

المتتاليات العددية

1-1/ تعريف: نسمي متتالية عددية كل تطبيق من N أو X في R حيث $N \supset X$

$$U : N \rightarrow R$$

$$n \rightarrow U(n)$$

أمثلة

1- الدالة التي ترفق بكل عدد طبيعي n العدد الحقيقي $\frac{1+n+n^2}{2}$ هي متتالية عددية معرفة في N

2- الدالة التي ترفق بكل عدد طبيعي n العدد الحقيقي $\frac{n^2+n}{n+2}$ هي متتالية عددية معرفة في $N-\{2\}$

3- الدالة التي ترفق بكل عدد طبيعي n العدد الحقيقي $R-\{-3\}$ هي متتالية عددية معرفة في N

1-2- اصطلاحات:

1/ صورة العدد الطبيعي n بواسطة متتالية عددية U هي U_n بدلا من $U(n)$.

2/ يرمز للمتتالية العددية U بالرمز (U_n) بدلا من U_n

3/ الأعداد الحقيقية U_0, U_1, \dots, U_n تسمى حدود المتتالية العددية (U_n)

4/ العدد الحقيقي U_n يسمى الحد العام للمتتالية العددية (U_n) .

1-3- تحديد متتالية:

تحدد متتالية بمعرفة حدودها أو الوسيلة التي تمكننا من حساب أي حد من حدودها. توجد عدة طرق لتحديد متتالية نذكر منها:

1- المتتالية المعرفة بحددها العام.

أمثلة: 1/ (U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$\forall n \in N : U_n = 5n - 3$$

$$U_0 = 5(0) - 3 = -3$$

$$U_1 = 2$$

$$U_2 = 7$$

$$U_3 = 12$$

2/ (V_n) متتالية عددية معرفة :

$$\forall n \in N : V_n = \frac{n-3}{n+4}$$

$$V_0 = \frac{-3}{4}, V_1 = \frac{-2}{5}, V_2 = \frac{-1}{2}$$

2- المتتالية المعرفة بعلاقة تراجعية (يحسب أي حد من حدودها بالرجوع إلى حدود سبقت معرفتها).

مثال : (U_n) متتالية عددية حيث : $U_0 = 1$

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} &= 2U_n + 3 \\ U_1 &= 2U_0 + 3 = 2(1) + 3 = 5 \\ U_2 &= 2U_1 + 3 = 2(5) + 3 = 13 \\ U_3 &= 2U_2 + 3 = 2(13) + 3 = 29\end{aligned}$$

4-1- تغيرات متتالية عددية:

1/ (U_n) متتالية متزايدة تماما إذا و فقط إذا كان:

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n > 0$$

2/ (U_n) متتالية متزايدة إذا و فقط إذا كان:

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n \geq 0$$

مثال :

لتكن (V_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \sqrt{n+1}$

$$V_{n+1} = \sqrt{(n+1)+1} = \sqrt{n+2}$$

ندرس إشارة المقدار : $V_{n+1} - V_n$

$$\begin{aligned}V_{n+1} - V_n &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \\ &= (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) / (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) \\ &= 1 / (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) \\ \forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} - V_n &> 0\end{aligned}$$

ومنه :

(V_n) م متزايدة تماما.

3/ (V_n) م.ع. متناقصة إذا و فقط إذا كان:

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} - V_n < 0$$

4/ (V_n) م.ع. متناقصة تماما إذا و فقط إذا كان :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} - V_n \leq 0$$

مثال: لتكن (V_n) م.ع. معرفة كمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \frac{1}{n^2 + 1}$$

ندرس إشارة المقدار:

$$\begin{aligned}V_{n+1} - V_n &= \frac{1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{n^2 + 2n + 2} - \frac{1}{n^2 + 1} \\ &= \frac{2n + 1}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)}\end{aligned}$$

ومنه

$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} - V_n < 0$ إذن المتتالية (V_n) م متناقصة تماما

5/ (V_n) م.ع. ثابتة إذا و فقط إذا كان :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} - V_n = 0$$

مثال: لتكن (V_n) م. ح معرفة كما يلي

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = 5$$

المتتالية ثابتة لان :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} - V_n = 5 - 5 = 0$$

(V_n) م دورية $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{N}^* : V_{n+1} = V_n$ من اجل كل عدد طبيعي n حيث e اصغر عدد طبيعي، يدعى دور المتتالية

مثال 1:

1- (V_n) م. ح المعرفة كمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$$

بما أن \cos دالة دورية ودورها 2π فان (V_n) دورية .
إيجاد الدور e :

$$V_{n+e} = V_n \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{\pi}{4}e\right) = \cos\frac{\pi}{4}n$$

$$\Rightarrow e\frac{\pi}{4} = 2\pi \Rightarrow e = 8$$

إذن (V_n) م. دورية ودورها $e = 8$

مثال 2 : لتكن (V_n) م. ح معرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = 5 - V_n$$

(V_n) دورية $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{N} , \forall n \in \mathbb{N} : V_{n+e} = V_n$

$$V_{n+e} = 5 - V_{n+e} = 5 - (5 - V_{n+e} - 2) = V_{n+e} - 2$$

$$V_{n+e} = V_n$$

$$V_{n+e} = V_{n+e} - 2 \Rightarrow V_{n+e} - 2 = V_n$$

ومنه : $e - 2 = 0 \Rightarrow e = 2$ ومنه (V_n) م دورية ودورها $e = 2$

(5-1) المتتاليات المحدودة :

(المتتالية الحقيقية (V_n) محدودة إذا وفقط إذا كان :

$$\exists a \in \mathbb{R}^* , \forall n \in \mathbb{N} : |V_n| \leq a$$

مثال: لتكن المتتالية الحقيقية المعرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \sin(n^2+1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\sin(n^2+1)| \leq 1$$

لان : $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \sin x \leq 1$

$$\forall n \in \mathbb{N} : |V_n| \leq 1$$

ومنه : (V_n) م محدودة

(1-5-1) المتتالية المحدودة من الأعلى:

المتتالية الحقيقية (V_n) محدودة من الأعلى إذا وفقط إذا كان :

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : V_n \leq a$$

مثال :

$$V_n = \frac{2^n + 1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^n}$$

إذن:

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n \leq \frac{3}{2} \quad \left(\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^n} \right) \text{ (لان :)}$$

ومنه المتتالية (V_n) محدودة من الأعلى

2-5-1 المتتالية المحدودة من الأسفل :

المتتالية الحقيقية (V_n) محدودة من الأسفل إذا وفقط إذا كان :

$$\exists b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : V_n \geq b$$

مثال :

$$V_n = 2 \cos(n+1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : -1 \leq \cos(n+1) \leq 1 \text{ لدينا :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : -2 \leq 2 \cos(n+1) \leq 2 \text{ إذن :}$$

ومنه المتتالية (V_n) محدودة من الأسفل بـ (-2)

6-1 المتتالية المتقاربة و المتباعدة:

إذا قبلت المتتالية (U_n) نهاية ℓ عندما يؤول $n \leftarrow +\infty$ نقول أنها متقاربة

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \ell \quad (U_n) \text{ متقاربة من } \ell \text{ إذا وفقط إذا كان :}$$

$$n \rightarrow \infty$$

ملاحظة : إذا كانت (U_n) غير متقاربة نقول أنها متباعدة

أمثلة:

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = 2n+3 : \mathbb{N} \text{ معرفة في } \mathbb{N} \text{ م . ع .}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n+3 = +\infty$$

$$n \rightarrow +\infty$$

إذن (U_n) متباعدة

2/ (U_n) م.ع. معرفة كمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = \frac{2n-3}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{n} = 2 = \ell$$

$$n \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty$$

ومنه (U_n) متقاربة

3/ (V_n) م.ع. معرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n = 3 + \frac{5}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 + \frac{5}{n} = 3 = \ell$$

ومنه (V_n) متقاربة

تطبيق : لتكن (V_n) م. ح . معرفة كمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

(1) بين أن (V_n) م. متقاربة

(2) اكتب على الشكل :

$$V_n = \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1}$$

(3) لتكن (U_n) م. معرفة كمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = \sum_{e=1}^{e=n} V_n$$

- أعط الحد العام للمتتالية (U_n)

- بين ان (U_n) متقاربة .

