

V M T CÁCH TÌM GIÁ TR L N NH T, NH NH T C A BI U TH C CH A HAI BI N S

Bá Ch - Thái Bình

Bài vi t này chúng tôi xin trao i v m t ph ng pháp tìm giá tr l n nh t (GTLN), giá tr nh nh t (GTNN) c a bi u th c ch a hai bi n s nh t p giá tr , trong ó hai bi n b ràng bu c b i m t i u ki n cho tr c .

Bài toán : Cho các s th c x, y tho mẫn i u ki n : $G(x; y) = 0$.

Tìm GTLN , GTNN (n u có) c a bi u th c $P = F(x; y)$.

Ph ng pháp gi i :

G i T là t p giá tr c a P. Khi ó, m là m t giá tr c a T khi và ch khi h sau có nghi m (x; y):

$$\begin{cases} G(x; y) = 0 \\ F(x; y) = m \end{cases}$$

Sau ó tìm các giá tr c a tham s m h trên có nghi m . T ó suy ra t p giá tr T c a P , r i suy ra GTLN , GTNN (n u có) c a P.

Sau ây là các bài toán minh ho .

☆ **Bài toán 1 :** Cho hai s th c x, y tho mẫn i u ki n : $\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1) + \sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{y}-1) = \sqrt[3]{xy}$

Tìm GTLN , GTNN c a bi u th c $F = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{xy}$.

L i gi i : G i T_1 là t p giá tr c a F . Ta có $m \in T_1 \Leftrightarrow$ h sau có nghi m:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1) + \sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{y}-1) = \sqrt[3]{xy} \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{xy} = m \end{cases} \quad (I)$$

$$t \begin{cases} S = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \\ P = \sqrt[3]{xy} \end{cases} \text{ thì } \exists x, y \Leftrightarrow \exists S, P: S^2 \geq 4P$$

$$H (I) \text{ tr thành } \begin{cases} S^2 - S - 3P = 0 \\ S + P = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S - 3m = 0 \\ P = m - S \end{cases} \quad (II)$$

$$\text{Ta có : } S^2 \geq 4P \Leftrightarrow S^2 \geq \frac{4(S^2 - S)}{3} \Leftrightarrow S^2 - 4S \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq S \leq 4$$

T ó , h (I) có nghi m \Leftrightarrow h (II) có nghi m (S ; P) tho mẫn $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow$ ph ng trình $S^2 + 2S - 3m = 0$ có nghi m S : $0 \leq S \leq 4$, i u này x y ra khi và ch khi

$$\begin{cases} \Delta'_S = 1 + 3m \geq 0 \\ \begin{cases} 0 \leq S_1 = -1 - \sqrt{1 + 3m} \leq 4 \\ 0 \leq S_2 = -1 + \sqrt{1 + 3m} \leq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{3} \\ 1 \leq \sqrt{1 + 3m} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 8 . \text{ Do ó : } T_1 = [0; 8]$$

V y : $\min F = 0$, $\max F = 8$.

☆ **Bài toán 2 :** Cho các s th c x, y tho mẫn : $x^2 - xy + y^2 = 3$

Tìm GTLN , GTNN c a bi u th c $G = x^2 + xy - 2y^2$

L i gi i : G i T_2 là t p giá tr c a G . Ta có $m \in T_2 \Leftrightarrow$ h sau có nghi m:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x^2 + xy - 2y^2 = m \end{cases} \quad (III)$$

N u $y = 0$ thì h (III) tr thành $\begin{cases} x^2 = 3 \\ x^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ m = 3 \end{cases}$

N u $y \neq 0$ thì $t x = t y$ ta có h :

$$\begin{cases} y^2(t^2 - t + 1) = 3 \\ y^2(t^2 + t - 2) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{3}{t^2 - t + 1} \\ \frac{3(t^2 + t - 2)}{t^2 - t + 1} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{\frac{3}{t^2 - t + 1}} \\ (m - 3)t^2 - (m + 3)t + m + 6 = 0 \end{cases} \quad (IV)$$

Tr ng h p này h (III) có nghi m \Leftrightarrow h (IV) có nghi m $y \neq 0 \Leftrightarrow$ ph ng trình $(m - 3)t^2 - (m + 3)t + m + 6 = 0$ (2) có nghi m :

- N u $m = 3$ thì (2) có nghi m $t = \frac{3}{2}$
- N u $m \neq 3$ thì (2) có nghi m $\Leftrightarrow \Delta_t = -3m^2 - 6m + 81 \geq 0$
 $\Leftrightarrow -1 - 2\sqrt{7} \leq m \leq -1 + 2\sqrt{7}$ ($m \neq 3$)

K t h p các tr ng h p trên ta c các giá tr c a m h (III) có nghi m là :
 $-1 - 2\sqrt{7} \leq m \leq -1 + 2\sqrt{7}$. Do ó: $T_2 = [-1 - 2\sqrt{7}; -1 + 2\sqrt{7}]$

V y : $\min G = -1 - 2\sqrt{7}$, $\max G = -1 + 2\sqrt{7}$

☆ **Bài toán 3** : (Tuy n sinh i h c kh i A n m 2006)

Cho hai s th c thay i $x \neq 0, y \neq 0$ tho m n : $(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$

Tìm giá tr l n nh t c a bi u th c $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

L i g i i : G i T_3 là t p giá tr c a A . Ta có $m \in T_3 \Leftrightarrow$ h sau có nghi m $x \neq 0, y \neq 0$:

$$\begin{cases} (x + y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{(x + y)(x^2 + y^2 - xy)}{(xy)^3} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)xy = x^2 + y^2 - xy \\ \frac{xy(x + y)^2}{(xy)^3} = m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)xy = (x + y)^2 - 3xy \\ \left(\frac{x + y}{xy}\right)^2 = m \end{cases} \quad (V)$$

$$t \begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases} (S^2 \geq 4P), \text{ ta có h : } \begin{cases} SP = S^2 - 3P \\ \left(\frac{S}{P}\right)^2 = m \end{cases} \quad (VI)$$

H (V) có nghi m $x \neq 0, y \neq 0 \Leftrightarrow$ h (VI) có nghi m $(S; P)$ tho m n $S^2 \geq 4P$.

