

Teoría de ecuaciones

CARDANO, GEROLAMO (1501-1576)

Médico, matemático y astrólogo italiano cuya obra *Ars Magna* (1545) marcó el inicio del periodo moderno del Álgebra. Nació en Pavía. Fue nombrado catedrático de Medicina en Pavía en 1543 y en Bolonia en 1562. Sus actividades astrológicas incluyeron un horóscopo de Cristo. En 1570 fue detenido por la Inquisición acusado de herejía, aunque pronto se retractó y recibió una pensión del papa Pío V. Cardano escribió más de 200 tratados, pero los más famosos fueron su *Ars Magna*, que contiene las primeras soluciones publicadas de ecuaciones de tercer y cuarto grado, y el *Liber de ludo aleae*, que contiene algunos de los primeros trabajos sobre probabilidad, en los que aplicó su experiencia como jugador.

Unas semanas antes de su muerte finalizó una autobiografía, *De propria vita*, que adquirió cierta fama. Su vida personal fue trágica: uno de sus hijos fue ejecutado en 1560 por sospecha de asesinato de su propia esposa; y otro de sus hijos pasó por la cárcel en numerosas ocasiones por diferentes delitos. Una historia afirma que Cardano se suicidó al no cumplirse su predicción astrológica de su propia muerte, aunque esto último lo más probable es que se trate de una mera invención.



$$\text{Si } ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las ecuaciones y los adivinadores del pensamiento

Cierto día un niño le pide propina a su padre y éste contesta que no tiene dinero. Ante esto, el hijo propone adivinar la cantidad de dinero que lleva su padre en el bolsillo, con la condición de que si adivina, el padre se compromete a darle la cuarta parte. Como el padre acepta, el hijo indica que realice las siguientes operaciones:

Multiplique la cantidad de dinero por 4, sume 20, multiplique por 3, reste el doble de la cantidad inicial de dinero, reste 40, multiplique por 10, sume 100 y que diga el resultado.

A este resultado resta 300 y divide 100 y ya está adivinado.

Explicación:

<i>Cantidad de dinero que tiene el padre</i>	$= x$
<i>Multiplique por 4</i>	$= 4x$
<i>Sume 20</i>	$= 4x + 20$
<i>Multiplique por 3</i>	$= 12x + 60$
<i>Reste el doble de la cantidad inicial (2x)</i>	$= 10x + 60$
<i>Reste 40</i>	$= 10x + 20$
<i>Multiplique por 10</i>	$= 100x + 200$
<i>Sume 100</i>	$= 100x + 300$

Finalmente al quitarle a este resultado 300 y luego dividirlo entre 100; se obtendrá x que es la cantidad de dinero que tenía el padre.

Teoría de ecuaciones

OBJETIVOS

- Examinar los conocimientos, la rapidez, el criterio y la madurez en el manejo de las expresiones matemáticas.
- Desarrollar la habilidad para despejar incógnitas.
- Optimizar la aplicación de la teoría en la resolución de cualquier tipo de ecuación.

INTRODUCCIÓN

Hace cinco mil años, en el país de los sumerios, cerca del Golfo Pérsico, se dieron las primeras dificultades matemáticas que necesitaban ser interpretadas bajo ciertas igualdades. Esto dio inicio a las primeras relaciones que, posteriormente, los matemáticos dieron el nombre de **Teoría de Ecuaciones**.

Con el afán de resolver las ecuaciones se han creado nuevas teorías, nuevos conceptos, nuevos conjuntos numéricos. El método de resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado fueron descubiertos por los matemáticos sumerios y babilonios (tres mil años a.C.) y por Diofante (329 – 410 d.C) fundador del Álgebra, por los hindúes y, finalmente, por los árabes (siglo IX). Este método forma parte del más antiguo patrimonio matemático de la humanidad. La ecuación de tercer grado dio ocasión a Cardano (1501 – 1576) y a Tartaglia (1499 – 1557) para inventar los números complejos en el siglo XVI. Ludovico Ferrari (1522 – 1565), discípulo de Cardano, encontró el método general de la resolución de la ecuación de cuarto grado. Posteriormente, René Descartes (1596–1650), sabio y filósofo francés, inventor de la Geometría Analítica descubre otra forma de resolver la ecuación cuártica.

Como es lógico, los matemáticos trataron de resolver las ecuaciones de grado superior a cuatro (quinto grado, sexto grado, ... de grado n). Este estudio tenía un interés doble, ya que hubiera constituido un gran logro encontrar un método general de resolución para todas las ecuaciones de una incógnita, cualquiera sea su grado.

Tras muchos intentos se llegó a la conclusión de que las ecuaciones de quinto grado o superior eran imposibles de resolver sólo usando cálculos algebraicos. Un médico italiano de Bolonia, Paolo Ruffini (1765 – 1822), había tratado de demostrarlo en 1798, en su *Teoría general de las ecuaciones*; pero la demostración resultó incompleta. Al cabo de unos años, el joven matemático noruego Abel (1802 – 1829) descubrió el teorema que lleva su nombre en 1824 y dice: “Es imposible resolver algebraicamente las ecuaciones generales de grado superior a cuatro”.

Este teorema fue reforzado por Evariste Galois (1811–1832), matemático francés, fundador de la teoría de los grupos.

Dado que los matemáticos no lograron encontrar métodos generales de resolución para ecuaciones de grado superior a 4; trataron de responder ciertas cuestiones como:

- ¿Cuántas raíces positivas posee una ecuación?

- ¿Cuántas raíces reales o complejas posee una ecuación?
- Dados dos números a y b , ¿cuántas raíces de una ecuación dada están comprendidas entre a y b (problema de la separación de las raíces de una ecuación)?

Desde este punto de vista los dos teoremas fundamentales son el de René Descartes y el teorema fundamental del Álgebra (K. Gauss–D’Alambert). Este teorema fue enunciado por Girard en 1625, sólo realizó una demostración incompleta por parte de D’Alambert (1746). La primera demostración completa fue establecida por K. Gauss (1799). Después Cauchy, Weierstrass y Kronecker dieron otras demostraciones. El teorema de Gauss–D’Alambert se enuncia: “Toda ecuación polinomial de grado n posee por lo menos una raíz (compleja o real)”. El francés Michel Rolle (1625–1749) trató de resolver las ecuaciones mediante un procedimiento denominado “Método en cascada”, que, posteriormente, se llamaría “Cálculo por métodos numéricos”, utilizando el cálculo diferencial.

ENUNCIADO Y PROPOSICIÓN

Un enunciado es una proposición que puede ser calificada como verdadera o falsa.

Ejemplos:

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 2^5 - 2$
2. $x^2 + \sqrt{2} = 5x$

Una proposición es toda una combinación de enunciados conectados con ciertos símbolos matemáticos.

Ejemplos:

1. $x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$
2. $2 + 4 + 6 = 12 \wedge 12 \in \mathbb{Z}$

ENUNCIADOS ABIERTOS

Son enunciados formados por variables y constantes que pueden ser verdaderos o falsos, según la asignación de valores a las variables.

Ejemplos:

1. Si $2x - 1 = 7 \Rightarrow x = 4$
Enunciado verdadero
2. $\sqrt{2}$ es un número racional
Enunciado falso

Estos enunciados son traducidos a la forma simbólica, así:

- I. La diferencia de dos números $x - y$.
- II. El triple de un número aumentado en 5
 $3x + 5$.
- III. La raíz cuadrada del doble de un número aumentado en 1.
 $\sqrt{2x + 1}$
- IV. Los cuadrados de tres números consecutivos.
 $x^2; (x + 1)^2; (x + 2)^2$

ECUACIÓN

¿Qué es una ecuación?

Es un enunciado abierto, por ejemplo:

$$4x + 16 = 5 - x$$

La cual será verdadera o será falsa dependiendo de los valores que se atribuya a x .

En otras palabras una ecuación es la igualdad de dos expresiones matemáticas, donde existe por lo menos una variable.

Ejemplos:

1. $6x + 3^x = 4^{\log x}$
2. $\tan x - \frac{4}{3} = \cos x$
3. $\frac{x}{\sqrt{2} + \frac{x}{\sqrt{2} + x}} = \sqrt{x} + 1$
4. $x^5 + 49x - 1 = 0$

1. SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Es aquel valor que toma la incógnita y convierte la ecuación en una identidad, es decir, hace verificar la igualdad.

Ejemplos:

1. Sea la ecuación $3^{\sqrt{x}-1} = \frac{x}{3} + 6$

$$x = 4 \Rightarrow 3^{\sqrt{4}-1} = \frac{4}{3} + 6 \quad \dots\dots\dots (F)$$

$$x = 9 \Rightarrow 3^{\sqrt{9}-1} = \frac{9}{3} + 6 \quad \dots\dots\dots (V)$$

Entonces $x = 9$ es una solución.

2. Sea la ecuación $x^3 + 3x + 4 = 0$

$$x = 0 \Rightarrow 0^3 + 3(0) + 4 = 0 \quad \dots\dots\dots (F)$$

$$x = 1 \Rightarrow 1^3 + 3 \cdot 1 + 4 = 0 \quad \dots\dots\dots (F)$$

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^3 + 3(-1) + 4 = 0 \quad \dots\dots\dots (V)$$

Entonces, $x = -1$ es una solución.

2. CONJUNTO SOLUCIÓN (C.S.)

Es el conjunto donde todos los elementos son una solución de la ecuación en discusión.

Ejemplos:

1. $(3x-1)(x+1)(6x+5) = 0$

Esta ecuación se verificará sólo si:

$$x = \frac{1}{3} \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}$$

$$\text{Entonces, C.S.} = \left\{ \frac{1}{3}; -1; -\frac{5}{6} \right\}$$

2. $\frac{6}{x-2} = 0$, esta ecuación no admite algún valor para x .

$$\text{Entonces, C.S.} = \phi \text{ (conjunto vacío)}$$

CLASES DE ECUACIONES**1. POR SU ESTRUCTURA**

Depende del tipo de expresión o expresiones matemáticas que definen a las ecuaciones. Pueden ser algebraicas o trascendentes.

a) Ecuaciones algebraicas

Si las expresiones que definen a la ecuación son algebraicas, pueden ser:

Polinomiales: $3x^5 - 5x + 7 = 0$

Fraccionarias: $\frac{2x-1}{5-3x} + x = x^2 + 1$

Irracionales: $\sqrt[3]{3-x} + x^2 + 1 = \sqrt{2x-1}$

b) Ecuaciones no algebraicas o trascendentes

Si al menos una expresión es no algebraica o trascendente, pueden ser:

Exponenciales: $3^{x-1} = 3x+2$

Trigonómicas: $5\sin\left(\frac{3x}{\pi}\right) = \cos x$

Logarítmicas: $3x \log_{\pi}(x/5) = \frac{1}{\sqrt{7}}$

2. POR SU CONJUNTO SOLUCIÓN**a) Ecuación compatible**

Es toda ecuación que al menos tiene una solución.

- Si el número de soluciones es finito se llama compatible determinada.

$$(5x-1)(2x+3)=0 \Rightarrow \text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{5}; -\frac{3}{2} \right\}$$

- Si el número de soluciones es infinito se llama compatible indeterminada.

$$(7x - \sqrt{\pi})^0 = 1 \Rightarrow \{1; 2; 3; \dots\}$$

b) Ecuación incompatible

Es aquella ecuación que no tiene solución, es decir, su conjunto solución no tiene elementos. Se llama también ecuación absurda o inconsistente.

$$\frac{5}{x-2} + 2x = 4 + \frac{5}{x-2}$$

Nunca se verifica, pues no existe algún valor de x que haga cierta la igualdad.



Resolver una ecuación significa hallar el conjunto solución, es decir, hallar todas las soluciones de la ecuación que puede ser algebraica o trascendente.

c) Ecuaciones equivalentes

Dos o más ecuaciones son equivalentes si están en una misma incógnita y tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplos:

$$1. \quad 4^{x^2-x+1} = 8^x \Rightarrow \text{C.S.} = \left\{2; \frac{1}{2}\right\}$$

$$2. \quad (x-1)(x+1) - 5x = -(3+x^2) \Rightarrow \text{C.S.} = \left\{2; \frac{1}{2}\right\}$$

Luego, las ecuaciones anteriores son equivalentes, puesto que tienen el mismo conjunto solución.

ECUACIÓN POLINOMIAL

Es aquella ecuación que presenta la siguiente forma general:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0; a_0 \neq 0$$

Donde:

$a_0; a_1; a_2; \dots; a_n$ son los coeficientes, x es la incógnita.

El grado del polinomio determina el grado de la ecuación, así:

$$\sqrt{2}x + 1 = 0$$

Ecuación lineal o de primer grado

$$5x^2 - 3x + 7 = 0$$

Ecuación cuadrática o de segundo grado

$$16x^3 - 5x + 2 = 0$$

Ecuación cúbica o de tercer grado

Raíz de un polinomio

Sea $P(x)$ un polinomio no constante, diremos que α es una raíz del polinomio $P(x)$ si $P(\alpha) = 0$, es decir, α es una raíz del polinomio $P(x)$ si el valor numérico de $P(x)$ en $x = \alpha$ se hace cero.

Luego, $P(x) = (x - \alpha)q(x)$

Ejemplos:

$$1. \quad \text{Sea } P(x) = x^3 - 5x + 4$$

Vemos que $P(1) = 0 \Rightarrow 1$ es una raíz del polinomio $P(x)$.

$$2. \quad P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6 \text{ para } x = \sqrt{2} \text{ se obtiene } P(\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \sqrt{2} \text{ es una raíz del polinomio.}$$



A las soluciones de una ecuación polinomial, se les llama también raíces del polinomio.

Raíz múltiple de un polinomio

Sea $P(x)$ un polinomio no $\alpha \in \mathbb{C}$ constante, es una raíz de multiplicidad k . Si y sólo si $(x - \alpha)^k$ es un factor de $P(x)$ y $(x - \alpha)^{k+1}$ no es factor de $P(x)$.

Es decir, $P(x) = (x - \alpha)^k q(x)$ con $q(\alpha) \neq 0$

Ejemplo:

Sea $P(x) = (2x-1)^3(5x+3)(x+2)^4$ del cual se dirá:

$\left(\frac{1}{2}\right)$ es una raíz de multiplicidad 3.

$-\frac{3}{5}$ es una raíz simple.

-2 es una raíz de multiplicidad 4.

Las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$ son las raíces del polinomio $P(x)$, aunque en cantidad difieren.



Si una raíz es de multiplicidad k , significa que la raíz se repite k veces.

Así: $P(x) = (x-2)^3 (3x+1) (x+2)^2$

La raíz $x=2$ se repite 3 veces

La raíz $x = -\frac{1}{3}$ es simple

La raíz $x=-2$ se presenta 2 veces

Pero el C.S. de $P(x)=0$ es $\left\{2; -\frac{1}{3}; -2\right\}$

El número de soluciones de $P(x)=0$ es igual al número de elementos del conjunto solución.

Ejemplo:

Sea $P(x) = (x-\pi)^2 (x+3)^3 (x-4)$

soluciones de $P(x)=0$ y raíces de $P(x)$

$x = \pi$ raíz doble (2 veces)

$x = -3$ raíz triple (3 veces)

$x = 4$ raíz simple (1 vez)

Entonces, existen 3 soluciones pero 6 raíces.

Se concluye:

Número de raíces de $P(x) \geq$ Número de soluciones de $P(x)=0$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio de grado n (cualquier tipo de coeficientes numéricos) tiene al menos una raíz, que generalmente es compleja.

Corolario

Todo polinomio de coeficientes numéricos y grado n tiene exactamente n raíces (contadas con la multiplicidad).

Del teorema y el corolario se concluye que toda ecuación polinomial tiene solución, por lo tanto será compatible.

Así mismo toda ecuación polinomial tiene n raíces contadas con su multiplicidad, es decir, será compatible determinada.

Ejemplo:

$P(x) = 4x^5 - 5x + 1$ tiene 5 raíces

$Q(x) = 2x^7 + 2x^3 + 3$ tiene 7 raíces

Veamos casos particulares, luego se podrá generalizar para ecuaciones polinomiales de grado n .

