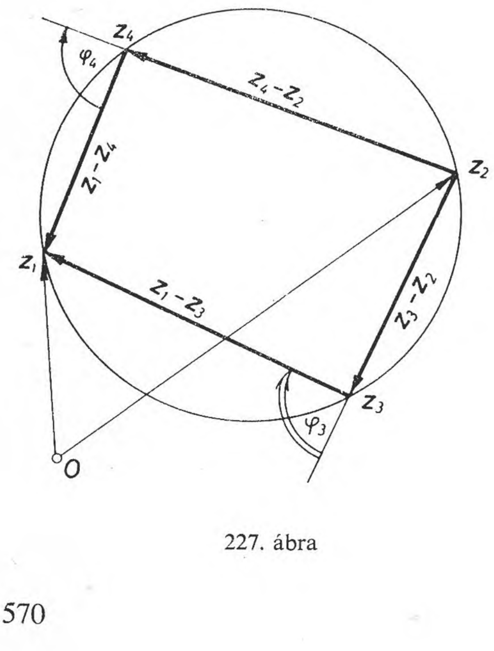
$=\overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}$.

Könnyen igazolható a következő fontos tétel.

A z_1, z_2, z_3, z_4 pontok akkor és csak akkor vannak egy „körön", ha

$$(z_1, z_2, z_3, z_4)=\overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}=\text{valós szám}.$$

A *227. ábrán* látható, hogy a $\dfrac{z_1-z_3}{z_3-z_2}$ komplex szám irányszöge φ_3, a $\dfrac{z_4-z_2}{z_1-z_4}$ irányszöge φ_4. A kettősviszony akkor és csak akkor valós, ha $\varphi_3+\varphi_4$ a 180° egész számú többszöröse, ez egyenértékű a „köri" elhelyezkedéssel.



227. ábra

Ezután világos, hogy a (2), (3) alakú leképezések „körtartó" leképezések, hiszen valós kettősviszonyú, azaz „köri" pontnégyes képe is valós kettősviszonyú, azaz „köri" pontnégyes.

A körgeometria az euklideszi síkgeometria általánosítása, mert az ideális pontot önmagába vivő „körtartó" leképezések egyenestartók. Ekkor (2) és (3)-ban $c=0$, lényegében az euklideszi sík hasonlósági transzformációihoz jutunk.

52. Az inverzió

A **135., 136.** feladat megoldásában szereplő inverzió is a körgeometriai csoporthoz tartozik, ha definícióját így értelmezzük:

Az r sugarú kör O középpontjához rendeljük a sík ideális pontját, ehhez az ideális ponthoz pedig az O pontot.

A sík további tetszőleges P pontjához az OP félegyenesnek azt a P' pontját rendeljük, amelyre

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

Válasszuk ugyanis kezdőpontnak az O pontot.

A $z=x+iy$ komplex számmal jellemzett ponthoz azt a $z'=x'+y'i$ pontot

rendeljük, melyre $z' = \dfrac{r^2}{|z|} \cdot \dfrac{z}{|z|}$, azaz $z' = \dfrac{r^2 z}{z\bar{z}}$, tehát

(1) $\quad z' = \dfrac{r^2}{\bar{z}} \quad$ és $\quad$ (2) $\quad z = \dfrac{r^2}{\bar{z}'}$

éppen az *51. jegyzet*ben szereplő (3) típusú leképezés.

Azonnal adódik, hogy az inverzió a *Möbius*-sík „körtartó" leképezése. Az inverzió involutív leképezés, tehát az önmagával képezett kompozíciója az azonos leképezés: ha $z' = \dfrac{r^2}{\bar{z}}$ és $z'' = \dfrac{r^2}{\bar{z}'}$, akkor $z'' = r^2 : \dfrac{r^2}{z} = z$.

Az inverzió leglényegesebb tulajdonságai szintetikus módon is tárgyalhatók. Megemlítjük a következő tételt, mely *Poncelet* tételének *(40. jegyzet)* körgeometriai analogonja.