الحل:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = 0 / 1$$

$$n \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty$$

بما أن (V_n) لها نهاية منتهية فإنها متقاربة

/2 تعيين قيمتي α و β :

$$V_n = \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1} = \frac{\alpha(2n+1) + \beta(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2\alpha + 2\beta)n + \alpha - \beta}{(2n-1)(2n+1)}$$

بالمطابقة نجد :

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha = \beta + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

ومنه :

$$V_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = \sum_{e=1}^n V_n \quad - / 3$$

أي :

$$U_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n = (1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \dots + (\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1}) + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}) = 1 - \frac{1}{2n+1}$$

إذن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = 1 - \frac{1}{2n+1} \dots \dots \dots (*)$$

نبرهن على صحة العلاقة (*) بالتراجع :
لتكن $P(n)$ هذه الخاصية

$$U_1 = V_1 = 1 - \frac{1}{3} \quad : n=1 \text{ من اجل } (*) \text{ صحة من اجل } n=1$$

$$U_1 = 1 - \frac{1}{3} \quad \text{الطرف الايمن :}$$

$$1 - \frac{1}{1+1 \times 2} = 1 - \frac{1}{3} \quad \text{الطرف الأيسر :}$$

الطرف الايمن يساوي الطرف الأيسر إذن الخاصية (*) صحيحة من اجل $n=1$
نفرض أن (*) صحيحة من اجل n و نبرهن صحتها من اجل $(n+1)$

$$U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2(n+1)+1} \quad \text{أي :}$$

$$U_{n+1} = \sum_{e=1}^n V_n = U_n + V_{n+1}$$

$$= U_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \quad (\text{حسب فرض التراجع})$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+3} = 1 - \frac{1}{2(n+1)+1}$$

و منه الخاصية (*) صحيحة من اجل $(n+1)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = 1 - \frac{1}{2n+1} \quad \text{إذن :}$$

3/- إثبات أن (U_n) متقاربة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{2n+1}) = 1 (\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0 \text{ لان})$$

$$n \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty$$

بما أن (U_n) لها نهاية منتهية فإنها متقاربة .

ملاحظة :

- كل متتالية متباعدة ليست متقاربة .
- نظرية 1 : كل متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى متقاربة .
- نظرية 2 : كل متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل متقاربة .
- 1-7 - نهاية متتالية : (U_n) متتالية عددية معرفة بحددها العام $U_n, n \in \mathbb{N}$

نهاية المتتالية (U_n) لما $\infty \leftarrow n$ هي نهاية U_n لما $\infty \leftarrow n$
النظريات على النهايات : (U_n) و (V_n) متتاليتان عدديتان .

ℓ و ℓ' عددان حقيقيان، نقبل بدون برهان النظريات التالية المعطاة على شكل جداول. (انظر في الكتاب المدرسي) .

المتتالية الحسابية

1- تعريف : نسمي متتالية حسابية ذات الأساس r كل متتالية عددية (U_n) تحقق مايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = U_n + r$$

مثال : $1, 7, 13, 19, \dots$ هي متتالية حسابية أساسها $r = 6$

$2/$ لتكن (U_n) متتالية حسابية حدها الأول $V_1 = 5$ و أساسها $r = 2$

$$V_1 = 5, V_2 = 5 + 2 = 7, V_3 = V_2 + r = 7 + 2 = 9$$

إذن حدود هذه المتتالية هي : $5, 7, 9, 11, 13, 15$.

2- الحد العام لمتتالية حسابية : (U_n) متتالية حسابية حدها الأول U_0 و أساسها r

$$U_1 = U_0 + r$$

$$U_2 = U_1 + r = U_0 + 2r$$

- الإثبات بالتراجع : الشرط الابتدائي : $n = 0$

$$U_0 = U_0 + 0 \times r = U_0$$

و منه الشرط الابتدائي محقق.

الشرط النهائي : $\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$P(n) : U_n = U_0 + n r$$

$$P(n+1) : U_{n+1} = U_0 + (n+1) r$$

$$U_n = U_0 + n r \Leftrightarrow \text{P(n) صحيحة}$$

$$U_n + r = U_n + n r + r \Leftrightarrow$$

$$U_{n+1} = U_0 + (n+1) r \Leftrightarrow$$

و منه : $P(n+1)$ صحيحة و منه : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n = U_0 + n r$

ملاحظة : إذا كان الحد الأول للمتتالية الحسابية هو : U_1 فان :

$$U_n = U_1 + (n-1) r$$

العلاقة بين حدود المتتالية الحسابية : $U_n = U_e + (n-e) r$

3- تغيراتها : (U_n) متزايدة : $r > 0$
 (U_n) متناقصة : $r < 0$
 (U_n) ثابتة : $r = 0$

4- خاصية ثلاثة حدود متعاقبة :

x, y, z ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها r .

$$\begin{cases} y = x + r \\ z = y + r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = y - x \\ z = y + y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = y - x \\ y = \frac{x + z}{2} \end{cases}$$

يسمى y بالوسط الحسابي .

مثال 1 : اوجد ثلاثة أعداد صحيحة من متتالية حسابية بحيث مجموعها يساوي 24 و مجموع مربعاتها يساوي 200 .

