

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	المتتاليات العددية حلول مقترحة	سلسلة 1
<p>تمرين 1: $v_n = n\sqrt{n}$ و $u_n = \frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}}$</p>		
1	<p>لنبين باستعمال التعريف أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$</p> <p>لدينا: $\left u_n - \frac{1}{2}\right = \frac{1}{2\sqrt{n}}$: منه $u_n - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{n}+1-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$</p> <p>ليكن: $\varepsilon > 0$ ، لدينا: $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{1}{2\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)^2$</p> <p>إذن بوضع: $n_0 = E\left(\frac{1}{4\varepsilon^2}\right) + 1$ نستنتج أن:</p> <p>$n \geq n_0 \Rightarrow n \geq E\left(\frac{1}{4\varepsilon^2}\right) + 1 \Rightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow \left u_n - \frac{1}{2}\right < \varepsilon$</p> <p>بالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ ، $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \left(n \geq n_0 \Rightarrow \left u_n - \frac{1}{2}\right < \varepsilon\right)$ بالتالي:</p>	
2	<p>لنبين باستعمال التعريف أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$</p> <p>ليكن $A > 0$ ، لدينا: $v_n > A \Leftrightarrow n\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n^3 > A^2 \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{A^2}$</p> <p>إذن بوضع: $n_0 = E\left(\sqrt[3]{A^2}\right) + 1$ نستنتج أن: $n \geq n_0 \Rightarrow n \geq E\left(\sqrt[3]{A^2}\right) + 1 \Rightarrow n > \sqrt[3]{A^2} \Rightarrow v_n > A$</p> <p>بالتالي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$</p>	
<p>تمرين يستهدف استيعاب التعريف الرياضي لنهاية متتالية، فرغم قلة استعماله في جل التمارين إلا أنه يعد من أهم المفاهيم الرياضية التي تنبني عليها جل القواعد اللاحقة (مصاديق التقارب،)، المثالان بسيطان ، لكن استيعابهما سيسمح بفهم أكثر لمفهوم نهاية متتالية، حيث أن جل التلاميذ يستطيعون حساب نهاية متتالية دون إدراكهم الفعلي بهذا المفهوم.</p>		
<p>تمرين 2:</p>		
	<p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0 + 0 = 0$ (لأن: $\left \frac{\sqrt{3}}{2}\right < 1$ و $\left \frac{2}{3}\right < 1$)</p>	<p>$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$</p>
	<p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2007^n - 2008^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2008^n \left(\left(\frac{2007}{2008}\right)^n - 1\right) = -\infty$</p> <p>لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2008^n = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2007}{2008}\right)^n = 0$</p>	<p>$b_n = 2007^n - 2008^n$</p>
	<p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n + 1}{5^n + 7} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{-2}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 + 7 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{0 + 0}{1 + 7 \times 0} = 0$</p>	<p>$c_n = \frac{(-2)^n + 1}{5^n + 7}$</p>
	<p>$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2^n} + \sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n} + 3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{2^n} + \sqrt{3^n}}{(\sqrt{3})^n}}{\frac{\sqrt{2^n} + 3^n}{(\sqrt{3})^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^n + 1}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^n} + 1} = \frac{0 + 1}{\sqrt{0} + 1} = 1$</p>	<p>$d_n = \frac{\sqrt{2^n} + \sqrt{3^n}}{\sqrt{2^n} + 3^n}$</p>

