

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

TRẦN QUANG CÔNG

HÀM LỜI VÀ MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC

Chuyên ngành : Phương pháp Toán Sơ cấp

Mã số : 60-46-40

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Đà Nẵng - Năm 2011

Công trình được hoàn thành tại
ĐẠI HỌC ĐÀ NẴNG

Người hướng dẫn khoa học:
TS. Trương Văn Thương

Phản biện 1: TS. CAO VĂN NUÔI

Phản biện 2: GS.TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm.

Luận văn tốt nghiệp thạc sĩ khoa học họp tại Đại học Đà Nẵng vào ngày 28 tháng 5 năm 2011.

Có thể tìm hiểu luận văn tại:

- Trung tâm Thông tin-Học liệu, Đại học Đà Nẵng
- Thư viện trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

MỞ ĐẦU

1. LÍ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Trong chương trình toán học phổ thông bất đẳng thức là một nội dung khó đối với học sinh kể cả học sinh giỏi trong đội tuyển toán. Trong hầu hết các kì thi học sinh giỏi cấp thành phố, tuyển sinh đại học, các kì thi quốc gia, quốc tế và khu vực, bài toán bất đẳng thức thường xuyên xuất hiện và nó gây không ít khó khăn cho người làm toán.

Điều đặc biệt của các bài toán về bất đẳng thức là khó, thậm chí là rất khó nhưng chúng ta có thể giải nó hoàn toàn bằng phương pháp sơ cấp, không vượt quá giới hạn của toán phổ thông. Do đó chúng ta cần phải nắm vài kĩ thuật chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp cổ điển, để giải quyết một số bài toán bất đẳng thức có liên quan đến chương trình toán phổ thông.

Với những lí do đó tôi chọn đề tài ***“Hàm lồi và một số bất đẳng thức”*** một phần nào đó đáp ứng mong muốn của bản thân về một đề tài phù hợp với chương trình đang học mà sau này có thể phục vụ thiết thực cho việc giảng dạy của mình trong nhà trường phổ thông, đồng thời cũng là tài liệu tham khảo hữu ích cho ai quan tâm đến vấn đề này.

Đề tài quan tâm nhiều đối tượng, trong đó trọng tâm là ứng dụng của Bất đẳng thức Jensen và Bất đẳng thức Karamata để giải các bài toán về bất đẳng thức lượng giác, bất đẳng thức đại số hoàn toàn phù hợp với thực tế tại trường phổ thông.

2. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Mục đích của đề tài này là trình bày có hệ thống lý thuyết hàm lồi và những bất đẳng thức trọng tâm về hàm lồi. Sau đó đưa ra ứng

dụng của các bất đẳng thức này để chứng minh một số bài toán có liên quan.

3. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHẠM VI NGHIÊN CỨU

a. Đối tượng nghiên cứu

Nghiên cứu lý thuyết tổng quát về hàm lồi để trình bày có hệ thống. Nghiên cứu Bất đẳng thức Jensen, Bất đẳng thức Karamata và các ứng dụng của nó.

b. Phạm vi nghiên cứu

Nghiên cứu từ các tài liệu, các giáo trình về bất đẳng thức của các tác giả có liên quan từ đó trình bày phương pháp chứng minh phù hợp.

4. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu các tài liệu từ trang web toán học, các tạp chí toán học tuổi trẻ và các giáo trình có liên quan đến đề tài để tổng hợp lại. Sau đó trình bày có hệ thống và phát triển phương pháp chứng minh hợp lí.

5. Ý NGHĨA KHOA HỌC VÀ THỰC TIỄN CỦA ĐỀ TÀI

Đề tài hệ thống kiến thức về lý thuyết hàm lồi và một số bất đẳng thức về hàm lồi, trình bày ứng dụng của Bất đẳng thức Jensen, Karamata để chứng minh hàng loạt bài toán bất đẳng thức ở trường phổ thông.

Đề tài phù hợp cho việc giảng dạy bồi dưỡng học sinh trung học phổ thông. Đóng góp thiết thực cho việc dạy và học bất đẳng thức trong trường trung học phổ thông, đem lại niềm đam mê sáng tạo các bài toán về bất đẳng thức.

6. CẤU TRÚC LUẬN VĂN

Ngoài phần mở đầu và kết luận, luận văn gồm ba chương.

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này chúng tôi trình bày có hệ thống các kiến thức cơ bản về hàm lồi.

Chương 2: Một số bất đẳng thức về hàm lồi. Trong chương này chúng tôi trình bày hai bất đẳng thức liên quan đến hàm lồi là: Bất đẳng thức Jensen, Bất đẳng thức Karamata, các định lý và một số áp dụng.