Tegyük fel, hogy a k és k' körök egyike a másikat tartalmazza. A külső, k kör egy P pontjából kiindulva, k-t P-ben belülről, k'-t kívülről érintő k_1 kört rajzolunk, majd tovább k-t belülről, k'-t és k_1-et kívülről érintő kört rajzolunk, és így tovább. Tegyük fel, hogy a k_n kör, mely k-t belülről k'-t és k_{n-1}-et kívülről érinti, kívülről érinti k_1-et is. Állítás: a k kör bármelyik pontjából is indulunk ki, a fenti módon rajzolt körök közül az n-edik mindig érinti az elsőt.

A bizonyítás nagyon egyszerű, ha a k és k' köröket inverzióval koncentrikus körökbe transzformáljuk.

53. Egyenlő oldalú tetraéder

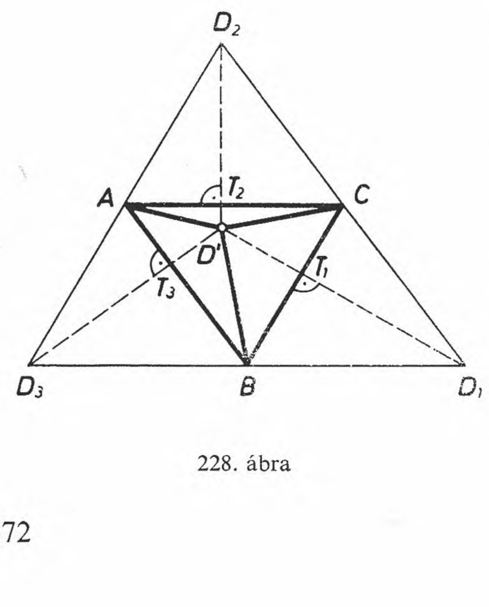
A **159.**, **160.**, **179.** fontos szerepet játszott az egybevágó lapokkal rendelkező, ún. *egyenlő oldalú tetraéder* (szfenoid).

Megmutatjuk, hogy egybevágó háromszöglapokból akkor és csak akkor készíthető tetraéder, ha ez a háromszög hegyesszögű.

Tegyük fel, hogy létezik egyenlő oldalú tetraéder. Az ABC lapot kiszemelve, hajtsuk le a többi lapot is az ABC síkba *(228. ábra)*. Ekkor olyan $D_1D_2D_3$ háromszöget kapunk, melynek $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ a középvonalai.

A tetraéder D csúcsának D' vetülete nyilván a $D_1D_2D_3$ háromszög magasságvonalainak metszéspontja, hiszen pl. az ACD lap lehajtása során D az AC-re merőleges síkban mozog, s ez a sík az ABC síkot AC-re merőleges egyenesben metszi. D' közelebb van az AC egyeneshez, mint D_2, hiszen a DT_2 szakasz nincs az ABC síkban, vetülete, $D'T_2$ rövidebb, mint a valódi hossza, D_2T_2. Ugyanezt mondhatjuk el a többi lehajtásnál is. Mindebből következik, hogy D' a $D_1D_2D_3$ háromszög belsejébe esik, és a $D_1D_2D_3$, valamint az ABC háromszög is hegyesszögű.

Fordítva, az ABC hegyesszögű háromszögből kiindulva, készítsük el a *228. ábrán* látható $D_1D_2D_3$ háromszöget. Hajtsuk fel a BCD_1, CAD_2, ABD_3 lapokat, ekkor D_1 a BC-re, D_2 a CA-ra, D_3 az AB-re merőleges síkban mozog. Ezek a síkok egymást az ABC síkra merőleges m egyenesben metszik, mely a síkot a $D_1D_2D_3$ háromszög D' magasságpontjában döfi. D' a háromszög belsejében van, ezért $D'T_1<D_1T_1$, $D'T_2<D_2T_2$, $D'T_3<D_3T_3$. Tehát elérhető, hogy a felhajtás után D_1, D_2 és D_3 vetülete is D' legyen. Minthogy azonban $D_2A=D_3A=a$, $D_3B=D_1B=b$, és $D_1C=D_2C=c$, ezért a felhajtás után D_1, D_2, D_3 egybeesik, a keresett tetraéder D csúcsához jutunk.