1. ECUACIONES LINEALES

Llamadas también ecuaciones polinomiales de primer grado, cuya forma general es:

$$Ax + B = 0, A \neq 0$$

Ejemplo 1

Resolver $Ax + B = 0$

Resolución:

Aplicando $(-B)$ miembro a miembro (m.a.m.)

$$Ax + \underbrace{B + (-B)}_0 = 0 + (-B)$$

$$Ax = -B$$

Multiplicando por A^{-1} m.a.m.

$$A^{-1}Ax = A^{-1}(-B) \Rightarrow x = -\frac{B}{A}$$

Ejemplo 2

Resolver $\frac{3x-1}{2} + \frac{x-1}{3} + \frac{x}{5} = 1$

Resolución:

Multiplicando por 30:

$$15(3x-1) + 10(x-1) + 6x = 30$$

$$45x - 15 + 10x - 10 + 6x = 30$$

$$61x - 25 = 30 \Rightarrow 61x = 55$$

$$\therefore x = \frac{55}{61}$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación en x :

$$\frac{x-m}{n+p+q+r} + \frac{x-n-p}{q+r+m} + \frac{x-q-r}{m+n+p} = 3$$

Resolución:

Como $3 = 1 + 1 + 1$ y pasando a restar 1 a cada fracción.

$$\frac{x-m}{n+p+q+r} - 1 + \frac{x-n-p}{q+r+m} - 1 + \frac{x-q-r}{m+n+p} - 1 = 0$$

$$\frac{x-m-n-p-q-r}{n+p+q+r} + \frac{x-n-p-q-r-m}{q+r+m} + \frac{x-q-r-m-n-p}{m+n+p} = 0$$

Factorizando $x - m - n - p - q - r$

$$(x - m - n - p - q - r) \left(\frac{1}{n+p+q+r} + \frac{1}{q+r+m} + \frac{1}{m+n+p} \right) = 0$$

De donde $x - m - n - p - q - r = 0$

$$\therefore x = m + n + p + q + r$$

Ejemplo 4

Resolver $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{20} + \frac{x}{30} + \frac{x}{42} = 2$

Resolución:

Factorizando x :

$$x \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} \right] = 2$$

Nota $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

En el problema:

$$x \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) \right]$$

$$x \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 2 \Rightarrow x \frac{6}{7} = 2 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

Ejemplo 5

Luego de resolver en x ($p \neq \pm q$)

$$\frac{px}{qb} - \frac{qx}{pa} + \frac{q}{p} = \frac{qx}{pb} - \frac{px}{qa} + \frac{p}{q} \cdot \text{Halle } \frac{ab}{x}$$

Resolución:

Transponiendo términos y agrupando:

$$\frac{px}{qb} - \frac{qx}{pa} - \frac{qx}{pb} + \frac{px}{qa} = \frac{p}{q} - \frac{q}{p}$$

$$\frac{x}{b} \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right) + \frac{x}{a} \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right) = \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right)$$

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1 \Rightarrow x \left(\frac{a+b}{ab} \right) = 1$$

$$\therefore \frac{ab}{x} = a + b$$

2. ECUACIONES CUADRÁTICAS

Llamadas también ecuaciones polinomiales de segundo grado, cuya forma general es:

$$Ax^2 + Bx + C = 0, A \neq 0$$

Para resolver una ecuación cuadrática se hace uso de la factorización por el aspa simple. Así:

Resolver $Ax^2 + Bx + C = 0$

Factorizando se obtiene:

$$A(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

De donde $x - x_1 = 0 \vee x - x_2 = 0$

$$\Rightarrow x = x_1 \vee x = x_2$$

\therefore C.S. = $\{x_1; x_2\}$ $x_1; x_2$ se llaman raíces de la ecuación polinomial cuadrática.

Ejemplo 1

Resolver $3x^2 + x - 10 = 0$

Resolución:

Factorizando $3x^2 + x - 10 = 0$

$$\begin{array}{c} 3x \quad -5 \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \quad 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow (3x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \vee x = -2$$

$$\therefore \text{C.S.} = \left\{ \frac{5}{3}; -2 \right\}$$

Ejemplo 2

Resolver: $4x^2 - 28x + 49 = 0$

Resolución:

El trinomio es un cuadrado perfecto

$$(2x - 7)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2} \text{ (solución única o raíz doble)}$$

$$\therefore \text{C.S.} = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$$

Ejemplo 3

Si una raíz de la ecuación $x^2 - (\alpha + 1)x - 5 = 0$ es 2. Halle la otra raíz.

Resolución:

$$\text{Si 2 es una raíz} \Rightarrow 2^2 - (\alpha + 1) \cdot 2 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 2\alpha - 2 - 5 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$$

Luego, la ecuación queda: $x^2 - \left(-\frac{3}{2} + 1\right)x - 5 = 0$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 10 = 0$$

De donde la otra raíz es $-\frac{5}{2}$.

Fórmula general de solución

TEOREMA

El conjunto solución de toda ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, $A \neq 0$ es:

$$\left\{ \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right\}$$

Demostración:

De $Ax^2 + Bx + C = 0$; $A \neq 0$

Multiplicando por $4A$ para completar cuadrados.

$$4A^2x^2 + 4ABx + 4AC = 0$$

$$(2Ax)^2 + 2(2Ax)(B) + B^2 - B^2 + 4AC = 0$$

$$(2Ax + B)^2 = B^2 - 4AC \Rightarrow 2Ax + B = \pm \sqrt{B^2 - 4AC}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\therefore \text{C.S.} = \left\{ \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right\}$$

Ejemplo 1

Resolver $3x^2 - 2x + 1 = 0$

Resolución:

Como no es factorizable en \mathbb{Q} , lo más razonable sería aplicar el teorema anterior (fórmula general).

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{6}$$

$$\therefore \text{C.S.} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{-2}}{3}; \frac{1 - \sqrt{-2}}{3} \right\}$$

Ejemplo 2

Resolver $x^2 - \sqrt{2}x - 5 = 0$

Resolución:

Usando la fórmula general:

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{\sqrt{2}^2 - 4(-5)}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{22}}{2}$$

$$\therefore \text{C.S.} = \left\{ \frac{\sqrt{2} + \sqrt{22}}{2}; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{22}}{2} \right\}$$

Discriminante (Δ)

En la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, $A \neq 0$.

Se llama discriminante a la expresión

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Ejemplo 1

Halle el discriminante de: $3x^2 - 5x + 7 = 0$

Resolución:

Por definición:

$$\Delta = (-5)^2 - 4(3)(7) = 25 - 84 = -59$$

$$\therefore \Delta = -59$$

Ejemplo 2

Halle el discriminante en: $2ix^2 + 3x - i = 0$ / $i = \sqrt{-1}$

Resolución:

$$\Delta = 3^2 - 4(2i)(-i) = 9 + (8i^2) = 9 - 8$$

$$\therefore \Delta = 1$$

TEOREMA (de Cardano-Viete)

En la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, $A \neq 0$ de raíces x_1, x_2 se cumple:

I. Suma de raíces: $x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$

II. Producto de raíces: $x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}$

III. De la identidad de Legendre:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$$

Demostración

De la fórmula general, sabemos que:

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} + \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\text{I. } x_1 + x_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} + \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = -\frac{2B}{2A}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$$

$$\text{II. } x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right) \left(\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right)$$

$$= \frac{(-B)^2 - (B^2 - 4AC)}{4A^2} = \frac{4AC}{4A^2} = \frac{C}{A}$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}$$

Ejemplo 1

En $3x^2 - 5x + 7 = 0$ de raíces x_1, x_2 se tiene:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{3}$$

Ejemplo 2

Si x_1, x_2 son las raíces de la ecuación $3x^2 + 2x - 4 = 0$. Halle $(x_1 + 5)(x_2 + 5)$

Resolución:

$$\text{Se pide } (x_1 + 5)(x_2 + 5)$$

$$= x_1 x_2 + 5(x_1 + x_2) + 25$$

Usando el teorema se tiene:

$$= \frac{-4}{3} + 5\left(-\frac{2}{3}\right) + 25$$

$$= -\frac{14}{3} + 25 = \frac{61}{3}$$

Ejemplo 3

Si r y s son las raíces de $x^2 + px + 36 = 0$ tal que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{5}{12}, \text{ halle el valor de } p.$$

Resolución:

De la ecuación $r + s = -p$, $r \cdot s = 36$

$$\text{De la condición: } \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{r+s}{r \cdot s} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{-p}{36} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore p = -15$$

Ejemplo 4

Halle el valor de p si el C.S. de la ecuación:

$$x^2 - (p+3)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1 = 0 \text{ es } \{\alpha; \alpha+1\}.$$

Resolución:

$$\text{De la ecuación } x_1 + x_2 = p+3; x_1 x_2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1$$

Del C.S. se tiene $x_2 - x_1 = 1$

En la identidad de Legendre:

$$(x_2 + x_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = 4x_1 x_2$$

$$(p+3)^2 - 1 = 4\left(\frac{p^2}{4} + 1\right)$$

$$\Rightarrow p^2 + 6p + 9 - 1 = p^2 + 4 \Rightarrow 6p = -4$$

$$\therefore p = -\frac{2}{3}$$

Ejemplo 5

Halle el mayor valor de a en la ecuación:

$$x^2 - (2a+4)x + a^2 + 8 = 0$$

si una raíz es el triple de la otra.

Resolución:

Sean las raíces: $k, 3k$

Por el teorema:

$$k + 3k = 2a + 4 \Rightarrow k = \frac{a}{2} + 1$$

$$k \cdot 3k = a^2 + 8 \Rightarrow 3\left(\frac{a}{2} + 1\right)^2 = a^2 + 8$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{a^2}{4} + a + 1\right) = a^2 + 8$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2}{4} + 3a + 3 = a^2 + 8$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} - 3a + 5 = 0$$

$$a^2 - 12a + 20 = 0$$

$$(a - 10)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a_{\text{mayor}} = 10$$

TEOREMA (Análisis de las raíces)

En la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, $A \neq 0$ de coeficientes reales, raíces x_1, x_2 y discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$ se cumple:

- I. Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \neq x_2$
- II. Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 = x_2$
- III. Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R} \wedge x_1 = \bar{x}_2$

Ejemplo 1

En $2x^2 - 5x - 1 = 0$

Su discriminante $\Delta = (-5)^2 - 4(-2) = 33 > 0$
 \Rightarrow Las raíces x_1, x_2 son reales y diferentes.

Ejemplo 2

$5x^2 - 2x + 7 = 0$

La discriminante $\Delta = (-2)^2 - 4(5)(7) < 0$
 \Rightarrow Las raíces no son reales y conjugadas.

Ejemplo 3

Si α, β son la raíces de: $x^2 - (\sqrt{7} - 1)x + 5 = 0$

Halle $|\alpha| + |\beta|$

Resolución:

Analizando su discriminante

$$\Delta = (\sqrt{7} - 1)^2 - 4(5) < 0 \Rightarrow \alpha, \beta \text{ son no reales y}$$

conjugadas, es decir $\alpha = \bar{\beta}$.

Del teorema: $\alpha \cdot \beta = 5 \Rightarrow \alpha \cdot \bar{\alpha} = 5 \Rightarrow |\alpha|^2 = 5$

$$\Rightarrow |\alpha| = \sqrt{5}$$

Además, como $\alpha = \bar{\beta} \Rightarrow |\alpha| = |\bar{\beta}| = |\beta|$

$$\therefore |\alpha| + |\beta| = \sqrt{5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Formar la ecuación cuadrática a partir de las raíces x_1, x_2

Sean las raíces $x = x_1$ y $x = x_2$

$$\Rightarrow x - x_1 = 0 ; x - x_2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

De donde la ecuación es:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

Ejemplo 1

Formar la ecuación cuadrática de raíces:

a) 5; -3

b) $6; \frac{7}{2}$

c) $3 + \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}$

d) $4 + i, 4 - i$

Resolución:

a) La ecuación es $(x - 5)(x - (-3)) = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

b) $x^2 - \left(6 + \frac{7}{2}\right)x + 6\left(\frac{7}{2}\right) = 0$

$$x^2 - \frac{19}{2}x + 21 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 19x + 42 = 0$$

c) $x^2 - (3 + \sqrt{3} + 3 - \sqrt{3})x + (3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) = 0$

$$x^2 - 6x + 3^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 6 = 0$$

d) $x^2 - (4 + i + 4 - i)x + (4 + i)(4 - i) = 0$

$$x^2 - 8x + 4^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 17 = 0$$

Ejemplo 2

Si a, b son las raíces de la ecuación $4x^2 - 2x + 3 = 0$

Halle otra ecuación cuadrática en y cuyas raíces sean $2a - 1$ y $2b - 1$.

Resolución:

$$\text{De la ecuación } 4x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{2}{4} \\ ab = \frac{3}{4} \end{cases}$$

La ecuación buscada es:

$$y^2 - (2a - 1 + 2b - 1)y + (2a - 1)(2b - 1) = 0$$

$$y^2 - [2(a + b) - 2]y + 4ab - 2(a + b) + 1 = 0$$

De la ecuación anterior

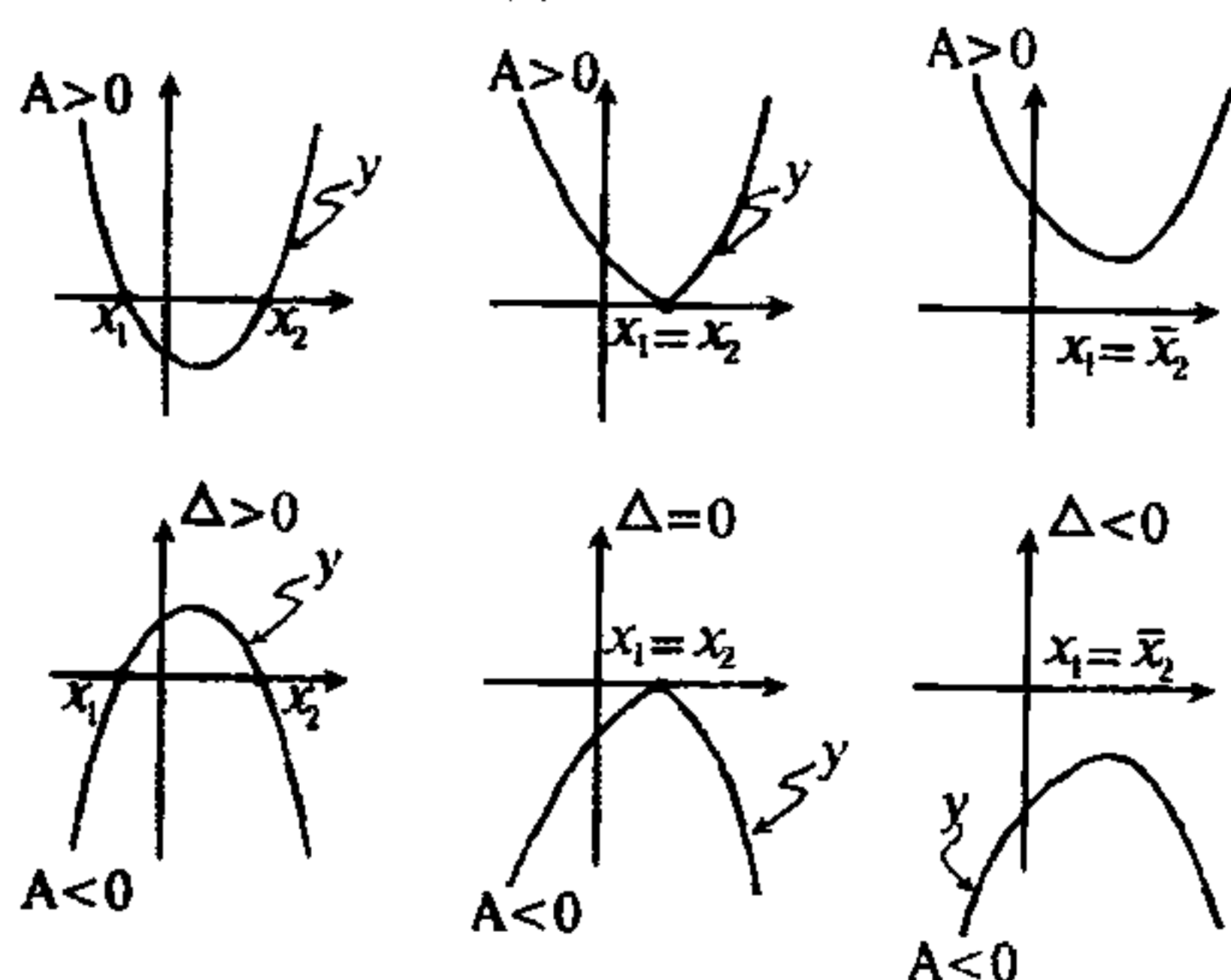
$$y^2 - \left[2\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \right]y + 4\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

∴ La ecuación buscada es: $y^2 + y + 3 = 0$

Interpretación geométrica de

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Sea $y = Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$ y coeficientes reales. El comportamiento geométrico de y depende de su discriminante (Δ), así:



Todo polinomio cuadrático $y = Ax^2 + Bx + C$, de coeficientes reales, geométricamente tiene un comportamiento parabólico, es decir, su gráfica es una parábola como se indica en el gráfico.