الحل : x, y, z ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها r

$$x = y - r$$

$$z = y + r$$

$$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-r) + (y) + (y+r) = 24 \\ (y-r)^2 + y^2 + (y+r)^2 = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 8 \\ 3y^2 + 2r^2 = 200 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 8 \\ 2r^2 = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 8 \\ |r| = 2 \end{cases}$$

الحالة 1 :

$$r = -2$$

$$Y = 8 \Rightarrow x = 10, z = 6$$

$$(x, y, z) = (10, 8, 6)$$

الحالة 2 :

$$r = 2$$

$$Y = 8, x = 6, z = 10$$

$$(x, y, z) = (6, 8, 10)$$

مثال 2 : اوجد ثلاثة أعداد حقيقية z, y, x متتابعة من متتالية حسابية تحقق ما يلي :

$$X + y + z = 15$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{7}{10}$$

الحل : الوسط الحسابي للأعداد z, y, x هو :

$$Y = \frac{x + z}{2}$$

$$X + y + z = 15 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{10} \dots\dots\dots(2)$$

$$2y = x + z \dots\dots\dots(3)$$

نعوض قيمة $(x+z)$ في المعادلة (1) نجد :

$$Y = 5 \text{ و منه : } 3y = 15$$

نعوض قيمة y في المعادلة (2) نجد :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10} \quad \text{و منه} \quad \frac{1}{x} = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$$

و منه : $x = 2$

بتعويض قيمتي x و y في المعادلة (1) نجد : $z = 8$
إذن الأعداد المطلوبة هي : 2، 5، 8

5- مجموع n حداً الأول من حدود متتالية حسابية :

لتكن (U_n) متتالية حسابية ذات الحد الأول U_0 و الأساس r
لنحسب المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$
لدينا : 1/ $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-2} + U_{n-1}$
2/ $S_n = U_{n-1} + U_{n-2} + \dots + U_1 + U_0$

بالجمع نجد :

$$2S_n = U_0 + U_{n-1} + U_1 + U_{n-2} + \dots + U_{n-1} + U_0$$

إذن :

$$2S_n = n[U_0 + U_{n-1}]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [U_0 + U_{n-1}] = \frac{n}{2} [\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير}]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2U_0 + (n-1)r] \quad \text{و منه فإن}$$

ملاحظة : إذا كان الحد الأول لمتتالية ح هو U_1 فإن :

$$S_n = \frac{n}{2} [U_1 + U_n] = \frac{n}{2} [2U_1 + (n-1)r]$$

تمارين محلولة :

تمرين 1 : نعتبر المتتالية العددية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$V_0 = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = \frac{4}{4 - V_n}$$

1/ احسب V_1, V_2, V_3, V_4, V_5

2/ نعرف المتتالية العددية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحدها العام :

$$U_n = \frac{1}{V_n - 2}$$

- برهن أن المتتالية (U_n) هي متتالية حسابية يطلب تعيين حدها الأول U_0 و أساسها r .

- اكتب الحد العام U_n بدلالة n .

- استنتج مجموع n حداً من المتتالية (U_n) .

- استنتج عبارة V_n بدلالة n .

الحل :

1/ حساب :

$$V_1 = V_{0+1} = \frac{4}{4 - V_0} = \frac{4}{4 - 1} = \frac{4}{3}$$

$$V_2 = V_{1+1} = \frac{4}{4-V_1} = \frac{4}{4-\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$V_3 = V_{2+1} = \frac{4}{4-V_2} = \frac{4}{4-\frac{3}{2}} = \frac{8}{5}$$

$$V_4 = V_{3+1} = \frac{4}{4-V_3} = \frac{4}{4-\frac{8}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$V_5 = V_{4+1} = \frac{4}{4-V_4} = \frac{4}{4-\frac{5}{3}} = \frac{12}{7}$$

2/ إثبات أن (U_n) متتالية حسابية :

(U_n) متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان : $U_{n+1} - U_n = r$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{V_{n+1}-2} - \frac{1}{V_n-2} = \frac{1}{\frac{4}{4-V_n}-2} - \frac{1}{V_n-2} = \frac{1}{\frac{4-8+2V_n}{4-V_n}} - \frac{1}{V_n-2} \\ &= \frac{4-V_n}{2V_n-4} - \frac{1}{V_n-2} = \frac{4-V_n}{2(V_n-2)} - \frac{1}{V_n-2} \\ &= \frac{4-V_n-2}{2(V_n-2)} = \frac{2-V_n}{2(V_n-2)} = -\frac{1}{2} = r \end{aligned}$$

- تعيين الحد الأول : U_0

$$U_0 = \frac{1}{V_0-2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

- تعيين الحد العام :

$$\begin{aligned} U_n &= U_0 + n r = (-1) + n\left(\frac{1}{2}\right) = -1 - \frac{1}{2}n \\ &= -1 - \frac{n}{2} = \frac{-2-n}{2} \end{aligned}$$

- تعيين S_n :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n}{2} [2U_0 + (n-1)r] = \frac{n}{2} \left[2(-1) + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{n}{2} \left[-2 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{n}{2} \left[-\frac{3}{2} - \frac{n}{2} \right] \\
&= \frac{n}{4} [-3 - n]
\end{aligned}$$

- استنتاج عبارة V_n :
ومنه :

$$U_n = \frac{1}{V_n - 2}$$

$$U_n V_n - 2U_n = 1$$

$$1 + 2U_n = U_n V_n$$

$$V_n = \frac{1 + 2U_n}{U_n} \quad \text{ومنه :}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 + 2\left(\frac{n}{4}(-3 - n)\right)}{\frac{n}{4}(-3 - n)} = \\
&= \frac{4 + n(-3 - n)}{n(-3 - n)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \frac{n}{2}(-3 - n)}{\frac{n}{4}(-3 - n)} &= \frac{2 + n(-3 - n)}{\frac{n}{4}(-3 - n)} = \frac{2 + n(-3 - n)}{2} \times \frac{4}{n(-3 - n)} = (2 + n(-3 - n)) \left(\frac{2}{n(-3 - n)} \right) = \frac{4}{n(-3 - n)} \\
&+ 2 = 2 \left[1 + \frac{2}{n(-n - 2)} \right]
\end{aligned}$$

تمرين 2 :

لتكن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية معرفة ب :

$$V_0 = -1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = \alpha V_n + 5$$

1- عين قيمة α حتى تكون المتتالية (V_n) حسابية أساسها غير معدوم

2- من اجل $\alpha = 1$: احسب الحد العام V_n بدلالة n .

- احسب المجموع $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

- عين قيمة n حتى تكون $S_n = 69$

الحل :

$$\begin{cases} V_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = \alpha V_n + 5 \end{cases}$$

1- تعيين قيمة α حتى تكون (V_n) متتالية حسابية :

(V_n) متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان : $V_{n+1} - V_n = r$

$$V_{n+1} - V_n = \alpha V_n + 5 - V_n = (\alpha - 1)V_n + 5$$

(V_n) متتالية حسابية و منه : $\alpha - 1 = 0$ و منه : $\alpha = 1$
 من اجل $\alpha = 1$ و (V_n) متتالية حسابية يعني أن $r = 5$ و حدها الأول $V_0 = -1$
 1-2 حساب الحد العام: $V_n = V_0 + n r = -1 + 5n$
 2-2 حساب S_n :

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = \frac{(n+1)}{2} [2V_0 + n r] = \frac{n+1}{2} [2(-1) + n(5)] = \frac{(n+1)(5n-2)}{2} =$$

3-2- تعيين قيمة n :

$$\begin{aligned} S_n &= 69 \\ &= \frac{(n+1)(5n-2)}{2} = 69 \\ (n+1)(5n-2) &= 138 \\ 5n^2 + 3n - 140 &= 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac &= (3)^2 - 4(5)(-140) = 2809 \\ \sqrt{\Delta} &= 53 \\ n_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 53}{2(5)} = \frac{56}{10} \notin N \\ n_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 53}{2(5)} = 5 \in N \\ \text{و منه : } n &= 5 \end{aligned}$$

تمرين 3:

لتكن المتتالية $(V_n)_{n \in N}$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_1 = 3 \\ \forall n \in N^* - \{1\}: V_{n+2} = 4V_{n+1} - 4V_n \end{cases}$$

1/ نضع من اجل n عدد طبيعي:

$$U_n = \frac{V_n}{2^n}$$

- بين أن المتتالية (U_n) متتالية حسابية عين أساسها r و حدها الأول.