228. ábra

Minden tetraédert paralelepipedonba foglalhatunk (**157.**, **179.** feladat). Az egyenlő oldalú tetraéder esetében éppen téglatesthez jutunk, hiszen a tetraéder egy tetszőleges szemközti élpárja éppen a téglatest két szemközti lapjának kitérő helyzetű lapátlópárja, ez a két átló pedig egyenlő. Ha a téglatest kocka, akkor a szabályos tetraéderről van szó.

Az egyenlő oldalú tetraéder a sza-

bályos tetraédernek sok tulajdonságával rendelkezik (a 160. feladatban is láttuk már ezt).

Ekvivalensek a következő állítások:

A tetraéder lapjai egybevágók; a szemközti élek egyenlők: a lapok egyenlő területűek; a beírt és körülírt gömb középpontja egybeesik; a szemközti lapszögek egyenlők; a súlypont és a köré írt gömb középpontja egybeesik stb.

54. A háromszög oldalait érintő körökről, Hérón képlete

Az ABC háromszög oldalait $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, a beírt kör sugarát ϱ, az a oldalhoz írt k_a kör sugarát ϱ_a jelölje, a háromszög területe legyen t. Vezessük be még az $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ jelölést. A körök érintéspontjait, középpontjait a *229. ábra* szerint jelöljük. A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlők, ezért a beírt kör esetében

$$AC_0=AB_0, \quad CB_0=CA_0, \quad BA_0=BC_0.$$

Tehát
$$2s=AB+BC+CA=2(AB_0+CA_0+BC_0).$$

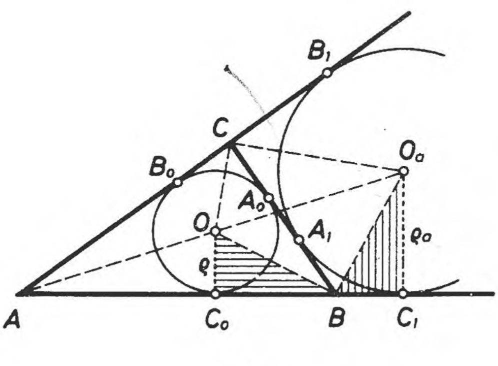
De akkor

(1)
$$AC_0=AB_0=s-(CA_0+BC_0)=s-(CA_0+BA_0)=s-a,$$
$$BA_0=BC_0=s-b, \quad CB_0=CA_0=s-c.$$

A k_a hozzáírt kör esetében $AB_1=AC_1$, $CB_1=CA_1$, $BA_1=BC_1$, ezért

$$AB_1=AC_1=AC+CA_1=AB+BA_1=$$
$$=\frac{1}{2}(AB+BC+CA)=s,$$

(2)
$$CB_1=CA_1=s-b,$$
$$BA_1=BC_1=s-c.$$



229. ábra

A háromszög t területét kifejezhetjük ϱ és ϱ_a segítségével is:

$$t=t_{ABO}+t_{BCO}+t_{CAO}=$$
$$=\frac{1}{2}\varrho a+\frac{1}{2}\varrho b+\frac{1}{2}\varrho c=\varrho s,$$

$$(3)\qquad \varrho=\frac{t}{s},$$

$$t=t_{ABO_a}+t_{ACO_a}-t_{BCO_a}=\frac{1}{2}\varrho_a c+\frac{1}{2}\varrho_a b-\frac{1}{2}\varrho_a a=\varrho_a(s-a),$$

$$(4)\qquad \varrho_a=\frac{t}{s-a}.$$

Az OC_0B és BC_1O_a derékszögű háromszögek hasonlók, hiszen a belső és külső szögfelezők merőlegessége miatt hegyesszögeik is egyenlők:

$$OC_0 : C_0B=BC_1 : C_1O_a, \quad \text{azaz} \quad \varrho : (s-b)=(s-c) : \varrho_a.$$