TEOREMA (ecuaciones equivalentes)

Dos ecuaciones cuadráticas $Ax^2 + Bx + C = 0$, y $Mx^2 + Nx + P = 0$ son equivalentes, es decir, tienen el mismo conjunto solución si:

$$\frac{A}{M} = \frac{B}{N} = \frac{C}{P}, \quad MNP \neq 0$$

Demostración:

$Mx^2 + Nx + P = 0$ y $Ax^2 + Bx + C = 0$ son equivalentes, si: $Ax^2 + Bx + C = k(Mx^2 + Nx + P)$, $k = \text{cte.}$

$$\Rightarrow A = kM \Rightarrow \frac{B}{N} = k$$

$$B = kN \Rightarrow \frac{B}{N} = k$$

$$C = kP \Rightarrow \frac{C}{P} = k$$

$$\text{De donde: } \frac{A}{M} = \frac{B}{N} = \frac{C}{P} = k \text{ cte.}$$

TEOREMA (ecuaciones parcialmente equivalentes)

Dos ecuaciones cuadráticas $Ax^2 + Bx + C = 0$, y $Mx^2 + Nx + P = 0$ tienen una solución común si:

$$(CM - PA)^2 = (BP - NC)(AN - BM)$$

Ejemplo 1

Las ecuaciones $3x^2 - 5x + 2 = 0$ y $9x^2 - 15x + 6 = 0$ son equivalentes ya que $\frac{3}{9} = \frac{-5}{-15} = \frac{2}{6}$

Ejemplo 2

Calcular $(n - m)$ si las ecuaciones:

$$(2m + 1)x^2 - (3m - 1)x + 2 = 0$$

$$(n + 2)x^2 - (2n + 1)x - 1 = 0$$

son equivalentes.

Resolución:

Si son equivalentes:

$$\frac{2m + 1}{n + 2} = \frac{-(3m - 1)}{-(2n + 1)} = \frac{2}{-1}$$

De donde se tiene:

$$\frac{2m + 1}{n + 2} = -2 \Rightarrow 2m + 2n = -5 \quad \dots\dots (\alpha)$$

$$\frac{3m - 1}{2n + 1} = -2 \Rightarrow 3m + 4n = -1 \quad \dots\dots\dots (\beta)$$

$$2(\alpha) - (\beta): \quad 4m + 4n - 3m - 4n = -10 + 1 \\ \Rightarrow m = -9$$

$$\text{En } (\alpha): 2(-9) + 2n = -5 \Rightarrow n = \frac{13}{2}$$

$$\therefore n - m = \frac{13}{2} + 9 = \frac{31}{2}$$

3. ECUACIÓN CÚBICA

Llamada también ecuación polinomial de grado 3 cuya forma general es:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, A \neq 0$$

Mediante el teorema fundamental del Álgebra y su colorario, la ecuación tiene 3 raíces, denotaremos por x_1, x_2, x_3 . En tal caso, la ecuación factorizada será:

$$A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0, A \neq 0$$

Equivalente a:

$$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3 = 0$$

de donde se observa:

TEOREMA DE CARDANO-VIETE

En toda ecuación $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, de raíces x_1, x_2, x_3 se cumple:

I. Suma de raíces: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{B}{A}$

II. Suma de productos binarios de las raíces:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{C}{A}$$

III. Producto de las raíces:

$$x_1x_2x_3 = -\frac{D}{A}$$

Ejemplo 1

En $x^3 - 5x - 4 = 0$

Factorizando por divisores binómicos el polinomio se anula para (-1) .

Luego, por la regla de Ruffini: (ver tomo I).

	1	0	-5	-4
-1	↓	-1	1	4
	1	-1	-4	0

Se tiene $[x - (-1)][x^2 - x - 4] = 0$

$$(x+1)(x^2 - x - 4) = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

De donde C.S. = $\left\{-1; \frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right\}$

Donde, efectivamente, se verifica el teorema de Cardano-Viete.

Ejemplo 2

Si a, b, c son raíces de $x^3 - 2x + 5 = 0$

Halle el valor de:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^3 + b^3 + c^3}$$

Resolución:

Del teorema de Cardano-Viete se tiene:

I. $a+b+c = 0$

II. $ab+ac+bc = -2$

III. $abc = -5$

Usando las identidades condicionales con $a+b+c=0$ tenemos:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab+ac+bc) = -2(-2) = 4$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3(-5) = -15$$

$$\therefore \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^3 + b^3 + c^3} = \frac{4}{-15} = -\frac{4}{15}$$

Ejemplo 3

Si una de las raíces de: $x^3 - (2k-1)x + 3k = 0$ es 2.

Halle el producto de las otras dos.

Resolución:

Como una de las raíces es 2, se tiene:

$$2^3 - (2k-1)2 + 3k = 0 \Rightarrow 8 - 4k + 2 + 3k = 0$$

De donde $k=10$

Por el teorema de Cardano-Viete

$$x_1x_2x_3 = -3k \Rightarrow 2x_2x_3 = -30$$

$$\therefore x_2x_3 = -15$$

Solución general de la ecuación cúbica

Sea la ecuación: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

- I. Buscaremos eliminar el término cuadrático haciendo el siguiente cambio de variable:

$$x = t - \frac{a}{3}$$

con lo cual se obtiene la ecuación:

$$t^3 + pt + q = 0, \text{ llamada cúbica incompleta.}$$

- II. Supongamos que la ecuación cúbica incompleta tiene una solución de la forma $y+z$. Luego por definición de solución:

$$(y+z)^3 + pt + q = 0 \Rightarrow y^3 + z^3 + 3yz \underbrace{(y+z)}_t + pt + q = 0$$

$$\Rightarrow (y^3 + z^3 + q) + (3yz + p)t = 0$$

$$\begin{aligned} \text{El cual verifica si } y^3 + z^3 + q &= 0 \\ 3yz + p &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Con lo que } y^3 + z^3 = -q \wedge y^3 z^3 = -\frac{p^3}{27}$$

- III. Conociendo la suma y la multiplicación de y^3, z^3 se puede formar una ecuación cuadrática de raíces y^3, z^3 .

$$r^2 - (y^3 + z^3)r + y^3 z^3 = 0, \text{ es decir:}$$

$$r^2 + qr - \frac{p^3}{27} = 0 \text{ llamada ecuación resolvente}$$

De donde:

$$r_1 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right)}}{2}$$

como y^3, z^3 son las raíces de esta ecuación:

$$y^3 = -\left(\frac{q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$z^3 = -\left(\frac{q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Definición (Discriminante)

A la expresión $-108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right)$ se llama discriminante de la ecuación cúbica incompleta $t^3 + pt + q = 0$.

- IV. Como $t = y+z$, se tiene:

$$t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad \text{Con } \Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Esta solución se conoce generalmente como la fórmula de Cardano, ya que fue publicada por primera vez por él en la obra *Ars Magna*, en 1545. Cardano obtuvo la solución de Tartaglia, pero la solución original de la cúbica parece deberse originalmente a Scipio Ferreo, alrededor del año 1505.

- V. En (I) la solución general de la cúbica es:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{a}{3}$$

- VI. De la teoría de números complejos, se tiene:

$$\text{Si: } m = \sqrt[3]{n} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = k \\ m_2 = kw \\ m_3 = kw^2 \end{cases}$$

$$\text{donde: } k^3 = n, w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- VII. Usando (VI) la solución de $t^3 + pt + q = 0$ con

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \text{ es:}$$

$$\begin{aligned} t_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \\ t_2 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}w} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}w^2} \\ t_3 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}w^2} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}w} \end{aligned}$$

Ejemplo 1Resolver $x^3 - 15x - 126 = 0$ **Resolución:**I. Sea $x = y + z$ la solución de la ecuación, se tiene:

$$(y + z)^3 - 15x - 126 = 0$$

$$\Rightarrow y^3 + z^3 + 3yz \underbrace{(y + z)}_x - 15x - 126 = 0$$

$$\Rightarrow (y^3 + z^3 - 126) + (3yz - 15)x = 0$$

Cumpliendo cuando $y^3 + z^3 = 126 \wedge yz = 5$ De donde: $y^3 + z^3 = 126, y^3 z^3 = 125$ II. La ecuación resolvente (de raíces y^3, z^3) es:

$$t^3 - 126t + 125 = 0 \Rightarrow t = 125 \vee t = 1$$

$$\text{Entonces, } y^3 = 125, z^3 = 1 \Rightarrow y = 5, z = 1$$

Luego,

$$x_1 = 5 + 1 = 6$$

$$x_2 = 5w + w^2 = 5\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$x_3 = 5w^2 + w = 5\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{6, -3 + 2\sqrt{3}i, -3 - 2\sqrt{3}i\}$$

Ejemplo 2Halle la raíz real de la ecuación $x^3 + 12x - 12 = 0$ **Resolución:**I. Haciendo $x = y + z$ se tiene

$$y^3 + z^3 + 3yzx + 12x - 12 = 0$$

Del cual se cumple si:

$$y^3 + z^3 = 12 \wedge yx = -4 \Rightarrow y^3 z^3 = -64$$

II. La ecuación resolvente es: $t^2 - 12t - 64 = 0$

$$\text{Factorizando: } (t - 16)(t + 4) = 0$$

$$\Rightarrow t = 16 \vee t = -4$$

$$\Rightarrow y^3 = 16, z^3 = -4 \Rightarrow y = \sqrt[3]{16}, z = -\sqrt[3]{4}$$

$$\therefore x = \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4}$$

TEOREMA (Análisis de las raíces)Sea la ecuación $x^3 + px + q = 0, \{p, q\} \subset \mathbb{R}$ de raíces x_1, x_2, x_3 y $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$

Se cumple:

I. Si $\Delta < 0 \Rightarrow \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$ además todas distintasII. Si $\Delta = 0 \Rightarrow \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}$ además $x_1 = x_2$ III. Si $\Delta > 0 \Rightarrow x_1 \in \mathbb{R}, x_2 = \bar{x}_3 \wedge x_2, x_3 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ **Demostración:**Recordemos que si $y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}, z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$ Donde $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ las raíces son:

$$x_1 = y + z; x_2 = yw + zw^2; x_3 = yw^2 + zw$$

$$\text{con } w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Entonces, se tiene:

I. Si $\Delta < 0 \Rightarrow y, z$ son imaginarios de la forma $a + bi, a - bi$, luego las raíces son:

$$x_1 = a + bi + a - bi \Rightarrow x_1 = 2a$$

$$x_2 = (a + bi)w + (a - bi)w^2 \Rightarrow x_2 = -a - b\sqrt{3}$$

$$x_3 = (a + bi)w^2 + (a - bi)w \Rightarrow x_3 = -a + b\sqrt{3}$$

Como se ve las tres raíces son reales, este es el caso llamado irreducible de la fórmula de Cardano, porque el cálculo de los tres valores reales a que se reduce la expresión compleja es preciso hacerlo trigonométricamente.

II. Si $\Delta = 0$ se tendrá $y = z$ y las raíces serán:

$$x_1 = y + z \Rightarrow x_1 = 2y$$

$$x_2 = yw + zw^2 \Rightarrow x_2 = y(w + w^2) \Rightarrow x_2 = -y$$

$$x_3 = yw^2 + zw \Rightarrow x_3 = y(w^2 + w) \Rightarrow x_3 = -y$$

Dos de las raíces son iguales.

III. Si $\Delta > 0 \Rightarrow y^3, z^3$ son reales de las cuales y, z son sus raíces aritméticas. Entonces, las raíces son: $x_1 = y + z \Rightarrow x_1 = y + z$

$$x_2 = yw + zw^2 \Rightarrow x_2 = -\frac{y+z}{2} + \frac{y-z}{2}\sqrt{3}i$$

$$x_3 = yw^2 + zw \Rightarrow x_3 = -\frac{y+z}{2} - \frac{y-z}{2}\sqrt{3}i$$

Ejemplo 1

Analice las raíces de la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$

Resolución:

Vemos que $\Delta = \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 = 0$

De donde concluimos por el teorema anterior que las tres raíces son reales, dos de las cuales son iguales.

Verifiquemos resolviendo.

Factoricemos $x^3 - 3x + 2 = 0$ por divisores binómicos ya que tiene por primera raíz a 1.

$x=1$	1	0	-3	2
	↓	1	1	-2
	1	1	-2	0

$$(x-1)(x^2+x-2)=0 \Rightarrow (x-1)(x-1)(x+2)=0$$

De donde, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -2$

Ejemplo 2

Analice las raíces de la ecuación $x^3 - 4x + 3 = 0$

Resolución:

Vemos que $\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-4}{3}\right)^3 < 0$ por el teorema

anterior concluimos que las tres raíces son reales y distintas.

Verifiquemos resolviendo, factorizando por divisores binómicos.

$x=1$	1	0	-4	3
	↓	1	1	-3
	1	1	-3	0

$$(x-1)(x^2+x-3)=0$$

$$x^2+x-3=0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$CS = \left\{ 1, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right\}$$

Retomando el caso $\Delta < 0$, caso irreducible de la fórmula de Cardano, su solución trigonométrica es como sigue:

Como $x=y+z$ con $y^3=a+bi$, $z^3=a-bi$ es la solución, entonces:

$$x = (a+bi)^{1/3} + (a-bi)^{1/3}$$

Haciendo: $a=r\cos\theta$, $b=r\sin\theta$, de tal manera

que $a^2+b^2=r^2$, $\tan\theta = \frac{b}{a}$

Entonces, $(a+bi)^{1/3} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{1/3}$

Luego, por el teorema de De Moivre (ver Tomo I, radicación en C forma polar, Cap. XIII).

$$(a+bi)^{1/3} = \sqrt[3]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) \text{ con } k=0, 1, 2$$

Cuyos valores son:

$$\sqrt[3]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{3}\right), \sqrt[3]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right), \sqrt[3]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)$$

Asimismo los valores de $(a-bi)^{1/3}$ son los conjugados de los resultados anteriores. En tal sentido, las raíces de la ecuación cúbica $x^3+px+q=0$ con $\Delta < 0$ son:

$$2\sqrt[3]{r} \cos\frac{\theta}{3}, 2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right), 2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right)$$

con $r^2=a^2+b^2$ y $\tan\theta = b/a$

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $x^3 - 3x + 1 = 0$

Resolución:

Como $\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-3}{3}\right)^3 < 0$

Se sabe, entonces, que las tres raíces serán reales y distintas.

Sea $x=y+z$ la solución, después se tiene:

$$y^3+z^3+3yzx-3x+1=0 \Rightarrow y^3+z^3=-1, yz=1$$

Luego, la ecuación resolvente es $t^2+t+1=0$

Después $t = y^3 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{3} = a+bi$, $r=1$

$$\Rightarrow y = \operatorname{cis}\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right), k=0, 1, 2$$