2/ احسب U_n بدلالة n ثم عبر عن V_n بدلالة n .

3/ احسب المجموع $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ بدلالة n .

4/ احسب قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = \frac{9}{2}$

الحل:

1- إثبات أن (U_n) متتالية حسابية:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{V_{n+1}}{n+1} - \frac{V_n}{2n} = \frac{4V_n - 4V_{n-1} - 1}{n+1} - \frac{V_n}{2n}$$

$$= \frac{4(V_n - V_{n-1})}{2^{n+1}} - \frac{V_n}{2^n} = \frac{2(V_n - V_{n-1})}{2^n}$$

$$= \frac{V_n - 2V_{n-1}}{2^n} = \frac{V_n}{2^n} - \frac{2V_{n-1}}{2^n}$$

$$= \frac{V_n}{2^n} - \frac{V_{n-1}}{2^{n-1}} = U_n - U_{n-1}$$

ومنه :

$$r = U_1 - U_0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$U_0 = 1$$

2/ حساب الحد العام : U_n

$$U_n = U_0 + nr = 1 + n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{n}{2} = \frac{2+n}{2}$$

استنتاج عبارة V_n :

$$U_n = \frac{V_n}{2^n} \Rightarrow V_n = 2^n \times U_n = 2^n \times \left(\frac{2+n}{2}\right) = 2^{n-1}(2+n)$$

3/ استنتاج عبارة S_n :

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$= \frac{(n+1)}{2} [2U_0 + nR] = \frac{(n+1)}{2} \left[2 + n\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{(n+1)}{2} \left[2 + \frac{n}{2} \right] = \frac{(n+1)}{2} \left[\frac{n+4}{2} \right] = \frac{(n+1)(n+4)}{4}$$

4/ إيجاد قيمة العدد الطبيعي n :

$$\frac{2}{9} S_n = \frac{(n+1)(n+4)}{4} = \frac{9}{2}$$

ومنه : $2(n+1)(n+4) = 36$

$$2n^2 + 10n + 8 - 36 = 0$$

$$2n^2 + 10n - 28 = 0$$

$$n^2 + 5n - 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 324$$

$$n_1 = -2 \notin \mathbb{N}$$

$$n_2 = 7 \in \mathbb{N} \text{ ومنه : } n = 7$$

تمرين 4:

لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_1 = 4 \\ \forall n \in N^* : U_{n+1} = \alpha U_n - (\alpha - 1)U_{n-1} \end{cases}$$

حيث α عدد حقيقي معطى
ولتكن المتتالية العددية (V_n) معرفة كما يلي :

$$\forall n \in N^* : V_n = U_n - U_{n-1}$$

1- عين قيمة α حتى تكون (V_n) متتالية ثابتة .

2- في هذه الحالة استنتج :

- أن (U_n) متتالية حسابية يطلب إيجاد أساسها و حدها الأول .

- اكتب عبارة U_n بدلالة n .

- احسب عبارة S_n بدلالة n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

ثم اثبت ان S_n يقبل القسمة على 2 .

- عين قيمة n حيث : $S_n = 132$

الحل :

- تعيين قيمة α :

(V_n) متتالية حسابية اذا و فقط اذا كان : $V_{n+1} - V_n = 0$

$$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n - (U_n - U_{n-1})$$

$$= \alpha U_n - (\alpha - 1)U_{n-1} - 2U_n + U_{n-1} = 0$$

$$= (\alpha - 2)U_n - ((\alpha - 1) + 1)U_{n-1} = 0$$

$$= (\alpha - 2)U_n - (\alpha - 2)U_{n-1} = 0$$

$$= (\alpha - 2)(U_n - U_{n-1}) = 0$$

و منه : $\alpha = 2$.

من اجل : $\alpha = 2$:

- إثبات أن (U_n) متتالية حسابية :

$$U_{n+1} = 2U_n - U_{n-1}$$

$$U_{n+1} - U_n = 2U_n - U_{n-1} - U_n = U_n - U_{n-1}$$

(U_n) متتالية حسابية و منه : $r = 2$ و $U_0 = 2$

- عبارة الحد العام U_n بدلالة n :

$$U_n = U_0 + nr = 2 + 2r$$

- عبارة S_n : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$$= \frac{(n+1)}{2} (2U_0 + nr) = \frac{(n+1)}{2} (4 + 2n)$$

$$= (n+1)(n+2)$$

- إثبات أن S_n يقبل القسمة على 2 :

S_n هو جداء عددين متتاليين

$$S_n = (n+1)(n+2) = 132$$

$$= n^2 + 3n + 2 = 132$$

$$= n^2 + 3n - 130 = 0$$

$n/13 \notin N$ مرفوض

$n/10 \in N$ مقبول

و منه : $n = 10$

تمرين 5 :

لتكن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ الحسابية التي حدها الأول U_1 و أساسها r
1/ عين U_1 ، r علما أن :

$$U_1 + U_2 + U_3 = 24$$

$$U_4 + U_5 + U_6 + U_7 = 74 \quad (*)$$

ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n و عين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون $U_n > 5996$.
2/ لتكن (V_n) متتالية حسابية حدها الأول V_1 و أساسها r .
عين V_1 و الأساس r حتى يكون : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 2S_n = n(3n+7)$

الحل :

نعلم أن الوسط الحسابي : $a+c=2b$

$$U_1 + U_2 + U_3 = 24$$

و لدينا :

$$3U_2 = 24$$

$$U_2 = 8$$

تصبح الجملة (*) من الشكل :

$$U_1 + U_3 = 16$$

$$U_4 + U_5 + U_6 + U_7 = 74$$

و هذا يعني ان :

$$U_1 + U_1 + 2r = 16$$

$$U_1 + 3r + U_1 + 4r + U_1 + 5r + U_1 + 6r = 74$$

أي :

$$2U_1 + 2r = 16$$

$$4U_1 + 18r = 74$$

أي :

$$U_1 + r = 8 \dots\dots\dots (1)$$

$$2U_1 + 9r = 37 \dots\dots\dots (2)$$

من (1) نجد : $r = 8 - U_1$

نعوض قيمة r في (2) نجد :

$$2U_1 + 9(8 - U_1) = 37$$

$$2U_1 + 72 - 9U_1 = 37$$

أي :

$$-7U_1 = 35 -$$

$$U_1 = 5$$

و منه :

بتعويض قيمة U_1 في r نجد : $r = 8 - 5 = 3$

- استنتاج عبارة U_n بدلالة n : $U_n = U_1 + (n-1)r$

$$= 5 + (n-1)3 = 5 + 3n - 3 = 3n + 2$$

- تعيين اصغر قيمة للعدد الطبيعي n :

$$U_n > 5996$$

$$3n+2>5996$$

$$3n>5994$$

$$n>1998$$

$$- \text{ تعيين } V_1 \text{ و } r : 2S_n = n(3n+7)$$

$$2\left(\frac{n}{2}\right)(2U_1+(n-1)r) = n(3n+7)$$

$$2U_1+(n-1)r = 3n+7$$

$$2U_1+(n-1)r = 3n+7$$

$$nr + (2U_1 - r) = 3n+7$$

$$r = 3$$

أي:

$$r=3$$

$$2U_1 - r = 7$$

$$U_1 = 5$$

المتتالية الهندسية

تعريف: تسمى المتتالية الهندسية ذات الأساس q كل متتالية (V_n) تحقق العلاقة التالية :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = q V_n$$

إذن تعرف المتتالية الهندسية بمعرفة حدها الأول و الأساس q .