(3) és (4) behelyettesítésével megkapjuk *Hérón* képletét:

$$(5)\qquad t=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$(6)\qquad \varrho=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}, \quad \varrho_a=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}.$$

A háromszög köré írt kör sugarát és a félszögek szögfüggvényeit is kifejezhetjük az oldalak segítségével. A $2r\sin\alpha=a$ és a $t=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ összefüggésből

$$r=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{abc}{4t}=\frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

A *229. ábrá*ról (6) alapján

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{OC_0}{AC_0}=\frac{\varrho}{s-a}=\frac{t}{s(s-a)}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

A $t=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=bc\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$ összefüggésből következik:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \quad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

A **112—116.** feladatok ehhez a témakörhöz csatlakoznak.

55. A szabályos háromszög szélsőérték-tulajdonságairól

A **170.**, **171.**, **172.** feladatokban és a hozzájuk kapcsolódó megjegyzésekben több olyan egyenlőtlenséget, szélsőérték-feladatot is látunk, melynél a szabályos háromszög kitüntetett szerepet játszik.

Fontosak az alábbi tételek:

Azonos 2s kerületű háromszögek területei között a szabályos háromszög területe a legnagyobb, a maximum $\frac{1}{3\sqrt{3}}s^2$.

Ez a *Hérón* képletből a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján azonnal következik:

$$t^2=s(s-a)(s-b)(s-c)\leqq s\left\{\frac{1}{3}[(s-a)+(s-b)+(s-c)]\right\}^3=\frac{1}{27}s^4,$$

az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $(s-a)=(s-b)=(s-c)$, azaz $a=b=c$.

A háromszög köré írt kör r sugara és a beírt kör ϱ *sugara között fennáll a* $\varrho\leqq\frac{r}{2}$ *egyenlőtlenség, melyben az egyenlőség csak szabályos háromszög esetében teljesül.*

Ez következik *Euler* tételéből *(40 jegyzet)*.

$$r(r-2\varrho)=d^2>0, \qquad \frac{r}{2}\geqq\varrho,$$

hiszen a beírt és körülírt kör középpontja csupán a szabályos háromszögnél esik egybe.

Más bizonyítási lehetőség: Tudjuk, hogy a háromszög *Feuerbach*-körének sugara $\frac{r}{2}$, az oldalakkal párhuzamosan ehhez érintőket húzva, az eredetit tartalmazó háromszöget kapunk, mely akkor és csak akkor azonos az eredetivel, ha a *Feuerbach*-kör egyben beírt kör is, azaz a háromszög szabályos.

Érdekes és nagyon éles egyenlőtlenséget ad az *Erdős—Mordell*-tétel. *Ha az ABC háromszög O belső pontjából a BC, CA, AB oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjait* A_0, B_0, C_0 *jelöli,* akkor

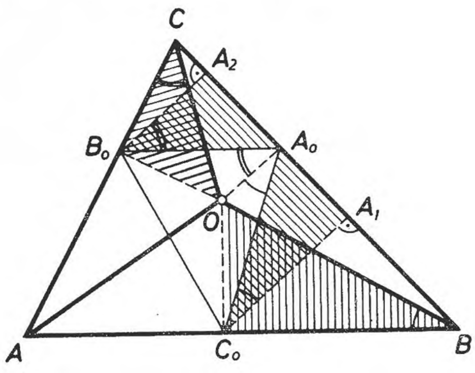
(1) $$OA+OB+OC\geqq 2(OA_0+OB_0+OC_0).$$

Az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha ABC szabályos háromszög, és O ennek a középpontja.

Bizonyítás: A bal oldal csökkentésével (nem növelésével) a jobb oldalhoz juthatunk.