Chương 3: Áp dụng bất đẳng thức về hàm lồi để giải một số bài toán về bất đẳng thức sơ cấp. Trong chương này chúng tôi trình bày có hệ thống ứng dụng của Bất đẳng thức Jensen và Bất đẳng thức Karamata để giải các bài toán về bất đẳng thức lượng giác trong tam giác và bất đẳng thức đại số.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Định nghĩa hàm lồi

Định nghĩa. Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm lồi (lồi dưới) trên tập $[a, b) \subset \mathbb{R}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in [a, b)$ và với mọi cặp số dương α, β có tổng $\alpha + \beta = 1$ ta đều có

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2). \quad (1.1)$$

- Nếu dấu “=” xảy ra trong (1.1) khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ thì ta nói hàm số $f(x)$ là hàm lồi thực sự (chặt) trên $[a, b)$.

- Nếu trong (1.1) bất đẳng thức xảy ra ngược chiều thì $f(x)$ là hàm lõm trên $[a, b)$.

- Ta kí hiệu các tập $[a, b), (a, b], (a, b), [a, b]$ là $I(a, b)$.

Nhận xét 1.1.

i/ Hàm số $f(x)$ gọi là lõm trên $I(a, b)$ nếu $-f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.

ii/ Khi $x_1 < x_2$ thì $x = \alpha x_1 + \beta x_2 \in (x_1, x_2), \forall \alpha, \beta > 0: \alpha + \beta = 1$

$$\text{và } \alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad \beta = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

1.2. Các tính chất hàm lồi

Tính chất 1.1. Nếu $f(x)$ là hàm lồi (lõm) trên $I(a, b)$ thì $g(x) = c.f(x)$ là hàm lõm (lồi) trên $I(a, b)$ khi $c < 0$.

Tính chất 1.2. Tổng hữu hạn các hàm lồi trên $I(a, b)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.

Tính chất 1.3. (Xem [3]) Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và lồi trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ là hàm lồi và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.

Tính chất 1.4. (Xem [3])

i/ Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và lõm trên $I(a, b)$ và hàm $g(x)$ lồi và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lồi trên $I(a, b)$.

ii/ Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và lõm trên $I(a, b)$ và hàm $g(x)$ lõm và đồng biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a, b)$.

iii/ Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và lồi trên $I(a, b)$ và hàm $g(x)$ lõm và nghịch biến trên tập giá trị của $f(x)$ thì $g(f(x))$ là hàm lõm trên $I(a, b)$.

Tính chất 1.5. Nếu $f(x)$ là hàm số liên tục và đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên $I(a, b)$ và nếu $g(x)$ là hàm ngược của $f(x)$ thì ta có kết luận sau:

i/ $f(x)$ lõm, đồng biến $\Leftrightarrow g(x)$ lồi, đồng biến.

ii/ $f(x)$ lõm, nghịch biến $\Leftrightarrow g(x)$ lõm, nghịch biến.

iii/ $f(x)$ lồi, nghịch biến $\Leftrightarrow g(x)$ lồi, nghịch biến.

Tính chất 1.6. (Xem [9]) Giả sử $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ là các hàm lồi trên $I(a, b)$. Cho $\lambda_i > 0, \forall i=1, \dots, n$. Khi đó hàm số $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_n f_n(x)$ cũng là hàm lồi trên $I(a, b)$.

1.3 Một số định lý về hàm lồi

Định lý 1.1. (Xem [3]) Nếu $f(x)$ là hàm khả vi trên $I(a, b)$ thì $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi $f'(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $I(a, b)$.

Định lý 1.2. Nếu $f(x)$ là hàm khả vi bậc hai trên $I(a, b)$ và $f''(x) \geq 0, \forall x \in I(a, b)$ thì với mọi cặp $x, x_0 \in I(a, b)$ ta đều có

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1.2)$$

Định lý 1.3. Nếu $f(x)$ khả vi bậc hai trên $I(a, b)$ thì $f(x)$ lồi (lõm) trên $I(a, b)$ khi và chỉ khi $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) trên $I(a, b)$.

Định lý 1.4. (Xem [3]) Nếu $f(x)$ lồi trên (a, b) thì tồn tại các đạo hàm một phía $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ với $\forall x \in (a, b)$ và $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

Hệ quả. Các hàm số $f'_-(x)$ và $f'_+(x)$ là những hàm đơn điệu tăng trong (a, b) .

Định lý 1.5. Nếu $f(x)$ lồi trên (a, b) thì $f(x)$ liên tục trên (a, b) .

Nhận xét 1.2. (Xem [3]) Hàm lồi trên $[a, b]$ có thể không liên tục tại đầu mút của đoạn $[a, b]$.

Định lý 1.6. (Xem [3]) (*Bất đẳng thức Jensen*)

Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I(a, b). \quad (1.3)$$

Định lý 1.7 (Xem [3]) (*Điều kiện đủ cho tính lồi của hàm số*).