Vì $SP = x^2 + y^2 - xy = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$ v i m i $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow \frac{S}{P} > 0$ v i m i $x \neq 0,$

$y \neq 0$

T ó :

- N u $m \leq 0$ thì h (V) vô nghi m
- N u $m > 0$ thì t ph ng trình $\left(\frac{S}{P}\right)^2 = m \Rightarrow \frac{S}{P} = \sqrt{m} \Rightarrow S = \sqrt{m} \cdot P$ thay vào ph ng trình
u c a h (VI) c : $\sqrt{m}P^2 = mP^2 - 3P \Leftrightarrow (m - \sqrt{m})P = 3$ (vì $SP > 0$ nên $P \neq 0$)

có P t p h ng tr nh này thì $m - \sqrt{m} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ ($m > 0$) và ta c
 $P = \frac{3}{\sqrt{m}(\sqrt{m}-1)}$, do ó $S = \frac{3}{\sqrt{m}-1}$. Tr ng h p này h (VI) có nghi m ($S; P$)

tho

mãn $S^2 \geq 4P$ khi và ch khi :

$$\left(\frac{3}{\sqrt{m}-1}\right)^2 \geq \frac{12}{\sqrt{m}(\sqrt{m}-1)} \Leftrightarrow 3 \geq \frac{4(\sqrt{m}-1)^2}{\sqrt{m}(\sqrt{m}-1)} \Leftrightarrow 3\sqrt{m} \geq 4(\sqrt{m}-1) \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 < m \leq 16 \quad (m \neq 1)$$

Tóm l i các giá tr c a m h (V) có nghi m $x \neq 0, y \neq 0$ là : $0 < m \leq 16, m \neq 1$

Do ó : $T_3 = (0; 16] \setminus \{1\}$

V y : $\max A = 16$ (chú ý không t n t i $\min A$)

☆ **Bài toán 4 :** (HSG qu c gia - B ng A + B n m 2005)

Cho hai s th c x, y tho mãn : $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$

Hãy tìm giá tr l n nh t và nh nh t c a bi u th c $K = x + y$

L i g i i : $KX : x \geq -1, y \geq -2$

G i T_4 là t p giá tr c a K . Ta có $m \in T_4 \Leftrightarrow$ h sau có nghi m:

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y \\ x + y = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{y+2}) = m \\ x + y = m \end{cases} \quad (VII)$$

t $u = \sqrt{x+1}$ và $v = \sqrt{y+2}$ thì $u, v \geq 0$ và h (VII) tr thành :

$$\begin{cases} 3(u+v) = m \\ u^2 + v^2 = m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \frac{m}{3} \\ uv = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{9} - m - 3\right) \end{cases} \Leftrightarrow u, v \text{ là hai nghi m c a ph ng tr nh :}$$

$$t^2 - \frac{m}{3}t + \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{9} - m - 3\right) = 0 \Leftrightarrow 18t^2 - 6mt + m^2 - 9m - 27 = 0 \quad (3)$$

T ó , h (VII) có nghi m ($x; y$) sao cho $x \geq -1, y \geq -2$ khi và ch khi (3) có hai nghi m không âm và i u ki n là :

$$\begin{cases} \Delta'_t = -9(m^2 - 18m - 54) \geq 0 \\ S_t = \frac{m}{3} \geq 0 \\ P_t = \frac{m^2 - 9m - 27}{18} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \leq m \leq 9+3\sqrt{15} \quad \text{Do ó } T_4 = \left[\frac{9+3\sqrt{21}}{2}; 9+3\sqrt{15} \right]$$

$$\text{V y : } \min K = \frac{9+3\sqrt{21}}{2}, \max K = 9+3\sqrt{15}$$

Bình lu n: u th c a ph ng pháp trên là quy bài toán tìm GTLN, GTNN v bài toán tìm tham s h có nghi m, vì v y không c n ch rõ giá tr c a bi n s bi u th c t GTLN, GTNN. N u dùng các b t ng th c ánh giá thì nh t thi t p h i ch rõ các giá tr c a bi n s t i ó bi u th c t GTLN, GTNN. Các b n có th m r ng ph ng pháp này cho bi u th c có nhi u h n hai bi n s .

Cu i cùng là các bài t p minh ho ph ng pháp trên :

Bài 1 : Cho hai s th c x, y tho mãn : $x^2 + y^2 = 2(x+y) + 7$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt[3]{x(x-2)} + \sqrt[3]{y(y-2)}$

Bài 2 : Cho các số thực x, y thỏa mãn : $4x^2 - 3xy + 3y^2 = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F = x^2 + xy - 2y^2$

Bài 3 : Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $Q = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+9}$

Bài 4 : Cho các số dương x, y thỏa mãn : $xy + x + y = 3$

Tìm GTLN của biểu thức $G = \frac{3x}{y+1} + \frac{3y}{x+1} - x^2 - y^2$

Bài 5 : (Cao đẳng kinh tế kỹ thuật năm 2008) .Cho hai số x, y thỏa mãn : $x^2 + y^2 = 2$

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$

Bài 6 : (Đề thi Đại học Khối B năm 2008). Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức : $x^2 + y^2 = 1$

Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$

.....Hết.....