Szemeljük ki például az OA szakaszt. A C_0B_0 szakasz nem rövidebb, mint a BC oldalra merőleges vetülete, A_1A_2 *(230. ábra)*. Ezért

(2) $$OA\geqq OA\frac{A_1A_2}{C_0B_0}=\frac{OA}{C_0B_0}(A_1A_0+A_0A_2).$$



230. ábra

Az OC_0B és $A_0A_1C_0$ derékszögű háromszögek hasonlók, minthogy az OC_0BA_0 négyszög húrnégyszög, és ezért az egyíves szögek egyenlők. A hasonlóság aránya:

(3) $$\frac{A_0A_1}{OC_0}=\frac{A_0C_0}{OB}=\frac{C_0A_1}{BC_0}=\sin\beta,$$

tehát

$$A_1A_0=OC_0\sin\beta.$$

Ugyanígy az OB_0C és $A_0A_2B_0$ derékszögű háromszögek is hasonlók, és

(4) $$\frac{A_0A_2}{OB_0}=\frac{A_0B_0}{OC}=\frac{B_0A_2}{CB_0}=\sin\gamma,$$

tehát

$$A_0A_2=OB_0\sin\gamma.$$

Továbbá (3) és (4) mintájára következik:

(5) $$\frac{C_0B_0}{OA}=\sin\alpha.$$

(A háromszög A, B, C csúcsánál levő szögeket rendre α, β, γ jelöli.) (2) mintájára — ciklikus cserével — felírhatjuk az alábbiakat:

(6) $$OA\geqq OC_0\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+OB_0\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

$$OB\geqq OA_0\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+OC_0\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

$$OC\geqq OB_0\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}+OA_0\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Ezeket összeadva

(7) $$OA+OB+OC\geqq OA_0\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\right)+OB_0\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right)+$$

$$+OC_0\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)\geqq 2(OA_0+OB_0+OC_0).$$

Az utolsó lépésben felhasználtuk, hogy egy pozitív számnak és reciprokának

az összege 2-nél nem kisebb, egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a szám és így a reciproka is 1. (**51.** feladat).

Fokozatosan visszafelé haladva, láthatjuk, hogy (7)-ben és (6)-ban az egyenlőség csak $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$, azaz $\alpha=\beta=\gamma$, továbbá $B_0C_0 \parallel BC$, $C_0A_0 \parallel CA$, $A_0B_0 \parallel AB$ mellett teljesülhet, O tehát csak az ABC szabályos háromszög középpontja lehet, és ekkor (1)-ben valóban egyenlőség áll fenn.

Az *Erdős—Mordell*-tételből azonnal adódik a **170.** feladat élesítése, a

$$\frac{3}{2} \geqq \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$$

egyenlőtlenség — hegyesszögű háromszögre —, ha O-nak a háromszög köré írt kör középpontját választjuk:

$$r+r+r \geqq 2(r\cos\alpha + r\cos\beta + r\cos\gamma).$$

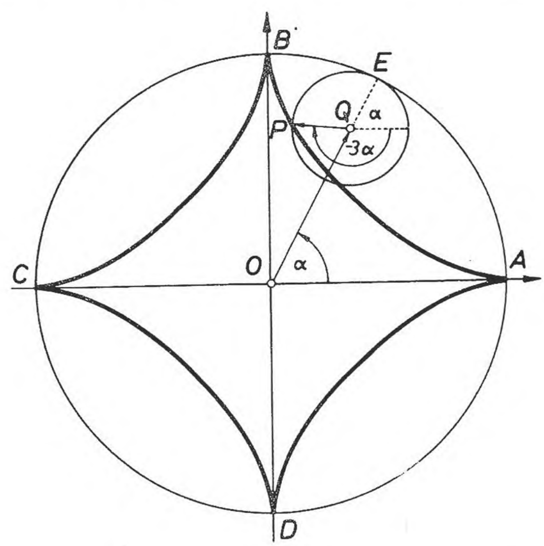
56. Az asztroidról

A **198.** feladatban megismert asztroid görbe szép geometriai származtatását kapjuk a következőképpen:

Az egységnyi sugarú K kör belsejében gördítsünk egy 1/4 sugarú k kört. A gördülő kör egy kiszemelt pontja asztroidot ír le.