الحد العام لمتتالية هندسية:

(V_n) متتالية هندسية حدها الأول V_0 و أساسها q و بالتالي :

$$V_1 = V_0 \times q$$

$$V_2 = V_1 \times q = V_0 \times q^2$$

.

.

.

$$V_n = V_0 \times q^n$$

و منه : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = V_0 \times q^n$

ملاحظة: إذا كان الحد الأول لمتتالية هندسية هو V_1 فإن :

$$V_n = V_1 \times q^{n-1}$$

مثال: لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{2}$ و حدها الأول $U_1 = 5$

نحسب الحد الحادي عشر ؟

الحل:

الحد الحادي عشر في هذه الحالة هو U_{11} .

$$U_{11} = U_1 \times q^{10} = 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{5}{1024}$$

تغييرات متتالية هندسية: (U_n) متتالية هندسية حدها الأول U_0 و أساسها q

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n \times q^{n+1} - U_0 \times q^n = U_0 q^n (q - 1)$$

لندرس إشارة $[U_0 q^n (q - 1)]$: نلاحظ أن الإشارة الفرق تتعلق على إشارة U_0 و $q^n(q-1)$.

1/ إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية (U_n) ثابتة و جميع حدودها مساوية للحد الأول.

2/ إذا كان $q < 0$ فإن حدود (U_n) تكون تارة موجبة و تارة سالبة (U_n) غير رتيبة.

3/ إذا كان $q > 0$ فإن إشارة الفرق تتوقف على إشارتي (U_0) ، $(q-1)$:

- $0 < q < 1$ ، $U_0 > 0$: (U_n) متناقصة.

- $q > 1$ ، $U_0 > 0$: (U_n) متزايدة.

- $0 < q < 1$ ، $U_0 < 0$: (U_n) متزايدة.

- $q > 1$ ، $U_0 < 0$: (U_n) متناقصة.

مثال 1 : (U_n) متتالية هندسية معرفة بحدها العام : $U_n = 2^n$ أساسها $q = 2$ و حدها الأول 1 فهي

متزايدة تماما لان $q = 2 > 1$

مثال 2 :

$$U_n = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

(U_n) متتالية هندسية حدها الأول 2 و أساسها $q = \frac{1}{2}$ فهي متناقصة تماما لان $q = \frac{1}{2} < 1$

خاصية ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية: a, b, c ثلاث حدود متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط

إذا كان : $a \cdot c = b^2$.

العدد b يسمى الوسط الهندسي للعددين a, c

تطبيق : عين خمسة حدود من متتالية هندسية V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 مع العلم أن :

$$V_1 \times V_5 = 25$$

$$V_2 + V_3 + V_4 = \frac{35}{2}$$

الحل :

$$V_1 \times V_5 = 25$$

و هذا يعني : $V_1 \times V_1 \times q^4 = 25$

$$(V_1 q^2) = 25$$

$$V_1 q^2 = 5$$

لكن : $V_3 = V_1 \times q^2$ و منه فإن : $V_3 = 5$

$$V_2 + V_3 + V_4 = \frac{35}{2}$$

$$V_2 + V_4 = \frac{35}{2} - 5 \quad (V_3 = 5) \quad \text{لان :}$$

و منه :

$$V_2 + V_4 = \frac{25}{2}$$

لكن : $V_2 \times V_4 = V_3^2$ (لان V_3 هو الوسط الهندسي)

إن :

$$V_2 + V_4 = \frac{25}{2} \dots\dots(1)$$

$$V_2 \times V_4 = 25 \dots\dots(2)$$

من (1) و (2) نجد :

$$V_2 \left(\frac{25}{2} - V_2 \right) = 25$$

أي :

$$-V_2^2 + \frac{25}{2} V_2 - 25 = 0$$

نضرب طرفي المعادلة ب (2) نجد : $-2V_2^2 + 25 - 50 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 225 = (15)^2$$

$$V_2' = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 10$$

$$V_2'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5}{2}$$

الحالة 1 : $V_2 = 1$

$$V_2 + V_4 = \frac{25}{2}$$

ومنه :

$$V_4 = \frac{25}{2} - 10 = \frac{5}{2}$$

أي :

$$V_1 = 20 , \quad V_5 = \frac{5}{4}$$

و الاعداد هي : 20 ، 10 ، 5 ، $\frac{5}{2}$ ، $\frac{5}{4}$.

الحالة 2 :

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{5}{\frac{5}{2}} = 2$$

ومنه :

$$V_1 = \frac{V_2}{q} = \frac{5}{4}$$

$$V_4 = V_3 \times q = 5 \times 2 = 10$$

$$V_5 = V_4 \times q = 10 \times 2 = 20$$

الأعداد هي : $\frac{5}{4}$ ، $\frac{5}{2}$ ، 5 ، 10 ، 20.

مجموع n حدا الاول من متتالية هندسية : (U_n) متتالية هندسية حدها الاول U_0 و اساسها q لنحسب مجموع

n حدا الاول من هذه المتتالية أي :

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots\dots\dots + U_{n-1}$$

لدينا:

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots\dots\dots + U_{n-1}$$

$$S_n = U_0 + U_0 \times q + U_0 \times q^2 + \dots + U_0 \times q^{n-1}$$

$$S_n = U_0 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

$$qS_n = qU_0 + U_0q^2 + U_0q^3 + \dots + U_0q^n$$

ومنهُ :

$$(q - 1) S_n = qU_0 + U_0q^2 + \dots + U_0q^n - qU_0 - q^2U_0 - \dots - U_0q^{n-1}$$

$$= U_0 [q^n - 1]$$

$$\Rightarrow S_n = U_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

حيث n عدد الحدود .