Luego,

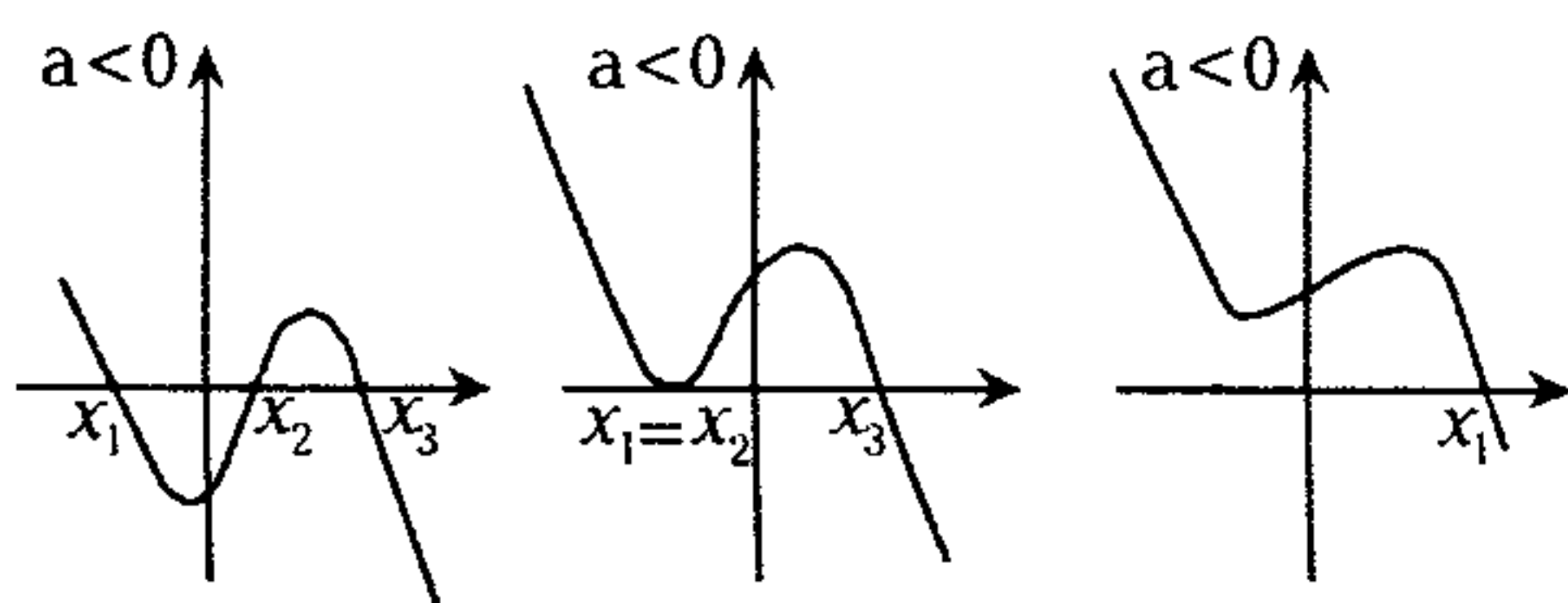
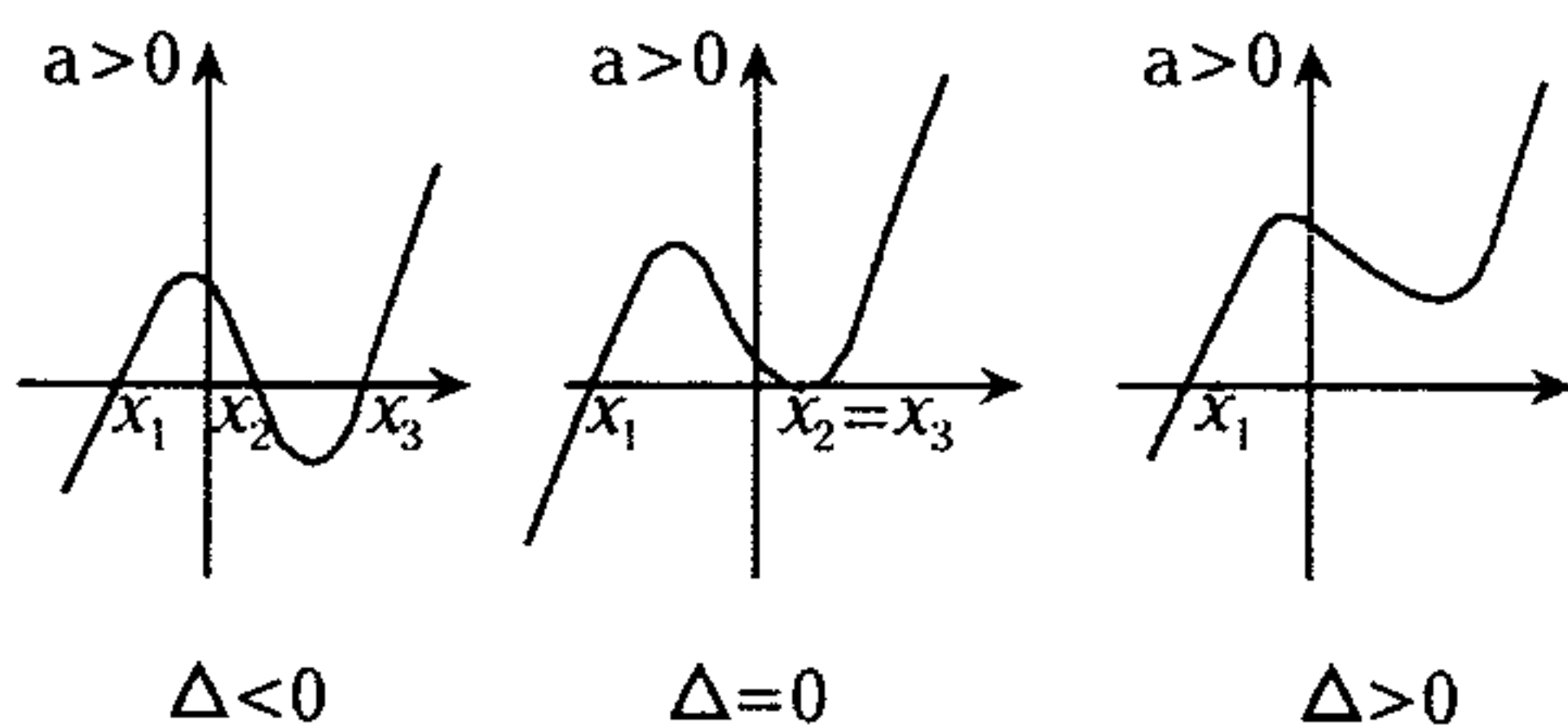
$$x_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \approx 1,530889$$

$$x_2 = 2 \cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi}{3} = 2 \cos \frac{8\pi}{9} \approx -1,879385$$

$$x_3 = 2 \cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{3} = 2 \cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) \approx 0,347296$$

Geométricamente

Sea el polinomio $P(x) = ax^3 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ de raíces x_1, x_2, x_3 y discriminante Δ .



4. ECUACIÓN CUÁRTICA

Llamada también ecuación polinomial de cuarto grado y toma la siguiente forma general:

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0, A \neq 0$$

Sean x_1, x_2, x_3, x_4 las raíces de esta ecuación, entonces, la forma factorizada del polinomio es:

$$A(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = 0$$

Relaciones entre las raíces y los coeficientes del polinomio cuártico.

TEOREMA DE CARDANO-VIETE

Sea $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$, $A \neq 0$ de raíces x_1, x_2, x_3, x_4 se cumple:

I. Suma de raíces: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{B}{A}$

II. Suma de productos binarios:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_3x_4 = \frac{C}{A}$$

III. Suma de productos ternarios:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_2x_3x_4 = -\frac{D}{A}$$

IV. Producto de raíces:

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{E}{A}$$

Ejemplo:

Luego de resolver la ecuación $x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$ de raíces x_1, x_2, x_3, x_4 . Halle:

I. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

II. $x_1x_2x_3x_4$

Resolución:

- Usando el teorema de Cardano-Viete.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{0}{1} = 0$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{-2}{1} = -2$$

Verifiquemos hallando cada uno de las raíces factorizando $x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$ por el aspa doble especial.

$x^4 + 0x^3 - 3x^2 - 6x - 2$	$\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ 2x \quad -2x \end{array}$	$\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ 2 \quad -1 \end{array}$	SDT: $-3x^2$
x^2	$\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ 2x \quad -2x \end{array}$	$\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ 2 \quad -1 \end{array}$	ST: x^2
x^2	$\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ 2x \quad -2x \end{array}$	$\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ 2 \quad -1 \end{array}$	Falta: $-4x^2$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 2i}{2} \begin{cases} x_1 = -1 + i \\ x_2 = -1 - i \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \begin{cases} x_3 = 1 + \sqrt{2} \\ x_4 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

De donde:

I. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 + i - 1 - i + 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 0$

II. $x_1x_2x_3x_4 = (-1 + i)(-1 - i)(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -2$

Solución general de la ecuación cuártica

Sea la ecuación $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$, $A \neq 0$

A. Solución de Ferrari (1522–1565)

La solución de la ecuación cuártica la obtuvo por primera vez el algebrista italiano ludovico Ferrari, discípulo de Cardano.

Sea la ecuación $x^4+2px^3+qx^2+2rx+s=0$ se busca formar cuadrados perfectos.

Sumando miembro a miembro $(ax+b)^2$ a fin de que ambos miembros sean cuadrados perfectos.

$$x^4+2px^3+(q+a^2)x^2+2(r+ab)x+(s+b^2)=(ax+b)^2$$

Supongamos que el primer miembro sea $(x^2+px+k)^2$.

Por identidad de polinomios:

$$p^2+2k=q+a^2, kp=r+ab, k^2=s+b^2$$

Eliminando a y b de estas ecuaciones tenemos:

$$(pk-r)^2=(p^2+2k-q)(k^2-s)$$

Formándose la siguiente ecuación cúbica.

$$2k^3 - qk^2 + 2(pr - s)k - p^2s + qs - r^2 = 0$$

De esta ecuación cúbica puede hallarse siempre un valor real de k, con lo cual a y b quedan determinadas y como:

$$(x^2+px+k)^2=(ax+b)^2 \Rightarrow x^2+px+k=\pm(ax+b)$$

Luego, los valores de x se obtienen de las ecuaciones cuadráticas.

$$x^2+(p-a)x+k-b=0$$

$$x^2+(p+a)x+k+b=0$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $x^4-2x^3-5x^2+10x-3=0$

Resolución:

Sumando m.a.m. $(ax+b)^2$ se tiene:

$$x^4+2x^3+(a^2-5)x^2+2(ab+5)x+b^2-3=(ax+b)^2$$

Sea el primer miembro igual a: $(x^2-x+k)^2$

Por identidad de polinomios.

$$a^2=2k+6, ab=-k-5, b^2=k^2+3$$

Obteniéndose $(2k+6)(k^2+3)=(-k-5)^2$

Que efectuando es: $2k^3+5k^2-4k-7=0$

Como vemos un valor de $k=-1$

De donde $a^2=4$, $ab=-4$, $b^2=4 \Rightarrow a=2$, $b=-2$

Luego, la ecuación $(x^2-x+k)^2=(ax+b)^2$ queda

$$(x^2-x-1)^2=(2x-2)^2 \Rightarrow x^2-x-1=\pm(2x-2)$$

Es decir,

$$x^2-3x+1=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2+x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$$

Luego, las raíces son:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

B. Solución de Descartes (1596–1650)

La siguiente solución fue dada por René Descartes (sabio y filósofo francés, inventor de la Geometría Analítica) en el año 1637.

Sea la ecuación $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$

I. Haciendo $x=y-\frac{A}{4}$, la ecuación queda reducida en:

$$y^4+qy^2+ry+s=0$$

(ecuación cuártica incompleta)

II. Suponga que el polinomio cuártico queda

$$y^4+qy^2+ry+5=(y^2+ky+\ell)(y^2-ky+m)$$

De la igualdad de polinomios se tiene:

$$\ell+m-k^2=q, k(m-\ell)=r, \ell m=s$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$2m=k^2+q+\frac{r}{k}, 2\ell=k^2+q-\frac{r}{k} \text{ y reemplazando}$$

en la tercera.

$$(k^3+qk+r)(k^3+qk-r)=4sk^2$$

Es decir: $k^6+2qk^4+(q^2-4s)k^2-r^2=0$

Esta es una ecuación cúbica en k^2 que tiene siempre una solución positiva. Cuando se conoce k^2 se conocen los valores de ℓ y m y la solución de la cuártica incompleta se obtiene resolviendo las dos ecuaciones cuadráticas.

$$y^2+ky+\ell=0$$

$$y^2-ky+m=0$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$

Resolución:

Hagamos $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 \equiv (x^2 + kx + \ell)(x^2 - kx + m)$

De la igualdad de polinomios:

$$\ell + m - k^2 = -2, \quad k(m - \ell) = 8, \quad \ell m = -3$$

De donde obtenemos:

$$(k^3 - 2k + 8)(k^3 - 2k - 8) = -12k^2$$

$$\Rightarrow k^6 - 4k^4 + 16k^2 - 64 = 0$$

Resolviendo $k^2 = 4$, tomando $k = 2$ tenemos

$$m + \ell = 2, \quad m - \ell = 4 \Rightarrow m = 3, \quad \ell = -1$$

Luego,

$$x^4 - 2x^2 + 8x - 3 \equiv (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0$$

Entonces,

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}i$$

Luego, las raíces son:

$$-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$$

5. ECUACIÓN BICUADRADA

Es una ecuación cuártica de la forma

$$Ax^4 + Bx^2 + C = 0 \text{ con } ABC \neq 0$$

Solución general

I. Haciendo $x^2 = t \Rightarrow At^2 + Bt + C = 0$

II. Usando la solución de la ecuación cuadrática

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

(solución general de la cuadrática)

y como $t = x^2$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$$

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

Resolución:

Haciendo $x^2 = t \Rightarrow t^2 - 8t - 9 = 0$

Que factorizado es $(t - 9)(t + 1) = 0$

De donde:

$$t = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \vee x = -3$$

$$t = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = i \vee x = -i$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{3, -3, i, -i\}$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $x^4 - 5x^2 - 9 = 0$

Resolución:

Haciendo $x^2 = y \Rightarrow y^2 - 5y - 9 = 0$

Aplicando la fórmula general de la ecuación cuadrática.

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{61}}{2} \Rightarrow y = \frac{5 + \sqrt{61}}{2} \vee y = \frac{5 - \sqrt{61}}{2}$$

$$\therefore \text{C.S.} = \left\{ \sqrt{\frac{5 + \sqrt{61}}{2}}, -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{61}}{2}}, \sqrt{\frac{5 - \sqrt{61}}{2}}, -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{61}}{2}} \right\}$$

Definición (raíces simétricas)

Dos raíces de una ecuación polinomial se llaman simétricas si son $\alpha, -\alpha$.

Observando la solución general de la ecuación bicuadrada, vemos que las raíces son simétricas de dos a dos, es decir, son de la forma $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$.

Formación de las ecuaciones

Buscamos formar la ecuación bicuadrada conociendo dos de sus raíces $\alpha, \beta / \alpha \neq \pm \beta$ si se conoce una raíz α , la otra será $-\alpha$. Si conocemos una raíz β , la otra será $-\beta$, entonces las raíces son $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta$, luego, la ecuación es:

$(x - \alpha)(x + \alpha)(x + \beta)(x - \beta) = 0$, que efectuando se obtiene:

$$x^4 - (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + \alpha^2\beta^2 = 0$$

Ejemplo 1

Forme la ecuación bicuadrada si dos de sus raíces son 3, -5.

Resolución:

Si una raíz es 3, la otra será -3. Si una raíz es -5, la otra será 5.

Entonces, la ecuación pedida es:

$$\begin{array}{c} \underbrace{(x-3)(x+3)} \quad \underbrace{(x+5)(x-5)} = 0 \\ (x^2-9)(x^2-25)=0 \end{array}$$

De donde la ecuación requerida es:

$$\boxed{x^4 - 34x^2 + 225 = 0}$$

Ejemplo 2

Hallar el valor entero de m de modo que la ecuación $x^4 = (ax+m+1)(ax-m-1)$ tenga raíces en progresión aritmética (P.A.). Además $a = \sqrt{3m+4}$.

Resolución:

De la ecuación:

$$x^4 = a^2 x^2 - (m+1)^2 \text{ con } a^2 = 3m+4$$

$$\Rightarrow x^4 - (3m+4)x^2 + (m+1)^2 = 0$$

Sean $\alpha, \beta, -\alpha, -\beta$ las raíces con $\alpha < \beta$, ordenando de menor a mayor: $-\beta, -\alpha, \alpha, \beta$. Como está en P.A. tendremos que: $2\alpha = -\alpha + \beta \Rightarrow \beta = 3\alpha$

Luego, las raíces son $\alpha, -\alpha, 3\alpha, -3\alpha$, entonces, la ecuación es:

$$x^4 - 10\alpha^2 x^2 + 9\alpha^4 = 0$$

De donde se obtiene que:

$$3m+4 = 10\alpha^2 \quad \dots\dots\dots (I)$$

$$(m+1)^2 = 9\alpha^4 \quad \dots\dots\dots (II)$$

De (II): $m+1 = 3\alpha^2 \vee m+1 = -3\alpha^2$ en (I):

$$3m+4 = 10\left(\frac{m+1}{3}\right) \vee 3m+4 = -10\left(\frac{m+1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 9m+12 = 10m+10 \vee 9m+12 = -10m-10$$

$$m=2 \quad \therefore m = -\frac{22}{19} \quad \therefore m=2$$

Ejemplo 3

Hallar la suma de los valores que puede tomar "a" de tal manera que la ecuación bicuadrada $x^4 - (a+2)x^2 + 4 = 0$ tenga dos raíces α, β ($\alpha \neq \pm\beta$) y que a la vez éstas sean raíces de $x^2 + ax + b = 0$ para algún $b < 0$.

Resolución:

$$\text{De la ecuación } x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha \cdot \beta = b \end{cases}$$

$$\text{De : } x^4 - (a+2)x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = a+2 \\ \alpha^2 \beta^2 = 4 \Rightarrow \alpha\beta = -2 \end{cases}$$

$$\text{Asimismo, } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

$$\text{Por datos, } (-a)^2 = a+2+2(-2)$$

$$\Rightarrow a^2 - a + 2 = 0$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 1 \quad (\text{prop. de ecuación cuadrática})$$

Definición (polinomio recíproco)

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n se llama recíproco si cumple la siguiente propiedad.

$$\boxed{P(x) = x^n \cdot p\left(\frac{1}{x}\right), n \in \mathbb{N}}$$

De la definición, los polinomios recíprocos son de la forma:

$$ax+b$$

$$ax^2+bx+a$$

$$ax^3+bx^2+bx+a$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$$

$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$$

$$\vdots$$

Asimismo, de la definición vemos que si una

raíz es α , tiene otra $\frac{1}{\alpha}$ es decir, raíces "una la inversa multiplicativa de la otra".

Para conocer las raíces de este polinomio es necesario factorizarlo (ver Tomo I de la misma colección, cap. VII).

7. ECUACIONES BINOMIAS

Son aquellas ecuaciones polinomiales de la siguiente forma:

$$x^n + A = 0, \quad n \in \mathbb{N} \wedge A \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Para la solución de estas ecuaciones es necesario el teorema de De Moivre (radicación en la forma polar de números complejos, ver Tomo I, Cap. XIII).