Giả sử $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong (a, b) . Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi (lõm) trên (a, b) là

$$f''(x) \geq 0, (f''(x) \leq 0) \quad \forall x \in (a, b). \quad (1.4)$$

Định lý 1.8. (Xem [3]) Cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geq 0$ trên $I(a, b)$ và giả sử $x_1, x_2 \in I(a, b)$ với $x_1 < x_2$. Khi đó với mọi dãy số tăng dần

$\{u_k\}$ trong $(x_1, \frac{x_1+x_2}{2})$: $x_1 = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < \frac{x_1+x_2}{2}$ và dãy số

giảm dần $\{v_k\}$ trong $(\frac{x_1+x_2}{2}, x_2)$: $\frac{x_1+x_2}{2} < v_n < v_{n-1} < \dots < v_1 < v_0 = x_2$

thỏa $u_j + v_j = x_1 + x_2, j = 0, \dots, n$ Ta đều có

$$f(u_0) + f(v_0) \geq f(u_1) + f(v_1) \geq f(u_2) + f(v_2) \geq \dots \geq f(u_n) + f(v_n)$$

Nói cách khác dãy $\{f(u_j) + f(v_j)\}$ là một dãy giảm.

Chương 2

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC VỀ HÀM LÒI

2.1 Bất đẳng thức Jensen

2.1.1 Bất đẳng thức Jensen dạng cơ bản

Giả sử $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Khi đó điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ lồi trên $I(a, b)$ là

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I(a, b).$$

2.1.2 Bất đẳng thức Jensen tổng quát (Xem [8])

Giả sử $f(x)$ là hàm lồi trong (a, b) với $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ ta có

$$\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) \geq f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n).$$

Nhận xét 2.1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên (a, b) . Khi đó các mệnh đề sau là tương đương.

i/ $f(x)$ là hàm lồi trên (a, b) .

ii/ $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in (a, b)$.

iii/ Với mọi số nguyên dương n và mọi $x_i \in (a, b), i = 1, \dots, n$ ta có

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}.$$

iv/ Với mọi $x_i \in (a, b)$, với mọi $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$ và $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$

ta có $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n)$.

2.1.3 Một số định lý về Bất đẳng thức Jensen

Định lý 2.1. Cho hàm số $y = f(x)$ lồi và có đạo hàm cấp hai trong khoảng (a, b) . Chứng minh rằng với mọi $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ và với mọi ε ($0 \leq \varepsilon \leq x_2 - x_1$), ta luôn có bất đẳng thức kép sau

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq \frac{f(x_1 + \varepsilon) + f(x_2 - \varepsilon)}{2} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).$$

Nhận xét 2.2. Bất đẳng thức trên đã “làm chặt” hơn Bất đẳng thức Jensen trong hàm lồi.

Định lý 2.2. Nếu $f(x)$ là hàm lồi và x_1, x_2, \dots, x_n thuộc miền xác định của nó thì

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) - f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{n-1}{n} \left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) + f\left(\frac{x_n + x_1}{2}\right) \right]$$

Định lý 2.3. (Xem [9]) Nếu $f(x)$ là hàm lồi và a_1, a_2, \dots, a_n thuộc miền xác định của nó thì

$$(n-1)[f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n)] \leq n[f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) - f(a)]$$

Trong đó $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ và $b_i = \frac{na - a_i}{n-1}$, $i = 1, \dots, n$.

2.2 Bất đẳng thức Karamata

Trước khi phát biểu Bất đẳng thức Karamata ta phát biểu định nghĩa và các tính chất của bộ trội như sau

2.2.1 Định nghĩa bộ trội Cho hai bộ số $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Ta nói bộ a trội hơn bộ b được kí hiệu là $a \succ b$ nếu chúng thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \\ a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq b_1 + b_2 + \dots + b_k, \quad \forall k = 1, \dots, n-1 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{cases}$$

2.2.2 Các tính chất của bộ trội

Tính chất 2.1. Với bộ số (a_1, a_2, \dots, a_n) và $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ ta có

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \succ (a, a, \dots, a). \text{ Trong đó } a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Tính chất 2.2. (Xem [1]) Cho hai bộ số (a_1, a_2, \dots, a_n) và (b_1, b_2, \dots, b_n) thỏa điều kiện

$$\begin{cases} b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \\ a_1 + a_2 + \dots + a_i \geq b_1 + b_2 + \dots + b_i, \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \\ a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{cases}$$

Thì $(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*) \succ (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Trong đó $(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ là bộ số nhận được từ bộ số (a_1, a_2, \dots, a_n) bằng cách sắp xếp a_1, a_2, \dots, a_n theo thứ tự giảm dần.