ملاحظة : اذا كان الحد الاول للمتتالية الهندسية هو U_1 :

$$S_n = U_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

مثال 1 : (U_n) متتالية معرفة كما يلي :

$$U_0 = 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 U_{n+1} = U_n + 1$$

(V_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_n - 1$$

1/ بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين الاساس و الحد الاول .

$$2/ احسب : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$$

الحل :

$$V_n = U_n - 1 \quad /1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = U_{n+1} - 1$$

$$= \frac{U_{n+1}}{2} - 1$$

$$= \frac{U_{n+1} - 2}{2} = \frac{1}{2} [U_{n+1} - 1]$$

$$= \frac{1}{2} V_{n+1}$$

ومنهُ : (V_n) متتالية هندسية اساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها : $V_0 = U_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

2/ حساب S_n :

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$= (V_0 + 1) + (V_1 + 1) + \dots + (V_n + 1)$$

$$= (V_0 + V_1 + \dots + V_n) + (n + 1)$$

$$= V_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + (n + 1)$$

$$= V_0 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} + (n + 1)$$

$$= -2 \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} - 1 \right] + (n+1)$$

$$S_n = -2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + n + 3$$

مثال 2 : احسب المجموع التالي :

$$S_n = 1 + 11 + 111 + 1111 + \dots + 111 \dots 11$$

الحل : لدينا :

$$\begin{aligned} 9 S_n &= 9 + 99 + 999 + \dots + 999 \dots 99 \\ &= (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \dots + (10^n - 1) \\ &= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - n \end{aligned}$$

$$= 10 \cdot \frac{10^n - 1}{9} - n$$

ومنه :

$$S_n = \frac{10(10^n - 1)}{81} - \frac{n}{9}$$

نهاية متتالية هندسية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = q^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty (q > 1)$$

2/ نهاية متتالية هندسية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حيث الحد الأول U_0 و الأساس q فان :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = U_0 \times q^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = ? \quad \text{فان :}$$

نميز عدة حالات :

1/ $q > 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} U_0 q^n = +\infty : U_0 > 0 \\ &\quad - \infty : U_0 < 0 \end{aligned}$$

ومنه : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متباعدة.

2/ $q = 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_0 \times q^n = U_0$$

ومنه : (U_n) متتالية متقاربة.

3/ $1 > q > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_0 \cdot q^n = 0$$

ومنه (U_n) متتالية متقاربة.

4/ $0 > q > -1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_0 \cdot q^n = 0$$

ومنه (U_n) متتالية متقاربة.

$$: q \leq -1 \quad /5$$

غير موجودة $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n \cdot U_0 \neq$

$$n \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty$$

ومنه (U_n) المتتالية متباعدة.

حدود (U_n) لا تحتفظ بإشارة ثابتة وبالتالي U_n لا تقبل أي نهاية.

النتيجة: تكون المتتالية الهندسية متقاربة إذا وفقط إذا كان أساسها $q \in]-1, 1[$.

تمرين: a, b, c ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية حيث مجموعها 63 و جدواها 1728.

- احسب a, b, c ؟

الحل:

$$\begin{cases} a \times c = b^2 \\ a + b + c = 63 \\ a \times b \times c = 1728 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} a \times c = b^2 \\ a + b + c = 63 \\ b^3 = 1728 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} a \times c = 144 \\ a + c = 63 - 12 \\ b = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \times c = 144 \\ a + c = 51 \\ b = 12 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} b = 12 \\ c = 51 - a \\ a \times (51 - 1) = 144 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} b = 12 \\ c = 51 - a \\ 51a - a^2 = 144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 12 \\ c = 51 - a \\ 51a - a^2 - 144 = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} b = 12 \\ c = 51 - a \dots\dots\dots (*) \\ -a^2 + 51a - 144 = 0 \end{cases}$$

حساب قيم a :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (51)^2 - 4(-1)(-144) = 2025$$

$$\sqrt{\Delta} = 45 > 0$$

ومنه يوجد قيمتين ل a :

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-51 - 45}{-2} = 48$$

$$a_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-51 + 45}{-2} = 3$$

بتعويض قيم (a) في $(*)$ نجد :

$$c = 51 - a = \begin{cases} c = 51 - 48 = 3 \\ \text{أو} \\ c = 51 - 3 = 48 \end{cases}$$

وعليه نجد :

$$\begin{cases} b = 12 \\ c = 3, c = 48 \\ a = 48, a = 3 \end{cases}$$

$$S = \{ (48, 12, 3), (3, 12, 48) \}$$

تمارين محلولة :

ت 01 : لتكن المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ كمايلي

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = \sqrt{2 + V_n} \end{cases}$$

- 1/ بين أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما ؟
- 2/ بين أن المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى بـ 2 ؟
- 3/ بين أن هذه المتتالية متقاربة ؟

الحل:

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = \sqrt{2 + V_n} \end{cases}$$

1/ إثبات أن المتتالية (V_n) متزايدة:

لإثبات أن (V_n) متزايدة يكفي أن نثبت أن:

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} - V_n > 0$$

لتكن $P(n)$ هذه الخاصية

ا/ نتحقق من صحة الخاصية $P(n)$ من اجل $n = 0$

$$P_1 - P_0 = \sqrt{2} > 0 \text{ محققة}$$

ب/ نفرض صحة $P(n)$ من اجل $n = k$ ومنه :

$$P_{k+1} - P_k > 0$$

ونثبت صحتها من اجل $n = k+1$: $P_{k+2} - P_{k+1} > 0$

إذن:

$$\begin{aligned} P_{k+2} - P_{k+1} &= \sqrt{2 + V_{k+1}} - \sqrt{2 + V_k} \\ &= \frac{2 + V_{k+1} - 2 - V_k}{\sqrt{2 + V_{k+1}} + \sqrt{2 + V_k}} \\ &= \frac{V_{k+1} - V_k}{\sqrt{2 + V_{k+1}} + \sqrt{2 + V_k}} > 0 \end{aligned}$$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} - V_n > 0$

2/ إثبات أن (V_n) محدودة من الأعلى بـ 2:

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n < 2$$

لتكن $P(n)$ هذه الخاصية

ا) نتحقق من صحة الخاصية $P(n)$ من اجل $n = 0$

$$V_0 = 0 < 2 \text{ أي } V_0 < 2 \text{ محققة}$$

ب) نفرض صحة $P(n)$ من اجل $n = k$: $V_k < 2$

ونثبت صحتها من اجل $n = k+1$: $V_{k+1} < 2$

$$\text{اذن: } V_{k+1} < 2 \text{ أي } (\sqrt{2 + V_k})^2 < 2^2$$

$$V_k + 2 < 4 \text{ أي } \sqrt{V_k + 2} < 2 \text{ أي } V_{k+1} < 2 \text{ محققة}$$

ومنه : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n < 2$

3/ استنتاج ان (V_n) متقاربة :

متقاربة (V_n) هذا يعني :

متزايدة تماما $1/(V_n)$

2/ $\forall n \in \mathbb{N} : V_n < 2$

نفرض أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell$

$n \rightarrow +\infty$

وبالتالي :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + V_n} \dots \dots \dots (1)$$

$n \rightarrow +\infty$

$n \rightarrow +\infty$

$$(1) \Leftrightarrow (\ell = \sqrt{2 + \ell})$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\begin{cases} \ell_1 = -1 \\ \ell_2 = 2 \end{cases}$$

اذن: $\ell = 2$

ومنه : (V_n) متتالية متقاربة

ت02: (V_n) متتالية هندسية مجموع حدودها الثلاثة الاولى يساوي 13 وحدها الاول يساوي 1:

- عين أساسها ؟

- عين الحد السادس ؟

الحل:

$$S_n = 13 \Leftrightarrow V_1 \cdot \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 13$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 13$$

$$\Leftrightarrow \frac{(q - 1)(q^2 + q + 1)}{(q - 1)} = 13$$

$$\Leftrightarrow q^2 + q + 1 = 13$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_1 = 3 \\ q_2 = -4 \end{cases} \begin{cases} V_6 = V_1 \cdot (q)^5 = 243 \\ V_6 = V_1 \cdot (q)^5 = -1024 \end{cases}$$

ت03: (V_n) متتالية عددية معرفة كمايلي :

$$V_0 = 0$$

و

$$V_1 = a / a \in R^*$$

$$\forall n \in N : \forall k \in R^* - \{0,1,2\} : V_{k+2} = kV_{n+1} - (k-1)V_n$$

و (U_n) متتالية عددية حيث:

$$\forall n \in N : U_n = V_{n+1} - V_n$$

1/ بين أن (U_n) متتالية هندسية محددًا q و U₀

2/ احسب U_n بدلالة n,k,a

3/ (W_n) متتالية عددية حيث:

$$\forall n \in N : W_n = V_{n+1} - (k-1)V_n$$

- برهن أن (W_n) متتالية ثابتة.