Resolver: $x^n + A = 0, \quad A \in \mathbb{C}$.

Resolución:

$$x^n = -A$$

Sea $-A$ escrito en la forma polar como

$$-A = |-A|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |-A| \operatorname{cis}\alpha$$

$$\Rightarrow x^n = |-A| \operatorname{cis}\alpha$$

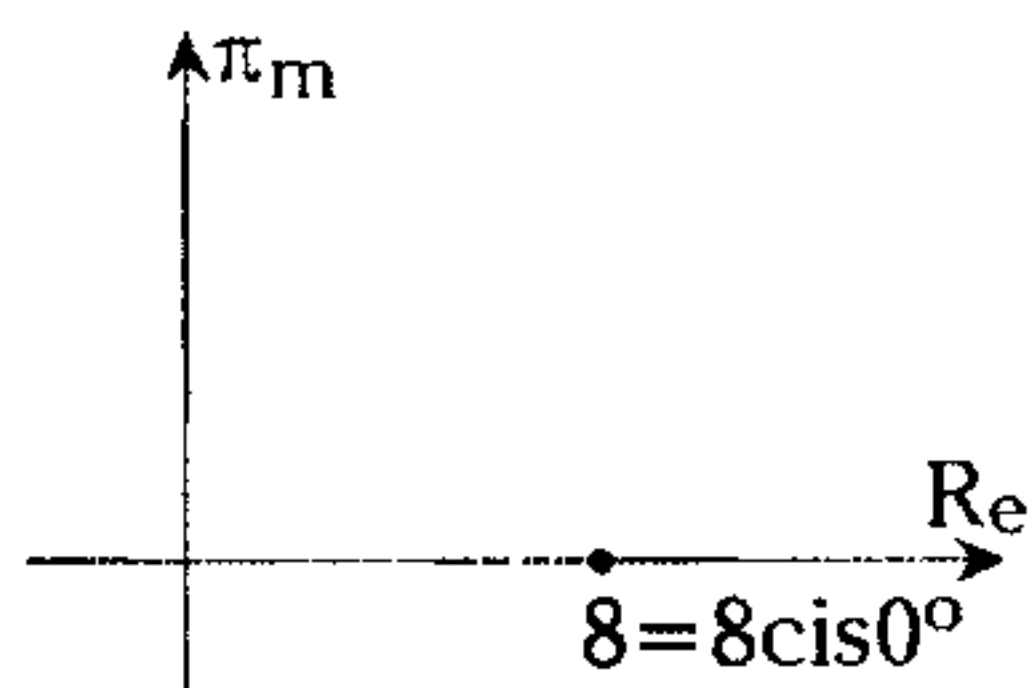
$$\Rightarrow x = \sqrt[n]{|-A|} \operatorname{cis}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, (n-1)$$

Ejemplo 1

Resolver $x^3 - 8 = 0$

Resolución:

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 8$$



$$\Rightarrow x^3 = 8 \operatorname{cis} 0^\circ \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis}\left(\frac{0^\circ + 2k\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2 \operatorname{cis}\left(\frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$\text{Si } k=0 \Rightarrow x_1 = 2 \operatorname{cis} 0^\circ = 2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 2$$

$$\text{Si } k=1 \Rightarrow x_2 = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{Si } k=2 \Rightarrow x_3 = 2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3} = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

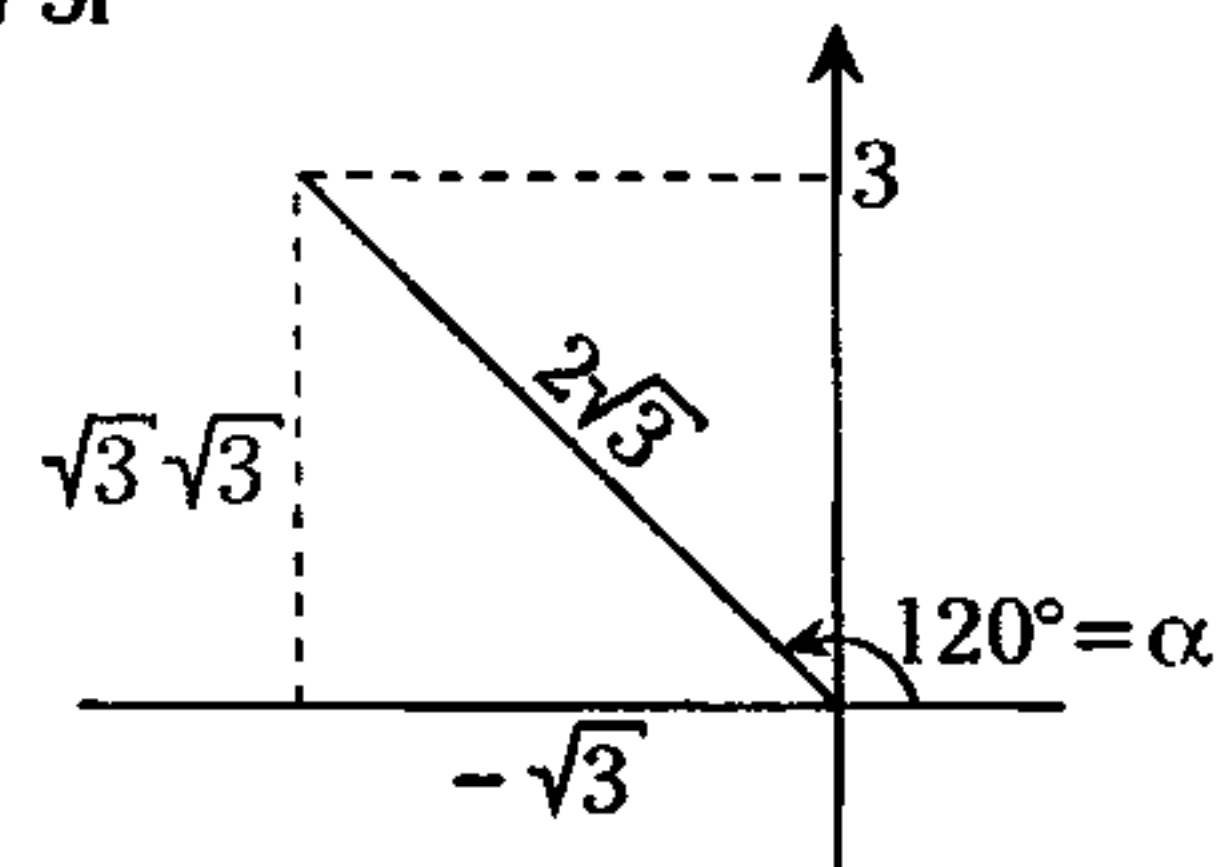
$$\therefore \text{C.S.} = \{2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i\}$$

Ejemplo 2

Resolver $x^4 + \sqrt{3} - 3i = 0$

Resolución:

$$x^4 = -\sqrt{3} + 3i$$



$$\text{En la forma polar: } |-\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{3}{-\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3} \operatorname{cis} 120^\circ = 2\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x^4 = 2\sqrt{3} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \sqrt[4]{2\sqrt{3}} \operatorname{cis}\left[\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)/4\right]$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[8]{12} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$$

Propiedades de las raíces de la ecuación $z^n - 1 = 0$

a) La ecuación $z^n = 1$ no admite raíces múltiples. Como sabemos, 1 en la forma polar se expresa como $1 = \operatorname{cis} 0^\circ$.

$$\Rightarrow z = \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

Para cada valor de k los resultados z son diferentes.

Ejemplo:

$$\text{Si } z^3 = 1 \Rightarrow z = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Denotados por $1, w, w^2$

- b) El producto y el cociente de dos raíces de $z^n=1$ o toda potencia entera de una raíz es, también, una raíz de la ecuación $z^n=1$.

Veamos:

Sean dos de las raíces:

$$\alpha = \text{cis} \frac{2k_1\pi}{n}, \beta = \text{cis} \frac{2k_2\pi}{n}$$

I. $\alpha \cdot \beta = \text{cis} \frac{2(k_1+k_2)\pi}{n}$ es raíz de $z^n=1$

II. $\frac{\alpha}{\beta} = \text{cis} 2(k_1-k_2)\pi$ es raíz de $z^n=1$

III. Por definición $\alpha^n=1 \Rightarrow (\alpha^n)^p = (\alpha^p)^n = 1 \Rightarrow \alpha^p$ es raíz de $z^n=1$

- c) Las raíces comunes de dos ecuaciones $z^n=1$, $z^m=1$ son también raíces de $z^p=1$, siendo p el máximo común divisor de m, n .

Recíprocamente, si α es una raíz de $z^p=1$, será también raíz de $z^n=1$ y $z^m=1$.

Veamos:

$$n=kp, m=rp$$

$$\Rightarrow \alpha^n = \alpha^{kp} = (\alpha^p)^k = 1^k = 1$$

$$\alpha^m = \alpha^{rp} = (\alpha^p)^r = 1^r = 1$$

$$\therefore \alpha \text{ es raíz de } z^n, z^m$$

- d) Cuando “ n ” es un número primo y α es una raíz de la ecuación $z^n=1$ con $\alpha \neq 1$; la sucesión $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^n$ nos dará las n raíces de la ecuación.

Definición (raíces primitivas)

Las raíces de la ecuación $z^n=1$ son:

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \left(\frac{2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

De estas cuando k es primo, se llaman raíces primitivas.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^{12}-1=0$

Resolución:

Se descompone en $(x^6+1)(x^6-1)=0$

Se cumple $x^6-1=0 \vee x^6+1=0$

- I. Si $x^6-1=0 \Rightarrow x^3=1 \vee x^3-1=0$ que tiene por raíces.

$$1; \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}; -1; \frac{1-\sqrt{3}i}{2}; \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

- II. Si $x^6+1=0 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 0$, haciendo $x + \frac{1}{x} = u$

Se tiene $u^3-3u=0$ con lo cual $u=0, u=\sqrt{3}, u=-\sqrt{3}$

Entonces, $x + \frac{1}{x} = 0, x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}, x + \frac{1}{x} = -\sqrt{3}$

Cuyas raíces son:

$$i, -i, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

Si llamamos $\alpha = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ la raíz primitiva, las

demás raíces son:

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^7, \alpha^8, \alpha^9, \alpha^{10}, \alpha^{11}, 1$$

8. ECUACIÓN POLINOMIAL DE GRADO n

Sea el polinomio general en una variable de grado n .

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n, a_0 \neq 0$$

A la igualdad $P(x)=0$ se llama ecuación polinomial de grado n .

La resolución de estas ecuaciones hemos visto particularmente de la ecuación lineal, cuadrática, cúbica, cuártica, bicuadrada, recíproca y binomio mediante fórmulas generales en términos de sus coeficientes. Sin embargo, no ha sido posible resolver en forma general una ecuación de quinto grado o superior mediante fórmulas generales (por radicales). Más aun el matemático Evariste Galois (1811-1832) demuestra que el polinomio general de grado $n \geq 5$ no es soluble por radicales, mediante la teoría de grupos (tratado en Álgebra Moderna). Pero si los coeficientes son numéricos, el valor de cualquiera de las raíces reales puede hallarse mediante aproximaciones (visto en las aplicaciones de la derivada).

Veamos

Factorizando por el método de divisores binómicos vemos que 2 es una raíz, entonces:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & -8 & 16 & 16 & -32 \\ 2 & \downarrow & & & & & \\ & 1 & 0 & -8 & 0 & 16 & 0 \end{array}$$

Se tiene:

$$(x-2)(x^4-8x^2+16)=0 \Rightarrow (x-2)(x^2-4)^2=0$$

$$(x-2)^3(x+2)^2=0$$

Luego, las raíces son:

$$x_1=2, x_2=2, x_3=2, x_4=-2, x_5=-2$$

De donde:

$$\text{I. } x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2$$

$$\text{II. } x_1x_2x_3x_4x_5=32$$

Ejemplo 2

Si $1+\sqrt{3}$ es una raíz de $x^3+ax^2+bx+4=0$ con $a, b \in \mathbb{Q}$, halle ab .

Resolución:

I. Si $x_1=1+\sqrt{3} \Rightarrow x_2=1-\sqrt{3}$ (teorema de la paridad de raíces)

II. Sea x_3 la tercera raíz, por el teorema de Cardano: $x_1x_2x_3=-4$

$$\Rightarrow \underbrace{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}_{=1-3}x_3=-4 \Rightarrow -2x_3=-4$$

$$\Rightarrow x_3=2$$

$$\text{III. } -a=x_1+x_2+x_3=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+2 \Rightarrow a=-4$$

$$\text{IV. } b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1x_2+x_3(x_1+x_2)$$

$$=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})+2(1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b=-2+4 \Rightarrow b=2$$

$$\therefore ab=-8$$

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

En todo polinomio $P(x)$ de coeficientes reales, si $P(a).P(b)<0$, entonces existe al menos una raíz real $x_0 \in \langle a, b \rangle$.

Ejemplo 1

$$\text{Sea } P(x)=x^3-2x-5$$

Se observa que:

$$P(2)=8-4-5 \Rightarrow P(2)=-1$$

$$P(3)=27-6-5 \Rightarrow P(3)=16$$

y como $P(2).P(3)<0 \Rightarrow$ existe al menos una raíz x_0 de $P(x)$ en el intervalo $\langle 2, 3 \rangle$.

Ejemplo 2

¿Cuántas raíces reales tiene el $P(x)=x^3-3x^2-4x+11$?

Resolución:

Se verifica que:

$$P(-2).P(-1)<0 \Rightarrow \exists x_1 \in \langle -2, -1 \rangle / P(x_1)=0$$

$$P(1).P(2)<0 \Rightarrow \exists x_2 \in \langle 1, 2 \rangle / P(x_2)=0$$

$$P(3).P(4)<0 \Rightarrow \exists x_3 \in \langle 3, 4 \rangle / P(x_3)=0$$

\therefore el polinomio tiene tres raíces reales.

TEOREMA DE RAÍCES MÚLTIPLES

Si el polinomio $P(x)=(x-a)^k q(x)$ / $q(a) \neq 0$ se cumple:

$$P(a)=0$$

$$P'(a)=0$$

$$P''(a)=0$$

$$\vdots$$

$$P^{(k-1)}(a)=0$$

Es decir, todas sus derivadas hasta el orden $(k-1)$ se anulan en "a".

Ejemplo 1

$$\text{Sea } P(x)=x^3-3x^2+3x-1$$

$$\text{Se observa que } P(1)=1-3+3-1=0$$

Además,

$$P'(x)=3x^2-6x+3 \Rightarrow P'(1)=3-6+3=0$$

$$P''(x)=6x-6 \Rightarrow P''(1)=6-6=0$$

Entonces, 1 es una raíz triple en el polinomio.

Ejemplo 2

Demostrar que $x^4+qx^2+s=0$ no puede tener tres raíces iguales.

Resolución:

$$\text{Sea } P(x)=x^4+qx^2+s$$

Supongamos que x_0 es la raíz (triple)

3. LAS RAÍCES AUMENTADAS EN UNA CONSTANTE

Sea $P(x)$ un polinomio de raíces x_1, x_2, \dots, x_n , se busca otro polinomio de raíces $x_1+r, x_2+r, \dots, x_n+r$, es decir, las raíces aumentadas en una constante r .

Sean x_k las raíces de $P(x)$ se busca otro polinomio de raíces $y_k = x_k + r \Rightarrow x_k = y_k - r$. Basta reemplazar en el polinomio $P(x)$ x por $x-r$.

Ejemplo 1

Sea $P(x) = x^2 - 5x + 6$ de raíces 2, 3, se busca otro polinomio de raíces 6, 7, es decir, las raíces aumentadas en 4.

Será suficiente reemplazar x por $x-4$, luego:

$(x-4)^2 - 5(x-4) + 6$ es el polinomio buscado, es decir: $x^2 - 13x + 42$ tendrá raíces 6, 7.

Ejemplo 2

Dada la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$

Halle otra ecuación cuyas raíces sean el triple de las raíces de la ecuación anterior, disminuidas en 1.

Resolución:

Sean x las raíces de $x^2 + 2x - 15 = 0$ se busca otra ecuación del mismo grado, cuyas raíces sean $y = 3x - 1$ (triple, disminuido en 1)

$$\Rightarrow x = \frac{y+1}{3}$$

Luego, reemplazando x por $\frac{x+1}{3}$ se tiene:

$$\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x+1}{3}\right) - 15 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{2}{3}(x+1) - 15 = 0, \text{ efectuando}$$

$$x^2 + 8x - 128 = 0$$

Como observará:

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -5; x_2 = 3$$

$$x^2 + 8x - 128 = 0 \Rightarrow y_1 = -16; y_2 = 8$$

De donde $y_1 = 3x_1 - 1$, $y_2 = 3x_2 - 1$

4. LAS RAÍCES RECÍPROCAS

Dado un polinomio $P(x)$ de raíces x_1, x_2, \dots, x_n

se busca otro polinomio de raíces $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$.