Tính chất 2.3. (Xem [3]) Nếu $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0$

sao cho $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ và $\frac{a_i}{a_j} \geq \frac{b_i}{b_j}$, $\forall i < j$ thì

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \succ (b_1, b_2, \dots, b_n).$$

2.2.3 Một số định lý về Bất đẳng thức Karamata

Định lí 2.4 (Xem [3]) (*Bất đẳng thức Karamata*). Cho hai dãy số $\{x_k, y_k \in I(a, b), k = 1, \dots, n\}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n, & y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_i \geq y_1 + y_2 + \dots + y_i, & \forall i = 1, \dots, n-1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n \end{cases}$$

Khi đó với mọi hàm lồi $f(x)$ trên $I(a, b)$ ta đều có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n).$$

Nhận xét 2.3.

i/ Nếu $f(x)$ là hàm lõm và $(a_1, a_2, \dots, a_n) \succ (b_1, b_2, \dots, b_n)$ thì ta được bất đẳng thức ngược chiều sau

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq f(b_1) + f(b_2) + \dots + f(b_n).$$

ii/ Trong Định lí 2.4 nếu biết $f'(x) \geq 0$ trên (a, b) thì điều kiện

$x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$ được thay bằng $x_1 + \dots + x_n \geq y_1 + \dots + y_n$.

iii/ Giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Lúc đó $(a_1, a_2, \dots, a_n) \succ (a, a, \dots, a)$,

trong đó $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$. Nếu $f(x)$ là hàm lồi, dựa vào Bất

đẳng thức Karamata ta được

$$f(a_1) + \dots + f(a_n) \geq nf\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \quad (\text{Bất đẳng thức Jensen})$$

Do đó Bất đẳng thức Jensen là trường hợp đặc biệt của Bất đẳng thức Karamata.

Định lí 2.5 (Xem [5]) (*Bất đẳng thức T.Popoviciu*). Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$, $\forall x, y, z \in I(a, b)$ ta đều có bất đẳng thức

$$f(x) + f(y) + f(z) + 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2f\left(\frac{y+z}{2}\right) + 2f\left(\frac{x+z}{2}\right)$$

Nhận xét 2.4. Định lí trên là một mở rộng thật sự của các kết quả quen biết (Bất đẳng thức Jensen) về hàm lồi. Thật vậy theo Bất đẳng thức Jensen thì

$$f(x) + f(y) + f(z) \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

$$\text{và } 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{z+x}{2}\right).$$

Ta không thể cộng hai bất đẳng thức ngược chiều ở trên. Do vậy Bất đẳng thức Jensen không thể chứng minh được Bất đẳng thức T.Popoviciu.

Hệ quả. Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$, $\forall x, y, z \in I(a, b)$, $0 \leq \alpha \leq 3$ ta có bất đẳng thức

$$f(x) + f(y) + f(z) + \alpha f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \geq \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{y+z}{2}\right) + f\left(\frac{x+z}{2}\right) \right]$$

Định lí 2.6 (Xem [5]) (*Bất đẳng thức A.Lupas*).

Cho $f(x)$ là hàm lồi trên $I(a, b)$. Với mọi bộ số dương $p, q, r > 0$ và $\forall x, y, z \in I(a, b)$ ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} pf(x) + qf(y) + rf(z) + (p+q+r)f\left(\frac{px+qy+rz}{p+q+r}\right) &\geq \\ &\geq (p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right) + (q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right) + (r+p)f\left(\frac{rz+px}{r+p}\right) \end{aligned}$$

Nhận xét 2.5. Với $p = q = r = 1$ thì Bất đẳng thức A.Lupas trở thành Bất đẳng thức T.Popoviciu.

Định lý 2.7. (Xem [6]) Nếu $f(x)$ là hàm lồi và a_1, a_2, \dots, a_n thuộc miền xác định của nó thì

$$f(a_1) + \dots + f(a_n) + n(n-2)f(a) \geq (n-1)[f(b_1) + \dots + f(b_n)].$$

Trong đó $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ và $b_i = \frac{na - a_i}{n-1}$, $i = 1, \dots, n$.

Định lý 2.8. (Xem [6]) Nếu $f(x)$ là hàm lồi và a_1, a_2, \dots, a_n thuộc miền xác định của nó thì

$$(n-2)[f(a_1) + \dots + f(a_n)] + nf\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right) \geq 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} f\left(\frac{a_i + a_j}{2}\right).$$

Nhận xét 2.6. Khi $n = 3$ ta thu được kết quả Bất đẳng thức T.Popoviciu.

2.2.4 Độ gần đều và thứ tự sắp được của một dãy các tam giác

Định nghĩa 2.1.

- Cho tam giác ABC tức A, B, C là ba góc của tam giác ABC và A, B, C có đơn vị là radian.