4/ احسب W_n بدلالة n

5/ احسب V_n بدلالة U_n و W_n ثم بدلالة n,k,a .

الحل:

1/ إثبات أن (U_n) متتالية هندسية:

$$\begin{aligned} \forall n \in N : U_{n+1} &= V_{n+2} - V_{n+1} \\ &= k \cdot V_{n+1} - (k-1)V_n - V_{n+1} \\ &= V_{n+1}(k-1) - (k-1)V_n \\ &= (k-1)[V_{n+1} - V_n] \\ &= (k-1)U_n \end{aligned}$$

ومنه (U_n) متتالية هندسية أساسها q = k-1 وحدها الأول :

$$U_0 = V_1 - V_0 = a - 0 = a$$

2/ حساب U_n بدلالة n,k,a :

$$\forall n \in N : U_n = U_0 \cdot q^n = a \cdot (k-1)^n$$

3/ إثبات أن (W_n) متتالية ثابتة

$$\begin{aligned} \forall n \in N : W_{n+1} - W_n &= V_{n+2} - (k-1)V_{n+1} - V_{n+1} + (k-1)V_n \\ &= k \cdot V_{n+1} - (k-1)V_n - (k-1)V_{n+1} - V_{n+1} + (k-1)V_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (W_n) متتالية ثابتة.

4/ حساب W_n بدلالة n

بما أن (W_n) متتالية ثابتة فإن: W_n = W₀

$$\begin{aligned} \forall n \in N : W_n &= W_0 = V_1 - (k-1)V_0 \\ &= a - (k-1) \cdot 0 = a \end{aligned}$$

5/ حساب V_n بدلالة U_n و W_n

$$\begin{aligned} \forall n \in N : U_n - W_n &= V_{n+1} - V_n - V_{n+1} + (k-1)V_n \\ &= V_n[-1+k-1] \\ &= V_n(k-2) \end{aligned}$$

$$\forall n \in N : V_n = \frac{U_n - W_n}{k-2}$$

ومنه

6/ حساب V_n بدلالة n,a,k

$$V_n = \frac{a(k-1)^n - a}{k-2} = \frac{a[(k-1)^n - 1]}{(k-2)}$$

ت04: (U_n) متتالية عددية حيث:

$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \end{cases}$$

و (V_n) متتالية عددية معرفة بـ :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = U_{n+1} - U_n$$

1/ اثبت أن (V_n) متتالية هندسية واحسب حدها الأول V₀

2/ اكتب عبارة U_n بدلالة n

3/ استنتج الحد العام V_n بدلالة n

4/ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

$$n \rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty$$

5/ احسب S_n = V₀ + V₁ + + V_n

الحل:

1/ إثبات أن (V_n) متتالية هندسية وحساب حدها الأول V₀

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1}$$

$$= \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n - U_{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$$

$$= \frac{1}{2}(U_{n+1} - U_n)$$

$$= \frac{1}{2}V_n$$

ومنه: (V_n) متتالية هندسية أساسها q = 1/2 وحدها الأول :

$$V_0 = U_1 - U_0 = 2 - 1 = 1$$

2/ كتابة عبارة V_n بدلالة n :

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = V_0 \cdot q^n$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3/ كتابة عبارة الحد العام U_n بدلالة n

$$V_n = U_{n+1} - U_n$$

$$V_0 = U_1 - U_0$$

$$V_1 = U_2 - U_1$$

$$V_2 = U_3 - U_2$$

.

.

.

.

$$V_n = U_{n+1} - U_n$$

بالجمع نجد:

$$V_0 + V_1 + + V_n = U_{n+1} - U_0$$

$$\begin{aligned}
S_n &= V_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \\
&= 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \\
&= (1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1)(-2) \\
S_n &= \frac{-1}{2^n} + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= U_{n+1} - U_n \Leftrightarrow U_{n+1} = S_n + U_n \\
U_{n+1} &= -1/2^n + 3 \\
&\text{4/ حساب النهاية:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -1/2^n + 3 = 3 \quad \text{مقاربة} \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = +\infty \quad \text{متباعدة}
\end{aligned}$$

تمارين مقترحة:

ت01 / (U_n) و (V_n) متتاليتان عدديتان معرفتان كمايلي:

$$\begin{cases}
U_0 = 5, U_1 = 31 \\
\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = 12U_{n+1} - 35U_n \\
V_0 = -1, V_1 = -11 \\
\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+2} = 12V_{n+1} - 35V_n
\end{cases}$$

لتكن المتتاليتان العدديتان (W_n) و (Y_n) المعرفتان كمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : W_n = U_n + V_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : Y_n = U_n - V_n$$

1/ احسب W_1, W_0

2/ باستعمال البرهان بالتراجع اثبت أن المتتالية (W_n) متتالية هندسية أساسها 5 ؟

3/ احسب Y_1, Y_0

4/ باستعمال البرهان بالتراجع اثبت أن المتتالية (Y_n) متتالية هندسية أساسها 7 ؟

5/ احسب W_n و Y_n بدلالة n واستنتج عبارة U_n و V_n بدلالة n ؟

6/ من السؤال 3 - إذا علمت أن:

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = 2 \times 5^n + 3 \times 7^n$$

ونفرض أن:

$$\alpha_n = \text{PGCD} (U_{n+1}, U_n)$$

احسب $7U_n - U_{n+1}$ ، $U_{n+1} - 5U_n$

7/ باستعمال هذه النتائج اثبت أن PGCD هو 1 و 3

8/ هل U_{n+1} و U_n أوليان فيما بينهما ؟

ت02 : لتكن (U_n) متتالية عددية معرفة بـ :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \frac{U_n - 2}{4} \end{cases}$$

نعرف متتالية أخرى (V_n) كمايلي:

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = 3U_n + 2$$

1/ بين ان (V_n) متتالية هندسية يطلب حساب حدها الاول واساسها

2/ استنتج عبارة V_n ثم U_n بدلالة n

3/ بين ان (U_n) متتالية متناقصة وهل هي متقاربة ؟

4/ احسب: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

$S_n' = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ بدلالة n

ت03 : (U_n) متتالية حسابية متناقصة تماما حيث :

$$\begin{cases} U_0 + U_1 + U_2 = 15 \\ \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_3} = \frac{33}{40} \end{cases}$$

- احسب كل من : U_0, U_1, U_2 و الأساس r

$$S_n = \sum_{i=0}^n ui \quad \text{احسب المجموع :}$$

ت04 : (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان كمايلي :

$$n > 1, V_n = \frac{1}{\ln n}, U_n = \frac{-2}{n}$$

1/ ادرس اتجاه تغير كل من : (U_n) و (V_n)

2/ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n)$

$n \rightarrow +\infty$

3/ هل المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ؟

ت05 : ليكن θ عدد حقيقي حيث : $0 \leq \theta \leq \pi/2$

نعرف المتتالية (U_n) كمايلي :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \cos \theta, n \geq 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n} \end{cases}$$

1/ احسب كل من : U_0, U_1, U_2, U_3 بدلالة θ ($\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$)

2/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $U_n = 2 \cos(\frac{\theta}{2^n})$

3/ لتكن (V_n) متتالية معرفة R بالعلاقة : $V_n = \frac{\theta}{2^n}$

- احسب نهاية المتتالية (V_n) .