$\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots + \frac{2^n}{3^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$	$e_n = 1 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{2^n}{3^n}$
<p>بملاحظة أن: $\forall n \in \mathbb{N} \mid f_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ وأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$</p> <p>فحسب مصاديق تقارب متتالية نستنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$</p>	$f_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \sin(7^n)$
<p>بملاحظة أن: $\forall n \in \mathbb{N} \mid u_n \geq n-1$ (لأن: $\forall x \in \mathbb{R} - \sin(x) \geq -1$)</p> <p>وأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ فحسب مصاديق تقارب متتالية نستنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$</p>	$u_n = n - \sin(n^5)$
<p>لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} \mid v_n = \frac{1 + \frac{\sin n}{7^n}}{1 + \frac{\cos(5^n)}{7^n}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$</p> <p>(لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0 \mid \forall n \in \mathbb{N} \mid \left \frac{\cos(5^n)}{7^n} \right \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ و $\forall n \in \mathbb{N} \mid \left \frac{\sin n}{7^n} \right \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$)</p>	$v_n = \frac{7^n + \sin n}{7^n + \cos(5^n)}$
<p>بملاحظة أن: $\forall n \in \mathbb{N}^* \mid w_n \geq n$ (لأن: $\forall n \in \mathbb{N} \mid (n \geq 1 \Rightarrow n^n \geq n^1)$)</p> <p>وأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ فحسب مصاديق تقارب متتالية نستنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$</p>	$w_n = n^n$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$	$x_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
<p>تذكر أن: $a < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ و $a > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$</p> <p>$\begin{cases} w_n \leq u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$</p>	
<p>تمرين 3: $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$</p>	
<p>لدينا: $\forall n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} = \frac{\sqrt{n^2 + n + 1} - n - 1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{n+1}} = \frac{n}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2 + n} + n)} \geq 0$</p> <p>إذن: $\forall n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$</p>	1
<p>لدينا حسب السؤال السابق: $\forall n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$</p> <p>ليكن $n \in \mathbb{N}^*$، إذن: $\frac{1}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{2} - \sqrt{1}$ و $\frac{1}{\sqrt{3}} \geq \sqrt{3} - \sqrt{2}$ و ... و $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$</p> <p>بجمع هذه المتفاوتات طرفا بطرف نجد: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$</p> <p>منه: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ بالتالي: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n} - 1$</p> <p>بالتالي: $\forall n \in \mathbb{N}^* \mid u_n \geq \sqrt{n}$</p>	2
<p>بما أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \mid u_n \geq \sqrt{n}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$</p>	3
<p>تمرين توليفي لمتتاليات معرفة على شكل مجموع (سلسلة متتاليات)</p>	
<p>تمرين 4: $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$ لكل $n \in \mathbb{N}^*$</p>	
<p>$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{6\sqrt{5} + 5\sqrt{6}}{30}$ ، $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$</p>	1

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{11}}{11} + \frac{\sqrt{12}}{12}$$

🌱 الهدف من هذا السؤال هو فهم طبيعة المتتالية وليس الحساب

لنبين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$ لدينا لكل عدد صحيح طبيعي k :

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow n^2+1 \leq n^2+k \leq n^2+n \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

إذن: $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \dots \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ و $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

بجمع المتفاوتات طرفاً بطرف نجد: $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

يمكن استعمال الرمز \sum للتعبير عن المجموع وجمع أطراف المتفاوتات، لكننا أثّرنا كتابة متفاوتات بعد تعويض k بقيمة من 1 إلى n حتى يكون الحساب مفهوماً.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} = \sqrt{1} = 1$$

بما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

🌱 المتتالية u_n تكتب اختصاراً $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^2+k}}$ ، نذكر أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^m}$

تمرين 5: $u_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)}$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 - 0 = 1$$

🌱 تمرين سهل، لكنه صعب بغياب السؤال الأول. من الأفضل تذكر متساوية السؤال الأول فهي جد مفيدة في كثير من الأسئلة.

تمرين 6: $u_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + E(3\pi) + \dots + E(n\pi)}{n^2}$

لدينا: $\forall k \in \mathbb{N} \quad k\pi - 1 < E(k\pi) \leq k\pi$ ، إذن: $\sum_{k=1}^n (k\pi - 1) < \sum_{k=1}^n E(k\pi) \leq \sum_{k=1}^n k\pi$

🌱 (قمنا بجمع المتفاوتات المحصل عليها بعد تطبيق العبارة السابقة على كل من 1, 2, 3, ..., n)

$$\pi \frac{n(n+1)}{2} - n < \sum_{k=1}^n E(k\pi) \leq \pi \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{منه:} \quad \pi \left(\sum_{k=1}^n k \right) - n < \sum_{k=1}^n E(k\pi) \leq \pi \sum_{k=1}^n k$$

$$\pi \frac{(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} < u_n \leq \pi \frac{(n+1)}{2n} \quad \text{أي} \quad \pi \frac{(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} < \frac{\sum_{k=1}^n E(k\pi)}{n^2} \leq \pi \frac{(n+1)}{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{فإن:} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \frac{(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \frac{(n+1)}{2n} = \frac{\pi}{2}$$

🌱 للتذكير: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x-1 < E(x) \leq x$ أو أيضاً: $\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) \leq x < E(x)+1$