- Với mọi tam giác ABC kí hiệu $\delta_{ABC} = \max\{A, B, C\} - \min\{A, B, C\}$

và gọi δ_{ABC} là độ gần đều của tam giác ABC .

Định nghĩa 2.2. (Xem [3]) Với mỗi cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện:

$$\max\{A_1, B_1, C_1\} \leq \max\{A_2, B_2, C_2\} \text{ và } \min\{A_1, B_1, C_1\} \geq \min\{A_2, B_2, C_2\}$$

Thì ta nói cặp tam giác $A_1B_1C_1$ và $A_2B_2C_2$ là cặp sắp được thứ tự và tam giác $A_1B_1C_1$ gần đều hơn tam giác $A_2B_2C_2$.

Nhận xét 2.7. Tam giác đều gần đều hơn mọi tam giác khác.

Nhận xét 2.8. Trong các tam giác không nhọn thì tam giác vuông cân gần đều hơn.

Định lý 2.9. Cho tam giác $A_2B_2C_2$ gần đều hơn tam giác $A_1B_1C_1$ và cho hàm số $f(x)$ có $f''(x) \geq 0$ với mọi $x \in (0, \pi)$. Khi đó

$$f(A_1) + f(B_1) + f(C_1) \geq f(A_2) + f(B_2) + f(C_2).$$

Tương tự nếu $f''(x) \leq 0$ thì

$$f(A_1) + f(B_1) + f(C_1) \leq f(A_2) + f(B_2) + f(C_2).$$

2.3 Một số áp dụng về Bất đẳng thức Jensen và Karamata

Sau đây chúng ta sẽ dùng Bất đẳng thức Jensen để chứng minh một số bất đẳng thức kinh điển như: Bất đẳng thức AM - GM, Cauchy, Bernoulli, Bunhiakopski, Holder,... Các bất đẳng thức này rất quan trọng vì nó là cơ sở để chứng minh rất nhiều bất đẳng thức khác và đó là những bất đẳng thức hay gặp nhất (dưới dạng tường minh hoặc không tường minh). Ta xét các bài toán sau:

Bài toán 2.1. (Bất đẳng thức Bernoulli).

Chứng minh rằng $\forall x > 0, \alpha > 1$ ta có $x^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha x$.

Bài toán 2.2. (Bất đẳng thức AM - GM).

Cho n số thực không âm x_1, x_2, \dots, x_n . Chứng minh rằng

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

Bài toán 2.3. (Xem [2]) (Bất đẳng thức Cauchy).

Cho $2n$ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Bài toán 2.4. (Xem [2]) (Bất đẳng thức Minkowski).

Cho hai dãy số không âm a_1, a_2, \dots, a_n và b_1, b_2, \dots, b_n . Chứng minh rằng $\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\dots(a_n+b_n)}$.

Sau đây ta xét một số bài toán áp dụng liên quan đến Bất đẳng thức Karamata.

Bài toán 2.5. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC không nhọn ta luôn có

$$a/ \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 2\sqrt{2} - 1. \quad b/ \sin A + \sin B + \sin C \leq 1 + \sqrt{2}.$$

Bài toán 2.6. (Xem [1]) Xét bộ n số dương a_1, a_2, \dots, a_n thỏa mãn điều kiện $a_1.a_2\dots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_n^{n-1} + n(n-2) \geq (n-1) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

Nhận xét 2.9. Với $n=3$ và $a_1 = \frac{x^2}{yz}, a_2 = \frac{y^2}{zx}, a_3 = \frac{z^2}{xy}$ ta có bất đẳng

thức quen biết $x^6 + y^6 + z^6 + 3(xyz)^2 \geq 2(y^3z^3 + z^3x^3 + x^3y^3)$.

Bài toán 2.7. Giả sử a, b, c, d là các số dương thỏa mãn $ab + bc + cd + da = 4$ Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{d}\right) \left(1 + \frac{d}{a}\right) \geq (a+b+c+d)^2.$$

Chương 3

ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC VỀ HÀM LỖI ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC SƠ CẤP

3.1 Các bài toán về tính chất hàm lồi và bất đẳng thức Jensen

3.1.1 Chứng minh bất đẳng thức lượng giác dạng đối xứng

Tính chất của hàm lồi được vận dụng có hiệu quả để chứng minh các bất đẳng thức lượng giác, đặc biệt là các bất đẳng thức lượng giác dạng đối xứng trong tam giác. Việc chứng minh các bất đẳng thức trong tam giác chiếm một tỉ lệ không nhỏ trong các bài toán lượng giác ở trường phổ thông. Dĩ nhiên ngoài việc sử dụng các kiến thức về lượng giác để chứng minh bất đẳng thức chúng ta còn sử dụng nhiều phương pháp khác, trong số đó không thể không biết đến phương pháp sử dụng tính chất hàm lồi và Bất đẳng thức Jensen. Sau đây là một số bài toán về bất đẳng thức lượng giác trong tam giác mà sử dụng tính chất hàm lồi và Bất đẳng thức Jensen để chứng minh là hiệu quả nhất.