4/ استنتج أن (U_n) متقاربة .

ت06 : (U_n) متتالية معرفة كمايلي : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ \forall n \in N : U_{n+1} = \frac{3 + 2U_n}{2 + U_n} \end{cases}$

1/ احسب U_1, U_2, U_3, U_4 .

2/ برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان $U_n > 0$ ثم استنتج أن (U_n) معرفة من R نحو R

3/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $U_n \leq \sqrt{3}$

4/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

5/ لتكن (V_n) متتالية معرفة على R بالعلاقة : $V_n = \frac{U_n - \sqrt{3}}{U_n + \sqrt{3}}$

ا - برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول.

ب - احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ت07 : (U_n) متتالية معرفة كمايلي : $\begin{cases} U_0 = -2 \\ \forall n \in N : U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}, n \geq 0 \end{cases}$

1/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $2 - U_n \geq 0$

2/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $U_n \geq 0$

3/ برهن أن (U_n) متزايدة ؟

4/ استنتج أن (U_n) متقاربة ؟

ت08 : λ عدد حقيقي غير معدوم ، نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كمايلي :

$\begin{cases} U_0 = 1, U_1 = 2 \\ \forall n \in N, n \geq 0 : U_{n+2} = (\lambda + 1)U_{n+1} - \lambda U_n \end{cases}$

ونعرف المتتالية (V_n) كمايلي : $\forall n \in N : V_{n+1} = U_{n+1} - U_n, n \geq 0$

1/ بين أن (V_n) متتالية هندسية ثم احسب V_n بدلالة n و λ .

2/ احسب المجموع S_n بدلالة n و λ حيث : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$

ثم بين أن $S_n = U_n - 1$ واستنتج U_n بدلالة n و λ .

3/ نضع $\lambda = 3$ ، احسب بدلالة n المجموع :

$S'_n = \frac{1}{4}n + 225$: $S_n^2 = U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_{n-1}^2$ واستنتج قيمة n من اجل :

ت09 : لتكن $(U_n)_{n \in N}$ متتالية تراجعية معرفة كمايلي :

$$\begin{cases} U_0 = 1, U_1 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : U_{n+1} = 2U_n - U_n - 1 \end{cases}$$

- 1/ اثبت أن (U_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.
 2/ احسب U_n بدلالة n ثم $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ بدلالة n
 3/ لتكن المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة كمايلي :

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : V_{n+1} - U_n \times V_n + V_n \times U_n - 1 = 0 \end{cases}$$

- 1/ اثبت ان (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .
 ب/ احسب V_n بدلالة n
 ج/ احسب : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n+3}$ بدلالة n .

ت10 : لتكن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حقيقية هندسية .

- 1/ عين V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 بحيث :

$$\begin{cases} V_1 \times V_5 = 4 \\ V_2 + V_3 + V_4 = 7 \end{cases}$$

- 2/ احسب S_n بدلالة n حيث :

$$S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

- 3/ احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

ت11 : لتكن المعادلة التالية مجموعة الأعداد المركبة :

$$z^2 + (-2i)n z + n^2 - 1 = 0 \quad n \in \mathbb{N} \dots (1)$$

- 1/ حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة رقم (1)

- 2/ نضع : $U_n = z_1$ و $V_n = z_2$ حيث : z_1, z_2 حلا المعادلة (1)

أ- برهن أن : $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتاليتان حسابيتان.

ب- نضع : $W_n = U_n + V_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- اثبت أن $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية.

- احسب S_n بدلالة n حيث :

$$S_n = |W_0| + |W_1| + \dots + |W_n| \text{ يشير الى طويلة عدد مركب .}$$

ت12 : عين ثلاث أعداد حقيقية غير معدومة a, b, c بحيث a, b, c بهذا الترتيب تشكل متتالية حسابية و a, b, c بهذا الترتيب تشكل متتالية هندسية والعدد $(a+b+c)$ قاسم أولي للعدد 1998 .

ت13 : لتكن (U_n) متتالية حقيقية معرفة كمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_n = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx$$

- 1/ احسب U_0

- 2/ احسب $U_1 + U_1$ ثم استنتج قيمة U_1

3/ لتكن (V_n) متتالية حقيقية معرفة كمايلي:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n = U_n + U_{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$$

ب/ احسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

ت14: لتكن المتتالية الحقيقية (U_n) المعرفة كمايلي:

$$\begin{cases} U_0 = 0, U_1 = a (a \in \mathbb{R}^*) \\ \alpha \in \mathbb{R}_+ - \{0, 1, 2\}, \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = \alpha U_{n+1} - (\alpha - 1)U_n \end{cases}$$

1/ نضع من اجل: $V_n = U_{n+1} - U_n$ $n \in \mathbb{N}$

بين ان المتتالية (V_n) هندسية واحسب V_n بدلالة a, n, α .

2/ نضع من اجل: $K_n = U_{n+1} - (\alpha - 1)U_n$ $n \in \mathbb{N}$

- بين ان (K_n) متتالية ثابتة واحسب K_n بدلالة a

3/ احسب U_n بدلالة V_n و K_n ثم احسب U_n بدلالة a, n, α .
نعرف المتتالية (W_n) كمايلي:

$$\begin{cases} W_0 = 1, W_1 = e^1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : W_{n+2} = \frac{(W_{n+1})^\alpha}{(W_n)^{\alpha-1}} \end{cases}$$

تحقق من أن: $\forall n \in \mathbb{N} : W_n > 0$

- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} : \lim W_n = U_n$ ثم استنتج W_n بدلالة a, n, α .

- عين تبعا لقيم α و a نهاية W_n لما $n \rightarrow +\infty$

ت15: لتكن a, b, c ثلاثة أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$ فليكن التطبيق f للمجموعة \mathbb{R} في نفسها كمايلي:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + c$$

1/ برهن بالتراجع أن:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \forall x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left[a \cos\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

حيث $f^{(n)}$ يرمز إلى الدالة المشتقة النونية للدالة f

$$2/ \text{ نضع من اجل كل من : } U_n = \frac{1}{4^n} f^{(2n)}(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

- احسب U_1 .

3/ برهن ان المتتالية (U_n) هندسية عين أساسها q .

4/ احسب $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$ بدلالة a, n .

5/ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$