Koordináta-rendszerünk kezdőpontja legyen a K kör O középpontja. A gördülő kör kiszemelt P pontja kiinduló helyzetében legyen az $A(1, 0)$ pontban *(231. ábra)*.

A k kör és így P pontjának mozgását is a k Q középpontját meghatározó $AOQ\sphericalangle=\alpha$ szöggel jellemezzük. Gördülésről van szó, ezért a K kör AE íve egyenlő a k kör PE ívével. Minthogy k sugara K sugarának negyedrésze, ezért



231. ábra

$$PQE\sphericalangle = 4AOE\sphericalangle = 4\alpha,$$

az összege 2-nél nem kisebb, egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a szám és így a reciproka is 1. (**51.** feladat).

Fokozatosan visszafelé haladva, láthatjuk, hogy (7)-ben és (6)-ban az egyenlőség csak $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$, azaz $\alpha=\beta=\gamma$, továbbá $B_0C_0 \parallel BC$, $C_0A_0 \parallel CA$, $A_0B_0 \parallel AB$ mellett teljesülhet, O tehát csak az ABC szabályos háromszög középpontja lehet, és ekkor (1)-ben valóban egyenlőség áll fenn.

Az *Erdős—Mordell*-tételből azonnal adódik a **170.** feladat élesítése, a

$$\frac{3}{2} \geqq \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$$

egyenlőtlenség — hegyesszögű háromszögre —, ha O-nak a háromszög köré írt kör középpontját választjuk:

$$r+r+r \geqq 2(r\cos\alpha+r\cos\beta+r\cos\gamma).$$

56. Az asztroidról

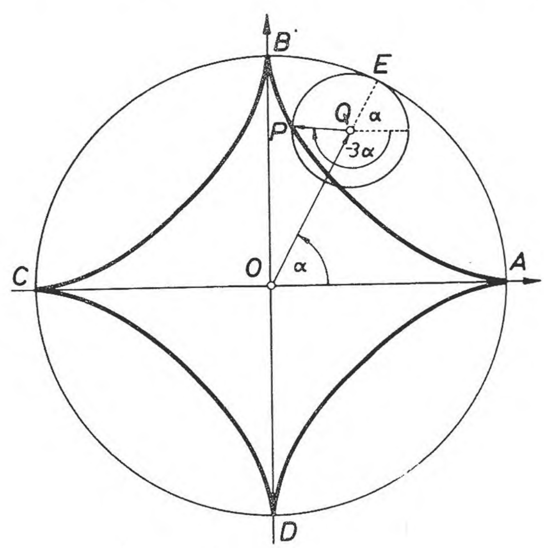
A **198.** feladatban megismert asztroid görbe szép geometriai származtatását kapjuk a következőképpen:

Az egységnyi sugarú K kör belsejében gördítsünk egy 1/4 *sugarú k kört. A gördülő kör egy kiszemelt pontja asztroidot ír le.*

Koordináta-rendszerünk kezdőpontja legyen a K kör O középpontja. A gördülő kör kiszemelt P pontja kiinduló helyzetében legyen az $A(1, 0)$ pontban *(231. ábra)*.