Bài toán 3.1. Cho A, B, C là ba góc của tam giác. Chứng minh rằng

$$\tan^6 \frac{A}{2} + \tan^6 \frac{B}{2} + \tan^6 \frac{C}{2} \geq \frac{1}{9}.$$

Bài toán 3.2. Cho n là số nguyên dương.

a/ Giả sử $0 \leq \alpha_i \leq \pi, \forall i=1, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{n} \leq \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

b/ Giả sử $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_i \leq \frac{\pi}{2}, \forall i=1, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\frac{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n}{n} \leq \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

c/ Giả sử $0 < \alpha_i < \frac{\pi}{2}, \forall i=1, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2 + \dots + \tan \alpha_n}{n} \geq \tan \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n}.$$

Nhận xét 3.1. Từ bất đẳng thức trên ta suy ra một loạt các bất đẳng thức cơ bản sau đây trong tam giác. Trong tam giác ABC (A, B, C là ba góc) ta có

$$\text{a/ } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{b/ } \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{c/ } \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{d/ } \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$$

$$\text{e/ } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \quad \text{f/ } \tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

(đối với câu e, f ABC là tam giác nhọn)

Bài toán 3.3.

a/ Cho $0 < x_i < \pi, \forall i=1, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin x_1} + \frac{1}{\sin x_2} + \dots + \frac{1}{\sin x_n} \geq \frac{n}{\sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}.$$

b/ Cho $-\frac{\pi}{2} < x_i < \frac{\pi}{2}, \forall i=1, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\cos x_1} + \frac{1}{\cos x_2} + \dots + \frac{1}{\cos x_n} \geq \frac{n}{\cos \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}.$$

c/ Cho $0 < x_i < \pi, \forall i=1, \dots, n$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin^2 x_1} + \frac{1}{\sin^2 x_2} + \dots + \frac{1}{\sin^2 x_n} \geq \frac{n}{\sin^2 \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}}.$$

Nhận xét 3.2. Từ bất đẳng thức trên ta suy ra một loạt các bất đẳng thức cơ bản sau đây trong tam giác. Trong tam giác ABC (A, B, C là ba góc) ta có

$$\text{a/ } \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3} \quad \text{b/ } \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq 6 \quad (\Delta ABC \text{ nhọn})$$

$$\text{c/ } \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \geq 6 \quad \text{d/ } \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos \frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{3}$$

$$\text{e/ } \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \geq 4 \quad \text{f/ } \frac{1}{\sin^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{C}{2}} \geq 12$$

Bài toán 3.4. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có

$$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} + \frac{3}{2}.$$

Nhận xét 3.3. Nhờ phương pháp hàm lồi ta chứng minh được bất đẳng thức đã cho. Trong khi ta có hai bất đẳng thức ngược chiều sau:

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \quad \text{và} \quad \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

Ta không có phép cộng hai bất đẳng thức ngược chiều này.

Bài toán 3.5. (Xem [7]) Cho A, B, C là ba góc của tam giác nhọn ΔABC . Chứng minh rằng

$$(\sin A)^{\sin A} \cdot (\sin B)^{\sin B} \cdot (\sin C)^{\sin C} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

3.1.2 Chứng minh bất đẳng thức đại số

Chứng minh bất đẳng thức nói chung và bất đẳng thức đại số nói riêng là một phần quan trọng trong giáo trình dạy và học môn toán ở trường phổ thông. Có rất nhiều phương pháp để chứng minh bất đẳng thức đại số nhưng trong phần này tôi trình bày cách sử dụng Bất đẳng thức Jensen để chứng minh bất đẳng thức đại số. Tất nhiên đó là những bất đẳng thức mà dùng Bất đẳng thức Jensen để chứng minh là hiệu quả nhất.

Bài toán 3.6. Cho $a, b, c, > 0$. Chứng minh

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài toán 3.7. (Xem [2]) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm lồi trên (a, b) .

Giả sử $x_1, x_2 \in (a, b)$. Với $x_1 < x_2$ là hai số cho trước. Đặt $\varepsilon_r = r(x_2 - x_1)$, $0 < r < 1$. Xét hàm số $F(r) = f(x_1 + \varepsilon_r) + f(x_2 - \varepsilon_r)$.

Chứng minh rằng a/ Nếu $r_1, r_2 \in (0, \frac{1}{2}]$, $r_1 \leq r_2$ thì $F(r_1) \geq F(r_2)$.

b/ Nếu $r_1, r_2 \in [\frac{1}{2}, 1)$, $r_1 \leq r_2$ thì $F(r_1) \leq F(r_2)$.