Es suficiente cambiar en $P(x)$, x por $\frac{1}{x}$.

Ejemplo 1

Halle una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean las inversas de las raíces de $x^2 - 4x + 3 = 0$

Resolución:

$$\begin{aligned} \text{Cambiando } x \text{ por } \frac{1}{x} &\Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{x}\right) + 3 = 0 \\ &\Rightarrow 1 - 4x + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \end{aligned}$$

La ecuación buscada es $3x^2 - 4x + 1$

Ejemplo 2

Sea $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ de raíces

x_1, x_2, \dots, x_n , la ecuación de raíces $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$

se encuentra cambiando x por $\frac{1}{x}$, así:

$$a_0\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

Multiplicando por x^n se tiene:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + ax + a_0 = 0$$

5. CUADRADO DE LAS RAÍCES

Dado un polinomio $P(x)$ de raíces x_1, x_2, \dots, x_n otro polinomio del mismo grado de raíces

$x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ consigue reemplazando x por \sqrt{x} .

Sea x la raíz de $P(x)$ se busca otro polinomio de raíz $y = x^2$.

$$\Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow \text{se reemplaza } x \text{ por } \sqrt{x}.$$

Ejemplo 1

Busque una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean el cuadrado de las raíces de $x^2 - 5x + 6 = 0$

Resolución:

Bastará reemplazar x por \sqrt{x} .

$$\text{Entonces, } (\sqrt{x})^2 - 5\sqrt{x} + 6 = 0$$

$$\Rightarrow x + 6 = 5\sqrt{x} \Rightarrow (x + 6)^2 = 25x$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x + 36 = 25x$$

$\therefore x^2 - 13x + 36 = 0$ será la ecuación buscada y, efectivamente, sus raíces son 4, 9 es decir $2^2, 3^2$.

Ejemplo 2

Sean a y b las raíces de $x^2 + 3x + 2 = 0$ hallar $a^4 + b^4$.

Resolución:

I. Buscaremos la ecuación de raíces a^2, b^2 , así:

$$\sqrt{x}^2 + 3\sqrt{x} + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{x} = -(x + 2) \Rightarrow 9x = x^2 + 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \text{ tiene raíces } a^2, b^2.$$

II. Busquemos la ecuación de raíces a^4, b^4 , así:

$$\sqrt{x}^2 - 5\sqrt{x} + 4 = 0 \Rightarrow x + 4 = 5\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = 25x \Rightarrow x^2 - 17x + 16 = 0$$

Por el teorema de Cardano: $a^4 + b^4 = 17$

ECUACIÓN FRACCIONARIA

Sea $f(x)$ una expresión algebraica racional fraccionaria, a la expresión $f(x) = 0$ se llama ecuación fraccionaria.

Ejemplos:

$$1. \frac{3x-1}{x+1} - \frac{5}{2x-1} = 0$$

$$2. \frac{\sqrt{2}}{x^2+1} - \frac{2}{x} = 0$$

$$3. \frac{43x+1}{x^3-7x+1} - \frac{x^2}{x+3} = 0$$

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN FRACCIONARIA

Resolver la ecuación $\frac{f(x)}{g(x)} = h(x)$, donde $f(x)$,

$g(x)$ $h(x)$ son polinomios y $g(x)$ es no constante.

Resolución:

- I. Se analiza el conjunto de valores admisibles o campo de definición de la ecuación $g(x) \neq 0$.
- II. Se multiplica por $g(x)$ y se tiene $f(x) = h(x)g(x)$ una ecuación polinomial.
- III. La solución de la ecuación fraccionaria son las soluciones de la ecuación polinomial de II, siempre y cuando satisfacen la condición I.

Ejemplo 1

Resolver la ecuación: $\frac{2x}{x-2} - x = \frac{4}{x-2}$

Resolución:

I. Conjunto de valores admisibles $x \neq 2$

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{4}{x-2} = x \Rightarrow \frac{2(x-2)}{(x-2)} = x$$

$$\text{Como } x \neq 2 \Rightarrow \frac{2(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = x \Rightarrow x = 2$$

Contradicción a la condición inicial, por lo tanto la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 2

Hallar x en: $\frac{1}{2x-3} - \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{5}{x}$

Resolución:

I. C.V.A. $2x-3 \neq 0 \wedge x \neq 0$

$$\Rightarrow x \neq \frac{3}{2} \wedge x \neq 0$$

II. Multiplicando por $2x^2-3x$ se tiene:

$$\frac{2x^2-3x}{2x-3} - \frac{3(2x^2-3x)}{2x^2-3x} = \frac{5(2x^2-3x)}{x}$$

$$x-3 = 10x-15 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 3

Resolver

$$\frac{2(x^2 - x + 1)}{x^3 + 1} - \frac{3(x+2)^3}{(x+1)(x+2)^3} = 1$$

Resolución:*Observación:* $x^3 + 1 \equiv (x+1)(x^2 - x + 1)$

En la ecuación:

$$\frac{2(\cancel{x^2 - x + 1})}{(x+1)(\cancel{x^2 - x + 1})} - \frac{3(\cancel{x+2})^3}{(x+1)(\cancel{x+2})^3} = 1$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+1} = 1 \Rightarrow -\frac{x}{x+1} = 1$$

$$\Rightarrow -x = x+1 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

ECUACIÓN IRRACIONAL

Sea $f(x)$ una expresión algebraica irracional, $f(x)=0$ se llama ecuación irracional.

Ejemplos:

1. $\sqrt{7-x} + \sqrt[3]{x} - 1 = 0$

2. $\frac{5}{\sqrt{2x-1}} + 5x + 7 = 0$

Para su mejor estudio analizaremos por separado los radicales de índice impar y los radicales de índice par.

1. RADICALES DE ÍNDICE IMPAR

Sea $f(x) = {}^{2n+1}\sqrt{g(x)}$ está definida para todo $g(x) \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}$ ya que las ecuaciones irracionales sólo se estudian en \mathbb{R} .

TEOREMA

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad {}^{2n+1}\sqrt{x} = a \Leftrightarrow x = a^{2n+1}$$

Usaremos este teorema en la solución de las ecuaciones irracionales de índice impar.

Ejemplo 1

Resolver

$$\sqrt[3]{x^3 + 8x - 1} = x + 1$$

Resolución:

Del teorema:

$$\sqrt[3]{x^3 + 8x - 1} = x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 8x - 1 = (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Transponiendo términos y simplificando se tiene:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c} 3x \quad \nearrow \quad -2 \\ \quad \quad \quad \searrow \quad -1 \\ x \end{array}$$

De donde, $3x=2 \vee x=1$

\therefore las soluciones son $\frac{2}{3} \vee 1$.

Ejemplo 2

¿De cuántos elementos está constituido el conjunto solución de la ecuación siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + 1 \right) = \sqrt[3]{\frac{2}{x+1}}$$

Resolución:Multiplicando por $\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x+1}$ con $x \neq 0 \wedge x \neq -1$

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x}$$

Recordando $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

$$\text{Al cubo: } x - 1 + x + 1 + 3\sqrt[3]{x^2 - 1}\sqrt[3]{2x} = 2x$$

Reduciendo se tiene:

$$3\sqrt[3]{2x(x^2 - 1)} = 0$$

El cual es equivalente a

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x(x+1)(x-1) = 0$$

De donde $x=1$

\therefore tiene un solo elemento en su conjunto solución.

2. RADICALES DE ÍNDICE PAR

El estudio de las ecuaciones irracionales sólo se realiza en los reales, es decir:

Si $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$, $n \in \mathbb{N}$, se dirá:

$g(x)$ es real no negativo, si y sólo si $f(x) \geq 0$, además queda garantizada la definición de $g(x)$ si y solo si $f(x) \geq 0$.

Para resolver estas ecuaciones seguiremos el siguiente procedimiento.

Resolver: $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

Resolución:

- I. La ecuación está bien definida si $g(x) \geq 0 \wedge f(x) \geq 0$ de donde obtenemos en campo de definición para la ecuación.
- II. Garantizada la existencia, elevamos a la $2n$.
 $g^{2n}(x) = f(x)$
- III. La solución general estará formada por aquellos x que cumplen con I y II.

Ejemplo 1

Resolver $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} = 1$

Resolución:

- I. Definir bien la ecuación:

$$3x-2 \geq 0 \wedge x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3} \wedge x \geq -3$$

$$\text{De donde } x \geq \frac{2}{3}$$

II. $\sqrt{3x-2} = \sqrt{x+3} + 1$

Elevando al cuadrado m.a.m.

$$3x-2 = x+3+1+2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 2x-6 = 2\sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow x-3 = \sqrt{x+3} \text{ la cual está definida si } x \geq 3$$

Al cuadrado:

$$x^2 - 6x + 9 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x-1) = 0 \text{ con } x \geq 3$$

$\therefore x = 6$ existe una sola solución.

Ejemplo 2

Resolver $\sqrt{x^2-21x+90} - \sqrt{x^2+3x-54} = x-6$

Resolución:

- I. Definiendo bien la ecuación:

$$x^2-21x+90 \geq 0 \wedge x^2+3x-54 \geq 0$$

$$(x-15)(x-6) \geq 0 \wedge (x-6)(x+9) \geq 0$$

$$x \in (-\infty; 6] \cup [15; +\infty) \wedge x \in (-\infty; -9] \cup [6; +\infty)$$

$$\text{De donde } x \in (-\infty; -9] \cup [15; +\infty) \cup \{6\}$$

II. *) $\sqrt{(x-6)(x-15)} - \sqrt{(x-6)(x+9)} = \sqrt{x-6}^2$
 $x \in [15; +\infty) \cup \{6\}$

Simplificando $\sqrt{x-6}$ se tiene:

$$\sqrt{x-15} - \sqrt{x+9} = \sqrt{x-6}$$

$$\text{con } x \geq 8 \wedge x \geq 15$$

a) Para no perder solución $x-6=0 \Rightarrow x=6$

b) Al cuadrado:

$$(\sqrt{x-15})^2 = (\sqrt{x+9} + \sqrt{x-6})^2$$

$$x-15 = x+9+x-6+2\sqrt{(x+9)(x-6)}$$

$$-18-x = 2\sqrt{(x+9)(x-6)}$$

Cuya ecuación no tiene solución puesto que $-18-x < 0$.

La única solución es $x=6$.

Además

**) $\sqrt{(x-6)(x-15)} - \sqrt{(x-6)(x+9)} = -\sqrt{6-x}^2$
 $x \in (-\infty, -9]$

Simplificando $\sqrt{6-x}$

$$\sqrt{15-x} - \sqrt{-x-9} = -\sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{15-x} + \sqrt{6-x} = -\sqrt{-x-9}$$

Elevando al cuadrado:

$$21-2x+2\sqrt{15-x}\sqrt{6-x} = -x-9$$

$$\underbrace{30-x+2\sqrt{15-x}\sqrt{6-x}}_{+} = 0, x \in (-\infty, -9]$$

En este caso no se tiene soluciones.

$$\therefore \text{C.S.} = \{6\}$$

Problema 6

Determinar las condiciones para que se cumpla:

- I. $x^2 - 8x + \alpha = 0$ tenga raíces iguales
- II. $3x^2 - 10x + \alpha = 0$ tenga raíces positivas
- III. $3x^2 - 10x + \alpha = 0$ tenga raíces de signos opuestos.
- IV. $x^2 + 8x + \alpha = 0$ tenga las dos raíces negativas.

Resolución:

- I. Raíces iguales (discriminante nulo)

$$\text{En } x^2 - 8x + \alpha = 0 \Rightarrow \Delta = (-8)^2 - 4(\alpha) = 0$$

$$\text{De donde } \alpha = 16$$

- II. Raíces positivas: $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

$$\text{En } 3x^2 - 10x + \alpha = 0$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{10}{3} > 0 \\ x_1 x_2 &= \frac{\alpha}{3} > 0 \end{aligned} \right\} \alpha > 0$$

$$\Delta = 10^2 - 4(3\alpha) \geq 0 \Rightarrow \alpha \leq \frac{25}{3}$$

$$\text{Entonces, } \alpha \in \left(0; \frac{25}{3}\right]$$

- III. Raíces de signos opuestos $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 x_2 < 0 \end{cases}$

$$\text{En la ecuación: } 3x^2 - 10x + \alpha = 0$$

$$x_1 x_2 = \frac{\alpha}{3} < 0 \Rightarrow \alpha < 0$$

$$\Delta = 10^2 - 4(3\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{25}{3}$$

$$\text{De } \alpha < 0 \wedge \alpha < \frac{25}{3} \Rightarrow \alpha \in <-\infty; 0>$$

- IV. Raíces negativas $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

$$\text{En la ecuación } x^2 + 8x + \alpha = 0$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -8 < 0 \\ x_1 x_2 &= \alpha > 0 \end{aligned} \right\} \alpha > 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha < 16$$

$$\text{De donde } \alpha \in <0, 16>$$

Problema 7

Si $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R} - 0$ es una de las soluciones de la ecuación en x .

$$a(b-c)x^2 + b(a-c)x + c(a-b) = 0 \text{ es.}$$

Resolución:

Se puede observar que el polinomio cuadrático se anula para $x = -1$.

Por la regla de Ruffini:

$x = 1$	$ab - ac$	$ab - bc$	$ac - bc$
\downarrow	$-ab + bc$	$-ac + bc$	0
	$ab - ac$	$ac - bc$	0

La otra raíz se halla en el cociente:

$$(ab - ac)x + ac - bc = 0 \Rightarrow x = \frac{c(b-a)}{a(b-c)}$$

Problema 8

Si $\{a, b\}$ es el conjunto solución de la ecuación:

$$x^2 - 197781x - 197771 = 0$$

Halle el valor de: $a^2 + b^2 + a^2 b^2 + 2ab(a+b+1)$

Resolución:

Como podrá percatarse lo pedido es equivalente

$$a: (a+b+ab)^2$$

Por el teorema de Cardano-Viete.

$$a+b = 197781 \wedge ab = -197771$$

$$\Rightarrow a+b+ab = 10$$

$$\therefore (a+b+ab)^2 = 100$$

Problema 9

Si el conjunto solución de la ecuación $5x^3 + 3x^2 + 5 = 0$ es $\{a, b, c\}$

Hallar el valor de:

$$\frac{ab(a^2 b^2 - 1) + bc(b^2 c^2 - 1) + ac(a^2 c^2 - 1) + 5a^3 + 3a^2}{abc}$$

Resolución:

Por el teorema de Cardano:

$$\text{En } 5x^3 + 3x^2 + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = -\frac{3}{5} \\ ab+ac+bc = 0 \\ abc = -\frac{5}{5} = -1 \end{cases}$$

Problema 13

Si dos de las raíces de la ecuación:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex - 2 = 0$$

de coeficientes reales son los complejos i y $1-i$.

Obtener $a+b+c+d+e$ si $c-e=1$

Resolución:

I. Si i es una raíz se tiene:

$$ai + b - ci - d + ei - 2 = 0$$

$$(a-c+e)i + b-d-2=0$$

$$\text{como } c-e=1 \Rightarrow a=1$$

II. Las raíces son $i, -i, 1-i, 1+i, x_5$

Por el teorema de Cardano:

$$i(-i)(1-i)(1+i)x_5 = 2 \Rightarrow x_5 = 1$$

III. Como 1 es una raíz se tiene:

$$a+b+c+d+e-2=0$$

$$\therefore a+b+c+d+e=2$$

Problema 14

Encuentre el valor de k si la ecuación en x .

$$x^4 - (3k-2)x^2 + (k-2)^2 = 0 \text{ si dos de sus raíces}$$

negativas distintas suman -6 .

Resolución:

Sean $\alpha, \beta, -\alpha, -\beta$ las raíces $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

Por dato $\alpha + \beta = 6$

La ecuación bicuadrada es:

$$x^4 (\alpha^2 + \beta^2) x^2 + \alpha^2 \beta^2 = 0$$

$$\text{Asimismo es: } x^4 - (3k-2)x^2 + (k-1)^2 = 0$$

De donde se tiene:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 3k - 2$$

$$(\alpha\beta) = (k-1) \Rightarrow \alpha\beta = k-1 \vee \alpha\beta = 1-k$$

$$\alpha + \beta = 6$$

$$\text{Sabemos que } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$$

Por datos:

I. Si $\alpha\beta = k-1 \Rightarrow 6^2 = 3k-2+2(k-1) \Rightarrow k=8$
de donde un valor de k es 8.

II. Si $\alpha\beta = 1-k \Rightarrow 6^2 = 3k-2+2(1-k) \Rightarrow k=36$
 $\therefore k$ es 8 ó es 36.

Problema 15

En un concurso nacional de matemática, frente a la resolución de una ecuación cuadrática ocurre lo siguiente:

- I. Un alumno se equivocó en el término independiente y obtuvo como soluciones a 8 y 2.
- II. Otro alumno se equivocó en el coeficiente del término lineal y obtuvo como soluciones -9 y -1 .