A k kör és így P pontjának mozgását is a k Q középpontját meghatározó $AOQ\sphericalangle=\alpha$ szöggel jellemezzük. Gördülésről van szó, ezért a K kör AE íve egyenlő a k kör PE ívével. Minthogy k sugara K sugarának negyedrésze, ezért

$$PQE\sphericalangle=4AOE\sphericalangle=4\alpha,$$



231. ábra

továbbá az $\overrightarrow{OA}=\mathbf{e}_1$ és $\overrightarrow{QP}$ vektorok hajlásszöge $(\alpha-4\alpha)=(-3\alpha)$, $\overrightarrow{OQ}$ koordinátái $\left(\frac{3}{4}\cos\alpha, \frac{3}{4}\sin\alpha\right)$, $\overrightarrow{QP}$ koordinátái $\left(\frac{1}{4}\cos(-3\alpha); \frac{1}{4}\sin(-3\alpha)\right)$. Végül is $\overrightarrow{OP}$ (x, y) koordinátáira

$$x=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos 3\alpha), \qquad y=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin 3\alpha).$$

A $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ összefüggéseket felhasználva:

$$(1) \qquad x=\cos^3\alpha; \qquad y=\sin^3\alpha.$$

Ugyanahhoz a paraméteres előállításhoz jutottunk, mint a **198.** feladatban, és ezzel a bizonyítást befejeztük.

Ha K belsejében $\frac{1}{n}$ sugarú k kört gördítünk, n „csúcsú" csillaggörbét kapunk. Érdekes a következő tétel: Ha K belsejében feleakkora sugarú k kört gördítünk, k kerületi pontjai K egy-egy átmérőjét írják le. Ennek bizonyítását az előzők után már az olvasóra bízzuk ([7]) 1926/3. feladat).

Megemlítjük, hogy a

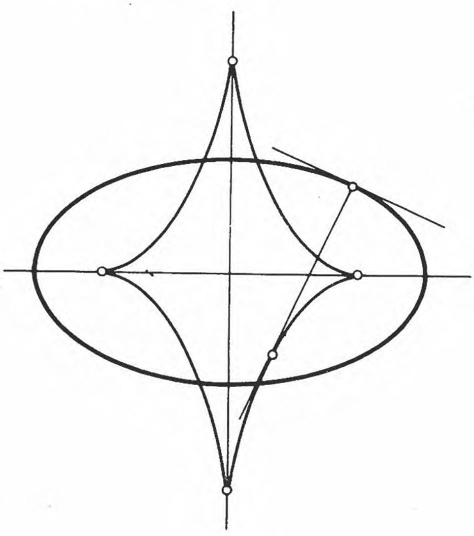
$$(2) \qquad \xi=a\cos\alpha, \quad \eta=b\sin\alpha \quad (0\leqq\alpha<2\pi;\ a>b)$$

ellipszis görbe α paraméterű pontjában az érintőre merőleges egyenest állítva, az az α paraméterű pontban érinti az

$$(3) \qquad x=\frac{c^2}{a}\cos^3\alpha, \quad y=-\frac{c^2}{b}\sin^3\alpha$$

$$(0\leqq\alpha<2\pi,\ c^2=a^2-b^2)$$

görbét, amelyet ugyancsak asztroidnak mondunk. Látható, hogy (1)-ből (3) affin leképezéssel származtatható *(232. ábra)*.



232. ábra

A (3) asztroid görbe a (2) ellipszis normálisainak burkolója, amit így is mondunk: a (3) asztroid a (2) ellipszis *evolutája*, vagy — ami ugyanazt jelenti — az ellipszis görbületi középpontjainak mértani helye ([3], [22]).

57. A differenciálegyenletekről

A 197. feladathoz kapcsolódva felmerülhet a következő újabb feladat:

Adjunk meg olyan $y=y(x)$ görbét, hogy a görbe $(x_0; y_0)$ pontjához tartozó érintő az előre megadott

(1) $$\left.\begin{aligned}\xi&=\xi(x)=\frac{3}{2}x\\ \eta&=\eta(x)=2x^2\end{aligned}\right\}\text{ parabola } x_0\text{-hoz tartozó } \left.\begin{aligned}\xi_0&=\xi(x_0)=\frac{3}{2}x_0\\ \eta_0&=\eta(x_0)=2x_0^2\end{aligned}\right\}$$

koordinátájú pontján haladjon át minden szóba jövő x_0-ra. ($x_0\neq 0$ feltevéssel élünk).