Nhận xét 3.4. Từ Bài toán 3.23 với việc chọn hàm $f(x)$ và các giá trị r_1, r_2 thích hợp ta được các bài toán về bất đẳng thức quan trọng, chẳng hạn ta xét Bài toán 3.8 và 3.9.

Bài toán 3.8. Cho a, b là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng

$$a / \left(\frac{4a+b}{5} \right)^2 + \left(\frac{4b+a}{5} \right)^2 \geq \left(\frac{2a+b}{3} \right)^2 + \left(\frac{2b+a}{3} \right)^2 \geq 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2.$$

$$b / \left(\frac{a+2b}{3} \right)^2 + \left(\frac{2a+b}{3} \right)^2 \geq \left(\frac{2a+3b}{5} \right)^2 + \left(\frac{2b+3a}{5} \right)^2 \geq 2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2.$$

Bài toán 3.9. Cho a, b là các số dương tùy ý. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\sqrt{5} \left(\frac{1}{\sqrt{4a+b}} + \frac{1}{\sqrt{a+4b}} \right) \geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2a+b}} + \frac{1}{\sqrt{a+2b}} \right) \geq \sqrt{2} \frac{2}{\sqrt{a+b}}.$$

Bài toán 3.10. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}.$$

Nhận xét 3.5. trong một số bài toán chứng minh bất đẳng thức đại số gồm ba biến, dựa vào điều kiện của bài toán chúng ta có thể chuyển bất đẳng thức đại số về bất đẳng thức lượng giác quen thuộc bằng cách đặt ẩn phụ. Chẳng hạn, xét Bài toán 3.11 và 3.12

Bài toán 3.11. Cho $0 < x, y, z < 1$ thỏa mãn $xy + yz + zx = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài toán 3.12. Cho $0 < x, y, z$ thỏa mãn $x + y + z = xyz$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$.

3.2 Các bài toán áp dụng tính chất hàm lồi và bất đẳng thức Karamata

3.2.1 Chứng minh bất đẳng thức lượng giác dạng không đối xứng

Nói đến bất đẳng thức lượng giác trong tam giác chúng ta thường gặp bất đẳng thức ở dạng đối xứng đối với các giá trị lượng giác trong tam giác. Sau đây là một số bài toán bất đẳng thức lượng giác trong tam giác không đối xứng. Trong phần này ta sử dụng các kí hiệu sau :

$M(\Delta)$ là tập hợp tất cả các ΔABC kể cả tam giác suy biến, tức $A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0$ và $A+B+C=\pi$. Ta gọi các tam giác thuộc $M(\Delta)$ là các tam giác suy rộng.

$N(\Delta)$ là tập hợp tất cả các ΔABC thỏa $0 \leq A, B, C \leq \frac{\pi}{2}$ và $A+B+C=\pi$

$P(\Delta)$ là tập hợp tất cả các ΔABC thỏa $0 \leq A, B, C \leq \frac{\pi}{2}$ và $A+B+C=\pi$ hoặc $A=\pi, B=C=0$

Bài toán 3.13. Cho $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$ và tam giác nhọn ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của đẳng thức $M = \alpha \tan A + \beta \tan B + \gamma \tan C$.

Để giải Bài toán 3.13 trước tiên ta chứng minh bổ đề sau

Bổ đề 3.1. (Xem [4]) Cho hàm số $f(t)$ có $f'(t) > 0, f''(t) \geq 0, \forall t \in \dots$

Khi đó với mọi $x, y, z, x_0, y_0, z_0 \in \dots$ thỏa mãn $x+y+z=x_0+y_0+z_0$

thì đẳng thức $M = \frac{f(x)}{f'(x_0)} + \frac{f(y)}{f'(y_0)} + \frac{f(z)}{f'(z_0)}$ đạt được giá trị nhỏ nhất là

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{f(y_0)}{f'(y_0)} + \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \quad \text{khi } x=x_0, y=y_0, z=z_0.$$

Bài toán 3.14. Cho $\alpha, \beta, \gamma > 0, \Delta ABC \in P(\Delta)$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đẳng thức $M = \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$.

Để giải Bài toán 3.14 trước tiên ta chứng minh Bổ đề sau.