¿Cuál fue la ecuación correcta?

Resolución:

I. Si obtuvo como soluciones a 8 y 2 la ecuación que resolvió fue:

$$x^2 - (8+2)x + 8 \cdot 2 = 0$$

\uparrow \uparrow
 correcto equivocado

II. Si obtuvo como soluciones $-9, -1$ la ecuación que resolvió fue:

$$x^2 - (-9-1)x + (-9)(-1) = 0$$

\uparrow \uparrow
 equivocado correcto

\therefore la ecuación correcta fue: $x^2 - 10x + 9 = 0$

Problema 16

Sabiendo que c es una raíz de la ecuación

$$ax^5 + (b-ac)x^4 - bcx^3 - bx^2 - (-a-bc)x + ac = 0, \quad a \neq 0$$

¿Qué condición debe cumplirse para a, b y c para que todas las raíces sean reales. ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

Resolución:

Si c es una raíz, por la regla de Ruffini se tiene:

	a	$b-ac$	$-bc$	$-b$	$-a+bc$	ac
c	\downarrow	ac	bc	0	$-bc$	$-ac$
	a	b	0	$-b$	$-a$	0
1	\downarrow	a	$a+b$	$a+b$	a	
	a	$a+b$	$a+b$	a	0	
-1	\downarrow	$-a$	$-b$	$-a$		
	a	b	a	0		

Sólo faltaría que las raíces de $ax^2 + bx + a = 0$ sean reales, sabemos que una ecuación cuadrática tiene soluciones reales si la discriminante no es negativa, entonces:

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

\therefore la condición es $b^2 \geq 4a^2 \wedge a, b, c \in \mathbb{R}$

Problema 17

La ecuación $x^4 - 7x - 12 = 0$ posee dos raíces cuya suma es -1 . Calcule la suma de las inversas de las otras dos.

Resolución:

Si la suma de dos de sus raíces es -1 , la suma de las otras 2 es 1.

Factorizando:

$$\begin{array}{r} x^4 + 0x^3 - 0x^2 - 7x - 12 \\ x^2 \quad \quad \quad -x \quad \quad \quad -3 \\ x^2 \quad \quad \quad x \quad \quad \quad 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{SDT: } 0x^2 \\ \text{ST: } x^2 \\ \text{Falta: } -x^2 \end{array}$$

$$\text{En } x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$$

$$x^2 + x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 + x_4 = -1 \\ x_3 x_4 = 4 \end{cases}$$

De las condiciones se pide:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Problema 18

Si las ecuaciones en x

$$x^2 + x + a = 0$$

$$x^2 + 2x + b = 0$$

tienen una raíz común, calcular $\frac{5(a-b)^2}{b-2a}$

Resolución:

Si α es la solución común, entonces:

$$\alpha^2 + \alpha + a = 0 \quad \dots (I)$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + b = 0 \quad \dots (II)$$

(2)-(1): $\alpha = a - b$ (la solución común)

Se reemplaza en la segunda ecuación:

$$(a-b)^2 + 2(a-b) + b = 0 \Rightarrow (a-b)^2 = b-2a$$

\therefore lo pedido es:

$$5 \left(\frac{b-2a}{b-2a} \right) = 5$$

Problema 19

Para qué valor del parámetro real n la ecuación $x^3 - 2x^2 + (n+5)x + n = 0$ tiene dos raíces imaginarias puras y conjugadas.

Resolución:

Sean las raíces $ki, -ki, k \in \mathbb{N}$

Entonces, el polinomio tiene un factor $x^2 + k$.

Dividiendo por el método de Horner.

	1	-2	n+5	n
0	↓	0	-k ²	
-k ²	3		0	2k ²
	1	-2	0	0

$$n+5-k^2=0 \quad \dots (\alpha)$$

$$n+2k^2=0 \quad \dots (\beta)$$

$$2(\alpha) + \beta : 3n+10=0 \Rightarrow n = -\frac{10}{3}$$

Problema 20

Resolver la ecuación en x .

$$\frac{x+a-b}{x-a} - \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2} = \frac{x+a+b}{x+a}$$

Resolución:

I. Conjunto de valores admisibles.

$$x-a \neq 0 \wedge x+a \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{a, -a\}$$

$$\text{II. } \frac{x+a-b}{x-a} - \frac{x+a+b}{x+a} = \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}$$

Mínimo común múltiplo

$$\frac{(x+a-b)(x+a) - (x+a+b)(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{a^2+b^2}{x^2-a^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + ax + ax + a^2 - bx - ab - (x^2 - ax + ax - a^2 + bx - ab) = a^2 + b^2$$

Efectuando y simplificando:

$$2x(a-b) + 2a^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$$

Problema 21

Halle el valor de $\frac{q^5}{r^4}$ si la ecuación $x^5 - 5qx + 4r = 0$ tiene una raíz de multiplicidad 2.

Resolución:

Sea el polinomio $P(x) = x^5 - 5qx + 4r$

I. c es una raíz $\Rightarrow c^5 - 5qc + 4r = 0$

II. c es una raíz de multiplicidad 2 de $P(x)$, entonces, c es raíz de $P'(x) = 5c^4 - 5q$.
 $\Rightarrow 5c^4 - 5q = 0 \Rightarrow q = c^4 \dots\dots (a)$

III. (a) en (I): $c^5 - 5(c^4)c + 4r = 0 \Rightarrow r = c^5 \dots\dots (b)$

IV. a y b en lo pedido $\frac{q^5}{r^4} = \frac{(c^4)^5}{(c^5)^4} = 1$

Problema 22

Resolver la ecuación:

$$\frac{x(x+4)+6}{x+2} + \frac{x(x+6)+12}{x+3} = \frac{x(x+2)+2}{x+1} + \frac{x(x+8)+20}{x+4}$$

Resolución:

Como nos piden una de las raíces.

Tomemos $x^2 + (a+b)x + a^2 + b^2 - ab = -3ab$

Es decir, $x^2 + (a+b)x + (a+b)^2 = 0$

De donde, $x = (a+b) \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$

Una de sus raíces será: $\left(\frac{a+b}{2} \right) (-1 + \sqrt{3}i)$

Problema 28

Si las ecuaciones: $x^4 + ax^2 - 2 = 0$
 $x^4 + x^3 - bx - 4 = 0$

tienen tres raíces comunes.

Determine el valor de $a-b$.

Resolución:

Como tienen tres raíces comunes, sea $x^3 + mx^2 + nx + p$ el factor común de los polinomios:

$$x^4 - ax^2 - 2 \wedge x^4 + x^3 - bx - 4$$

Entonces,

$$x^4 - ax^2 - 2 = (x^3 + mx^2 + nx + p)q_1(x) \dots\dots (\alpha)$$

$$x^4 + x^3 - bx - 4 = (x^3 + mx^2 + nx + p)q_2(x) \dots\dots (\beta)$$

$(\beta) - (\alpha) :$

$$x^3 - ax^2 - bx - 2 = (x^3 + mx^2 + nx + p)(q_2(x) - q_1(x))$$

De donde $q_2(x) - q_1(x) = 1$

$$\Rightarrow a = -m, b = -n, p = -2$$

$(2\alpha) - (\beta) :$

$$x^4 - x^3 + 2ax^2 + bx = (x^3 + mx^2 + nx + p)(2q_1(x) - q_2(x))$$

De donde, $2q_1(x) - q_2(x) = x$

$$\Rightarrow -1 = m \wedge 2a = n \wedge b = p$$

Luego, $b = p = 2, 2a = n = -b = -(-2)$
 $a = 1$

$$\therefore ab = 1 - (-2) = 3$$

Problema 29

En un polinomio mónico $P(x)$ de coeficientes racionales, se sabe que una de sus raíces es

$$\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{2\sqrt{2}}.$$

Determine el producto de las raíces de dicho polinomio, si es de grado mínimo.

Resolución:

Reduciendo la raíz $x = \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} + \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ se encuentra
 $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}.$

Como nos piden una ecuación polinomial de coeficientes racionales, habría la necesidad de eliminar los radicales.

$$\text{De } x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x - \sqrt{2})^3 = (\sqrt[3]{2})^3$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2\sqrt{2} + 3x\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^3 = 2$$

$$(x^3 + 6x - 2)^2 = (3x^2 + 2\sqrt{2})^2$$

De donde el polinomio buscado es:

$$P(x) = (x^3 + 6x - 2)^2 - 2(3x^2 + 2)^2$$

Por el teorema de Cardano, el producto de raíces es igual al término independiente (por ser mónico y de grado par).

$$\text{Luego, } x_1 x_2 \dots x_6 = P(0) = (-2)^2 - 2(2)^2$$

$$\therefore x_1 x_2 \dots x_6 = -4$$

Problema 30

Si se sabe que las raíces de la ecuación $x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$ son x_1, x_2, x_3 . Halle una ecuación cúbica de raíces x_1, x_2, x_1x_3, x_2x_3 en incógnita y .

Resolución:

La ecuación buscada será:

$$(y - x_1x_2)(y - x_1x_3)(y - x_2x_3) = 0, \text{ efectuando}$$

$$y^3 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)y^2 + x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)y - (x_1x_2x_3)^2 = 0$$

Por el teorema de Cardano:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$$

$$x_1x_2x_3 = -3$$

Finalmente se tendrá:

$$y^3 - y^2 + (-3)(2)y - (-3)^2 = 0 \Rightarrow y^3 - y^2 - 6y - 9 = 0$$

Problema 31

Halle los números reales a y b de modo que $1+i$ sea una raíz de la ecuación $x^5 + ax^3 + b = 0$.

Resolución:

Por el teorema de la paridad de raíces, si $1+i$ es una raíz, el otro será $1-i$ siendo $x^2 - 2x + 2 = 0$ la ecuación que genera a estas raíces, lo cual implica que $x^2 - 2x + 2$ es un factor de $x^5 + ax^3 + b = 0$

Luego, por Horner:

1	1	0	a	0	0	b
2	↓	+2	-2			
-2			4	-4		
				2a+4	2a+4	
					4a	-4a
	1	2	a+2	2a	0	0

Como es exacta (definición de factor)

$$-2a - 4 + 4a = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$b - 4a = 0 \Rightarrow b = 8$$

Problema 32

Determine las condiciones para el parámetro a real para que las cuatro raíces de la ecuación: $x^4 - ax^3 + (a+2)x^2 - ax + 1 = 0$, sean positivas.

Resolución:

Del teorema de Cardano, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$ y como las raíces son positivas $a > 0$.

Al factorizar la ecuación recíproca.

$$x^2 \left[x^2 - ax + (a+2) - \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} \right] = 0$$

$$\text{Se hace } x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Además, como $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow y \geq 2$

La ecuación queda: $x^2[y^2 - 2 - ay + a + 2] = 0$

$$\Rightarrow y^2 - ay + a = 0 \text{ con } y \geq 2$$

Es decir, $y^2 - ay + a = 0$, $a > 0$ es una ecuación cuadrática de soluciones mayores o iguales a 2.

De donde se debe cumplir:

$$\Delta \geq 0 \wedge y_1 + y_2 \geq 4 \wedge y_1 y_2 \geq 4$$

$$\underbrace{a^2 - 4a \geq 0 \wedge a \geq 4 \wedge a \geq 4}_{a \geq 4}$$

\therefore las condiciones del parámetro a es $a \geq 4$.

Problema 33

Si $a > b > 0$, determine el cociente entre la mayor y la menor solución de la ecuación en x :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$$

Resolución:

I. Conjunto de valores admisibles.

$$x \neq 0 \wedge x + a + b \neq 0$$

II. De la ecuación:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a+b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$$

$$\frac{x+a+b-x}{x(x+a+b)} + \frac{a+b}{ab} = 0$$

$$\Rightarrow (a+b) \left[\frac{1}{x(x+a+b)} + \frac{1}{ab} \right] = 0$$

$$\text{Luego, } x^2 + (a+b)x = -ab$$

$$\Rightarrow (x+a)(x+b) = 0 \Rightarrow x = -a, x = -b$$

$$\Rightarrow x_{\text{mayor}} = -b, x_{\text{menor}} = -a$$

$$\therefore \text{ lo pedido es: } \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$$

Problema 37

Resolver la ecuación en x :

$x^4 + ax^3 + 2x + b = 0$ si se sabe que admite una raíz real de multiplicidad tres.

Resolución:

Sean $\alpha, \alpha, \alpha, \beta$ las raíces $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Por el teorema de Cardano-Viete.

- I. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3\alpha + \beta = -a$
 II. Suma de productos binarios: $3\alpha(\alpha + \beta) = 0$
 de donde $\alpha = 0 \vee \alpha = -\beta$.

- III. Productos ternarios: $\alpha^2(\alpha + 3\beta) = -2$

Observamos que $\alpha \neq 0$

De II y III: $\alpha = -\beta \wedge \alpha^2(\alpha + 3\beta) = -2$

se tiene: $(-\beta)^2(-\beta + 3\beta) = -2$

$$\Rightarrow \beta^3 = -1 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow \alpha = 1$$

\therefore las raíces son: 1, 1, 1, -1.

Problema 38

Dada la ecuación en x .

$$x^3 + (n+2)x^2 + (n^2-3)x + n^3 + 2 = 0$$

Determine el valor del parámetro real n para que el valor de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sea máximo.

Resolución:

Usando el teorema del problema 34.

$$\text{Sea } P(x) = x^3 + (n+2)x^2 + (n^2-3)x + n^3 + 2$$

$$P'(x) = 3x^2 + (2n+4)x + n^2 - 3$$

Por Horner: $P'(x) \div P(x)$

1	3	2n-4	n ² -3	0
-n-2		-3n-6	-3n ² -6	-3n ³ -6
-n ² +3			n ² +4n+4	(n ² -3)(n+2)
-n ³ -2				
	3	-n-2	-n ² +4n+10	
		\uparrow	\uparrow	
		$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	

Se quiere que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sea máximo

$$\text{Pero } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -n^2 + 4n + 10 = 14 - (n-2)^2$$

$14 - (n-2)^2$ es máximo cuando $n=2$.

Problema 39

Luego de resolver la ecuación:

$$\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1} = 8$$

Calcule la suma de sus soluciones.

Resolución:

Haciendo $\sqrt[3]{x} = y$ con $y \neq -1$
 se tiene:

$$\frac{y^4-1}{y^2-1} - \frac{y^2-1}{y+1} = 8$$

$$\frac{(y^2+1)(\cancel{y^2-1})}{\cancel{y^2-1}} - \frac{(y+1)(\cancel{y+1})}{\cancel{y+1}} = 8$$

$$y^2+1-y+1=8 \Leftrightarrow y^2-y-6=0$$

$$\Leftrightarrow (y-3)(y+2)=0$$

De donde $y=3 \vee y=-2$

$$y=3 = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x_1=27$$

$$y=-2 = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x_2=-8$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 27 - 8 = 19$$

Problema 40

Luego de resolver

$$\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x-2} = 1$$

Dé como respuesta la mayor solución.