Erre az $y=y(x)$ görbére minden szóba jövő x_0-ra teljesül az $\eta(x_0)-y(x_0)=$ $=y'(x_0)\,[\xi(x_0)-x_0]$ egyenlet, vagy x_0 helyett x jelöléssel

(2) $$\eta(x)-y(x)=y'(x)\,[\xi(x)-x].$$

Az $y(x)$ függvényre egy inhomogén lineáris elsőrendű közönséges differenciálegyenletet kaptunk.

Az ilyen egyenletek általános alakja:

(3) $$y'(x)+p(x)\,y(x)=q(x).$$

A megoldást olyan x-ekre keressük, ahol $p(x)$, $q(x)$ folytonosak. Esetünkben

$$y'(x)+\frac{1}{\xi(x)-x}\,y(x)=\frac{\eta(x)}{\xi(x)-x},$$

vagy speciálisan $\xi(x)=\frac{3}{2}x$ $\eta(x)=2x^2$ mellett

(4') $$y'(x)+\frac{2}{x}\,y(x)=4x\quad (x\neq 0).$$

Az elnevezésben a „közönséges” jelző arra utal, hogy a (3) egyenletben egyváltozós függvényt keresünk. Az „elsőrendű” jelző arra utal, hogy a keresett függvénynek csak az első deriváltja szerepel. A „lineáris” jelző arra, hogy a keresett függvény és deriváltja is csak első hatványon szerepel, az inhomogén

jelző arra, hogy a (3) jobb oldalán szereplő $q(x)$ függvény nem azonosan 0 (ha $q(x)\equiv 0$, az egyenlet homogén). A differenciálegyenletekről szóló tankönyvekben láthatjuk a megoldást:

$$(5) \qquad y(x)=e^{-\int p(x)\,dx}\left\{\int \left(q(x)e^{\int p(x)\,dx}\right)\mathrm{d}x+c\right\}.$$

Itt $e=2{,}718\ldots$ a természetes logaritmus alapszáma; az e^x függvény deriváltja is e^x. A $\log_e x$ függvény deriváltja $\frac{1}{x}$, ha $x>0$, pl. $\int p(x)\,\mathrm{d}x$ egy olyan függvényt jelöl, melynek deriváltja $p(x)$ ([22]).

Az (5) képletben szereplő c valós paraméter arra utal, hogy a (3) differenciálegyenletnek egy görbesereg tesz eleget, a c paraméter más-más értékéhez más-más görbe tartozik. A (2) azt jelenti, hogy a sereg görbéihez az x abszcisszájú pontban húzott érintők valamennyien áthaladnak a $[\xi(x);\ \eta(x)]$ koordinátájú ponton.

A (4') esetben: $p(x)=\frac{2}{x}$, $q(x)=4x$, $x\neq 0$. Helyettesítsünk (5)-be. Az $\int p(x)\,\mathrm{d}x=$ $=\log_e x^2$ $(x\neq 0)$ választás megfelelő, mert $\log_e x^2$ deriváltja $\frac{2}{x}$.

$$e^{\int p(x)\,dx}=x^2, \quad e^{-\int p(x)\,dx}=x^{-2}.$$

$$\int\left(q(x)e^{\int p(x)\,dx}\right)\mathrm{d}x=\int 4x\cdot x^2\,\mathrm{d}x=x^4$$

választás megfelelő, mert x^4 deriváltja $4x^3$.

Tehát a (4') differenciálegyenlet megoldása:

$$y(x)=x^{-2}(x^4+c)=x^2+cx^{-2}.$$

Tehát visszakaptuk a feladatban szereplő görbesereget.

Ha az előre megadott $[\xi(x);\ \eta(x)]$ görbét máshogy választjuk, más görbesereget kapunk. Így messzemenően általánosíthatjuk feladatunkat.

Egyben rámutattunk arra a témakörre, amelyhez feladatunk kapcsolódik, s amelynek ismeretében még sok szép hasonló feladatot is gyárthatunk.