Bổ đề 3.2. (Xem [4]) Cho hàm số $f(t)$ có $f'(t) > 0, f''(t) \leq 0, \forall t \in \dots$

Khi đó với mọi $x, y, z, x_0, y_0, z_0 \in \dots$ thỏa mãn $x+y+z=x_0+y_0+z_0$

thì đẳng thức $M = \frac{f(x)}{f'(x_0)} + \frac{f(y)}{f'(y_0)} + \frac{f(z)}{f'(z_0)}$ đạt được giá trị lớn nhất là

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{f(y_0)}{f'(y_0)} + \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \quad \text{khi } x=x_0, y=y_0, z=z_0.$$

Bài toán 3.15. Cho $\alpha, \beta, \gamma > 0$ và tam giác $ABC \in N(\Delta)$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đẳng thức

$$M = \alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C.$$

Để giải bài toán 3.15 trước tiên ta chứng minh hai Bổ đề sau:

Bổ đề 3.3. (Xem [4]) Cho hàm số $f(t)$ có $f'(t) < 0, f''(t) \leq 0, \forall t \in \dots$

Khi đó với mọi $x, y, z, x_0, y_0, z_0 \in \dots$ thỏa mãn $x+y+z=x_0+y_0+z_0$

thì đẳng thức $M = \frac{f(x)}{f'(x_0)} + \frac{f(y)}{f'(y_0)} + \frac{f(z)}{f'(z_0)}$ đạt được giá trị nhỏ

nhất là $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + \frac{f(y_0)}{f'(y_0)} + \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$ khi $x=x_0, y=y_0, z=z_0$.

Bổ đề 3.4. (Xem [4]) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $x \geq y \geq z$.

Khi đó với mọi tam giác ABC ta có

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C \geq x \cos A_0 + y \cos B_0 + z \cos C_0.$$

Trong đó $A_0 = \max\{A, B, C\}$, $C_0 = \min\{A, B, C\}$

Bài toán 3.16. (Xem [4]) Cho ΔABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

$$\text{thức } M = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \tan \frac{A}{2} + \frac{3}{2} \tan \frac{B}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} \tan \frac{C}{2}.$$

Bài toán 3.17. Cho $\Delta ABC \in P(\Delta)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ

$$\text{nhất của biểu thức } M = \sqrt{2} \sin A + 2 \sin B + (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin C.$$

Bài toán 3.18. Cho tam giác $ABC \in N(\Delta)$. Tìm giá trị lớn nhất và

giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \sqrt{2} \cos A + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos B + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos C.$$

3.2.2 Chứng minh bất đẳng thức đại số

Bài toán 3.19. (Xem [6]) Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leq \left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\dots\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

Nhận xét 3.6. Trong Bài toán 3.19 việc chọn hàm $f(x)$ có thể tạo ra

các bài toán khác nhau, chẳng hạn $f(x) = \sqrt{1+e^x}$ ta có

$$\sqrt{1+a_1} + \sqrt{1+a_2} + \dots + \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+\frac{a_1^2}{a_2}} + \sqrt{1+\frac{a_2^2}{a_3}} + \dots + \sqrt{1+\frac{a_n^2}{a_1}}.$$

Bài toán 3.20. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^3}{a_2} + \dots + \frac{a_2^3}{a_3} + \frac{a_n^3}{a_1} \geq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

KẾT LUẬN

Qua một thời gian nghiên cứu, luận văn được trình bày có hệ thống kiến thức về hàm lồi, bất đẳng thức về hàm lồi và các bài toán bất đẳng thức rất quen thuộc trong chương trình toán phổ thông, trong đó quan tâm đến ứng dụng của Bất đẳng thức Jensen và Bất đẳng thức Karamata. Luận văn đã được hoàn thành và đạt được kết quả chính của luận văn **“Hàm lồi và một số bất đẳng thức”**

Trong chương 1 tác giả trình bày kiến thức về hàm lồi.

Trong chương 2 tác giả trình bày Bất đẳng thức Jensen và ứng dụng nó để chứng minh một số bất đẳng thức thông dụng như: Bất đẳng thức Cauchy, Bunhiakopski, Holder,...Sau đó trình bày Bất đẳng thức Karamata, một số định lí, độ gần đều trong tam giác và ứng dụng nó để chứng minh một số bài toán liên quan.

Trong chương 3 tác giả trình bày có hệ thống các bài toán về bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, bất đẳng thức đại số sơ cấp thông dụng trong chương trình toán học phổ thông, tác giả dùng kiến thức liên quan đến tính chất hàm lồi, Bất đẳng thức Jensen và Bất đẳng thức Karamata để chứng minh.

Mặc dù trong quá trình làm luận văn, tác giả đã có nhiều cố gắng nhưng không thể viết hết tất cả các ý tưởng liên quan đến nội dung của luận văn. Đặc biệt một số bài toán tổng quát, các định lí chưa đưa được nhiều về các bài toán cụ thể thông dụng được. Hy vọng trong thời gian tới tác giả sẽ giải quyết các vấn đề này trọn vẹn hơn.

Tác giả mong muốn luận văn sẽ phục vụ thiết thực cho việc dạy và học tại trường phổ thông, ở hiện tại cũng như tương lai.