Resolución:

$$\text{Si } x-2=t^3 \Rightarrow x=t^3+2$$

En la ecuación:

$$\sqrt{t^3+2+1} - \sqrt[3]{t^3} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{t^3+3} = t+1$$

Al cuadrado:

$$t^3+3=t^2+2t+1 \Leftrightarrow t^3-t^2-2t+2=0$$

Al factorizar se obtiene:

$$(t-1)(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})=0$$

Como se busca el mayor valor de x se consigue con el mayor valor de t .

$$\text{Con } t=\sqrt{2} \Rightarrow x=\sqrt{2}^3+2$$

$$\therefore x_{\max} = 2\sqrt{2} + 2$$

Problema 41Resolver en x .

$$\frac{a+x}{a^2+ax+x^2} - \frac{a-x}{ax-x^2-a^2} = \frac{3}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$$

Resolución:

Equivalente a:

$$\frac{a+x}{a^2+ax+x^2} - \frac{a-x}{a^2-ax+x^2} = \frac{3}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$$

$$\frac{(a+x)(a^2-ax+x^2) + (a-x)(a^2+ax+x^2)}{(a^2+ax+x^2)(a^2-ax+x^2)} = \frac{3}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$$

$$a^3+x^3+a^3-x^3 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{2a^3}$$

Problema 42

Resolver la ecuación:

$$2x^3 + (\sqrt{x-2} - \sqrt{2-x})x^5 + 3x + 4 = 26$$

Resolución:

I. Se define la ecuación:

$$x-2 \geq 0 \wedge 2-x \geq 0 \Rightarrow x=2$$

II. $2x^3+23x+4=26 \Leftrightarrow 2x^3+3x-22=0$ Al factorizar se encuentra que también $x=2$ es una solución.

$$\therefore x=2$$

Problema 43Si x_0 es una solución de $\sqrt[3]{2x+7} + \sqrt[3]{x+3} = 1$, halle el valor de $\sqrt[3]{2x_0-2}$ **Resolución:**

$$\sqrt[3]{2x+7} + \sqrt[3]{x+3} + (-1) = 0$$

Recordar:

$$\boxed{\text{Si } a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc}$$

En el problema:

$$2x+7+x+3+(-1)=3 \sqrt[3]{(2x+7)(x+3)(-1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+3)} = -\sqrt[3]{(2x+7)(x+3)}$$

$$(x+3)^3 = -(2x+7)(x+3) \Leftrightarrow (x+3)[(x+3)^2 + 2x+7] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2+8x+16)=0$$

De donde sólo $x=-3$

$$\therefore \text{lo pedido es } \sqrt[3]{2(-3)-2} = 2$$

Problema 44Resolver: $(x-16)^3 + (11-x)^3 + 125 = 60x - 15x^2$ **Resolución:**Como $(x-16) + (11-x) + 5 = 0$, la ecuación queda:

$$\cancel{3}(x-16)(11-x)\cancel{3} = \cancel{15}(4x-x^2)$$

Que se reduce a: $x^2-27x+176=x^2-4x$

$$\Leftrightarrow 23x=176$$

$$\therefore x = \frac{176}{23}$$

Problema 45Resolver en x .

$$x(\sqrt{m^2-x^2} + \sqrt{n^2-x^2}) = mn, |m| > |n|$$

Resolución:

I. Se define bien la ecuación:

$$m^2-x^2 \geq 0 \wedge n^2-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq n^2$$

II. Al elevar al cuadrado.

$$x^2 \left[m^2-x^2 + n^2-x^2 + 2\sqrt{(m^2-x^2)(n^2-x^2)} \right] = m^2n^2$$

Se transpone términos y se da forma de un cuadrado perfecto.

$$\underbrace{m^2n^2 - (m^2+n^2)x^2 + x^4} - 2\sqrt{(m^2-x^2)(n^2-x^2)}x^2 + x^4 = 0$$

$$\underbrace{(m^2x^2)(n^2-x^2) - 2\sqrt{(m^2-x^2)(n^2-x^2)}x^2 + x^4} = 0$$

$$\left(\sqrt{(m^2-x^2)(n^2-x^2)} - x^2 \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2-x^2)(n^2-x^2) = x^4 \Rightarrow (m^2+n^2)x^2 = m^2n^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

Problemas Propuestos

1. Respecto a la ecuación en x , $a(a^2-1)x=0$, establezca el valor de verdad de cada proposición:

- I. Es compatible para cualquier valor de a .
- II. Si $a=-1$, tiene infinitas soluciones.
- III. Si $a=0$, tiene solución única.
- IV. Si $a \in \{0,1,-1\}$, tiene una única solución e igual a cero.

- A) VVVV B) VFVF C) FFVV
D) FFFV E) FVFF

2. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones con respecto a la ecuación en x :

$$a^2(a-2)-(a+1-a\sqrt{a}-\sqrt{a})x=a-2$$

- I. Es determinado cuando $a \neq 1 \wedge a \neq -1$
- II. Es indeterminado cuando $a=1 \vee a=-1$
- III. Es incompatible cuando $a=2$.

- A) VVV B) VVF C) VFV
D) FFV E) VFF

3. Luego de resolver la ecuación en " x "

$$x+a+\frac{x-2a}{3}+\frac{x-3a}{5}=\frac{23x-4a}{15}-2a$$

Es cierto que:

- A) la solución depende de a ($a \in \mathbb{R}$).
- B) tiene una sola solución.
- C) no tiene solución.
- D) tiene infinitas soluciones.
- E) tiene dos soluciones.

4. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones en base a la ecuación:

$$x(x-1)^2(2x-3)^3(x^2-\sqrt{3})^2=0$$

- I. tiene 4 raíces o 4 soluciones.
- II. tiene 10 raíces y 5 soluciones.
- III. tiene a $x=0$ como una raíz simple y a $x=3/2$ como raíz triple.

- A) FVV B) FFV C) FFF
D) VFV E) VFF

5. Luego de resolver la ecuación en " x ".

$$\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Establezca el valor de verdad de las proposiciones:

- I. Si $a+b+c=0$ la ecuación tiene infinitas soluciones con $abc \neq 0$.
- II. Si $a+b+c \neq 0$ siempre existe solución y es única.
- III. Siempre la solución es $a+b+c$.

- A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVV E) FFV

6. Señale el valor de " m " si una raíz de la ecuación $x^3+(m-1)x^2+(3m-1)x-19=0$ es 1.

- A) 4 B) -4 C) -5
D) 5 E) 7

7. Si x_0 es una raíz de la ecuación $x^3=x+3$.

Halle el valor de: $\frac{2x_0^3-5}{2x_0+1}$

- A) 1/2 B) 2/3 C) -3/5
D) -4 E) 1

8. Si m, n, p son las raíces de la ecuación:
 $x^3 - 2x^2 + 4x - 2 = 0$. Halle el valor de:

$$\left[\frac{m^{3/2}}{(m-1)} + \frac{n^{3/2}}{n-1} + \frac{p^{3/2}}{p-1} \right]^2$$

- A) 8 B) 4 C) 2
 D) 18 E) 20

9. Las raíces de la ecuación cuadrática:
 $x^2 - ax + b = 0$ verifican el sistema:

$$5x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + 5x_2 = 9$$

Halle el valor de de "a".

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) -2 E) 5

10. Calcule el mayor valor que tiene «m» para que la ecuación:

$$x^2 + m = (m+1)x - 1$$

tenga raíces iguales:

- A) 1 B) 5 C) 3
 D) -1 E) -3

11. Dado la ecuación en "x" $ax^2 + bx + c = 0$ de raíces x_1, x_2
 Halle la relación entre los coeficientes si una raíz es la mitad de la otra.

- A) $ab^2 = 9a^2c$ B) $2b^2 = 9ac$ C) $3b = 2c$
 D) $5b = 7c$ E) $7b = 4a$

12. Siendo $\{a, b\}$ el conjunto solución de la ecuación $2x^2 - x + 3 = 0$

Halle el valor de: $(2a-1)(2b-1) + 8$

- A) 10 B) 12 C) 17
 D) 14 E) 15

13. Si una raíz del polinomio $P(x)$ es 2 tal que
 $P(x) = yx^2 - yx - 6$

Halle el valor de la otra raíz.

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) -1

14. Si $\{u, v\}$ es el conjunto solución de la ecuación: $x^2 + 3x + k = 0$; sabiendo que $u^3 + v^3 = 6k$.

Calcule el valor de k.

- A) 1 B) -1 C) 2
 D) -2 E) 9

15. Dada la ecuación: $4x^3 + 12x^2 - 209x - 627 = 0$.
 Si x_0 es una de sus raíces ($x_0 \neq -3$), calcule

$$\frac{x_0^2}{209}$$

- A) $\frac{1}{12}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$
 D) $-\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{19}$

16. Halle el valor de P si las raíces de:

$$x^2 - (p+3)x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + 1 = 0$$

son $x^1 = mm + 1$, $x^2 = mm$, $m \in \mathbb{R}^+$

- A) $-\frac{2}{3}$ B) 0 C) $\frac{1}{3}$
 C) 1 E) -2

17. Si el polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 - 6x + e$, $a \neq 0$ admite como raíces a:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{p^{10} + 1}{p + 1}, \quad x_3 = \frac{p^{10} + 1}{p^{10} - p}$$

Donde: $p \notin \{-1, 0, 1\}$

Halle el valor de c:

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

18. Si las ecuaciones en "x":
 $3nx^2 - 2nx + 1 = 0, \quad n \neq 0$
 $\frac{x+m+n+pq}{n-m+q} + \frac{x+n+q+m}{n+m+q} = (m+n+p)^q$
 son equivalentes. Halle el valor de n.
 A) 0 B) 3 D) 1
 D) 2 E) AVC
19. Al resolver la ecuación bicuadrada:
 $x^4 - (3n-1)x^2 + n(2n-1) = 0, \quad n < 0$
 Indique cuántas soluciones reales tiene dicha ecuación.
 A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4
20. Si la ecuación en "x"
 $(a^4 - 13a^2)x + a^2 + a = 6 - 36x$
 tiene como conjunto solución a \mathbb{R} ,
 entonces los valores de "a" son:
 A) 2; 3 B) -2; -3 C) 2, -3
 D) 2, -4 E) 3, -4
21. Resuelva la ecuación $x^2 + 6px - 2k = 0$
 Si $3x^2 + (k+a)x + 5 - k = 0$ tiene raíces
 recíprocas y $6x^2 + (2p-1)x + 8 = 0$ tiene
 diferentes raíces simétricas.
 A) 4, -1 B) -4, 1 C) 3, -3
 D) 2; 4 E) -8, 2
22. Luego de resolver $x^2 + 4x + 3 + i = 0$, indique
 la parte imaginaria de una de las soluciones.
 A) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$
 C) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$
 D) $\sqrt{\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$
23. Indique una cuadrática de raíces m y n si
 las ecuaciones:
 $6x^2 + (2m+1)x + 4n + 2 = 0$
 $2x^2 + 5x + 6 = 0$
 son equivalentes
 A) $x^2 - 5x + 6 = 0$
 B) $x^2 - 11x + 28 = 0$
 C) $x^2 - 3x + 4 = 0$
 D) $x^2 - x - 2 = 0$
 E) $x^2 - 5x - 10 = 0$
24. De la ecuación $x^3 + mx^2 - n = 0$,
 $m \in \mathbb{R} \wedge n > 0$, establezca el valor de verdad
 de las siguientes proposiciones:
 I. Si $m > 0$ tiene una sola solución real
 II. Si $m < 0$ tiene las tres soluciones reales y
 positivas
 III. Si $m > 0$ tiene dos soluciones negativas y
 una positiva
 A) VFV B) VFV C) FFV
 D) FVF E) VFF
25. La ecuación fraccionaria
 $\frac{x-1}{2x-1} + \frac{2x+1}{x-1} = a$ se transforma en una
 ecuación lineal. Dé como respuesta la suma
 del valor de a con la solución de la ecuación
 resultante.
 A) $\frac{23}{22}$ B) $\frac{61}{22}$ C) $\frac{65}{22}$
 D) $\frac{47}{22}$ E) $\frac{22}{65}$
26. Calcular el módulo de una de las raíces de
 la ecuación: $(x-2)^2 + \sqrt{7+2\sqrt{10}}x = -4x$
 A) 2 B) 3 C) 4
 D) 1 E) $3/2$

27. Determine la condición que debe cumplir el parámetro real "a" de manera que:

$$x^4 - 2(\lambda - 1)x^2 + \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

Admita al menos una raíz real y otra compleja.

- A) $\lambda < 0$ B) $\lambda < 2$
 C) $0 \leq \lambda < 2$
 D) $\lambda > 2 \wedge \lambda > 3$ E) $-2 < \lambda < 0$

28. Obtener una ecuación bicuadrada en x sabiendo que desde sus raíces son las raíces de la ecuación $z^2 - 4z - 7 = 0$

- A) $x^4 - 8x^2 - 14 = 0$
 B) $x^4 - 4x^2 - 7 = 0$
 C) $x^4 - 8x^2 + 14 = 0$
 D) $x^4 - 24x^2 + 49 = 0$
 E) $x^4 - 30x^2 + 49 = 0$

29. Luego de resolver:

$$\frac{2(x^2 - 6x + 9)}{(x^2 - 5x + 6)(x - 4)(x - 3)} = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{5}{x - 3}$$

enuncie el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

- I. La solución es racional.
 II. La solución es irracional o la solución es una fracción.
 III. La solución es real y la solución es entera.

- A) VVV B) FVF C) FFV
 D) VFV E) VVF

30. Resolver la ecuación $x^4 + mx^3 + 2x + n = 0$ e indique la suma de todas sus raíces sabiendo que admite una raíz triple.

- A) 2 B) -1 C) -2
 D) 1 E) 0

31. Si se sabe que $n \neq p$, resolver la ecuación

$$\frac{x^2 + (a + 2b)x + b^2 + ab + n}{x^2 + (b + 2a)x + a^2 + ab + p} = \frac{x + b}{x + a}$$

- A) $\frac{n+p}{n-p}$ B) $\frac{n-p}{an-bp}$ C) $\frac{b-a}{n-p}$
 D) $\frac{ap-bn}{n-p}$ E) $\frac{bp-an}{n-p}$

32. Al resolver la ecuación

$$\frac{1}{m(x+3)-2n} - \frac{1}{n(x+3)-2m} = \frac{1}{0,75(n-m)(x+5)}$$

indique una de las soluciones obtenidas.

- A) $\frac{3m-n}{9n-11m}$ B) $\frac{9m-11n}{3n-m}$
 C) $\frac{9n-11m}{3n-m}$
 D) $\frac{3n-m}{9m-11n}$ E) $\frac{3n-m}{9n-11m}$

33. Luego de resolver:

$$x - a + b = \frac{a\sqrt{x-a} + b\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}}, a \neq b$$

Señale la suma de sus soluciones.

- A) 6a B) 6b+a C) $\frac{5a-b}{3}$
 D) $\frac{7a-b}{3}$ E) $\frac{4a+b}{3}$

34. Responda con el producto de las soluciones de la ecuación:

$$\frac{1}{5} \frac{(5x+1)^2}{5x+1} + \frac{1}{3} \frac{(3x-1)^2}{3x+1} = \frac{8}{15}$$

- A) 9 B) 1/3 C) 3
 D) 1 E) 0

35. Para la ecuación

$$\sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x^4 - 1}} + \sqrt[3]{x^2 - \sqrt{x^4 - 1}} = x$$

es cierto que:

- A) tiene una sola solución
- B) no tiene solución en \mathbb{R}
- C) la suma de las soluciones es 2
- D) la única solución es 3
- E) $A \vee 0$

36. Indique el denominador de la solución de la ecuación en x :

$$x(\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2}) = bc$$

- A) bc B) \sqrt{bc} C) $\sqrt{b+c}$
- D) $\sqrt{b^2+c^2}$ E) $\sqrt{b^2-c^2}$

37. De el mayor valor de "a" tal que las raíces de la ecuación:

$$x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a = 0$$

están en progresión aritmética

- A) 1 B) $3/2$ C) 2
- D) 3 E) 0

38. Luego de resolver $x^3 + 3x - 2i = 0$

Se obtiene las raíces x_1, x_2, x_3

Calcular $|x_1| + |x_2| + |x_3|$

- A) 3 B) 4 C) 5
- D) $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$ E) $\sqrt{7} + \sqrt{2} + 1$

39. En la ecuación en x : $\frac{a^2}{8} + 4 - x^3 = 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2$

el cuadrado de la única raíz positiva es igual a la diferencia de los cuadrados de las otras raíces.

Encontrar dicha raíz real.

- A) $\sqrt{a} + 3$ B) \sqrt{a} C) $\sqrt{2}$
- D) 2 E) 1

40. Si se sabe que a, b, c son raíces de la ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x + 4 = 0$

Halle otra ecuación cúbica, cuyas raíces sean $a(a+1), b(b+1), c(c+1)$

- A) $x^3 + 2x^2 + 3x + 8 = 0$
- B) $x^3 + 4x + 8 = 0$
- C) $x^3 + 46x + 8 = 0$
- D) $x^3 - 12x - 8 = 0$
- E) $x^3 + 3x + 8 = 0$

41. Dar un valor de "m" para el cual la suma de las cuartas potencias de las raíces de la ecuación $x^2 - mx + 1 = 0$ sea mínima.

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1
- D) -1 E) $-\sqrt{3}$

42. Si las raíces de la ecuación: $x^2 + 2(m+2)x + 5 = 0$ son superiores a la unidad, entonces:

- A) $m \in \langle -\infty, -3 \rangle$
- B) $m \in \langle 1, +\infty \rangle$
- C) $m \in \langle -(\sqrt{5} + 2), \sqrt{5} + 2 \rangle$
- D) $m \in \langle -\infty, \sqrt{5} + 2 \rangle$
- E) $m \in \langle -\infty, \sqrt{5} + 2 \rangle \cup [\sqrt{5} - 2, +\infty)$

43. Para la ecuación $x^6 - x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$ es cierto que:

- A) tiene 4 raíces reales
- B) tiene 6 raíces reales
- C) tiene 4 raíces no reales
- D) tiene al menos 2 raíces positivos
- E) tiene 2 raíces reales negativos

44. Para que valores de "k" la diferencia de raíces de la ecuación en "x"

$$4x^2 - 10(2k+1)x + 14K + 5 = 0$$

es mínima

- A) 0 B) 1 C) $-\frac{11}{50}$
D) $-\frac{44}{60}$ E) $\frac{11}{100}$

45. De la ecuación $x^4 + px^2 + q = 0$ es verdadero o falso que:

- I. Si $p > 0 \rightarrow$ posee 4 raíces reales
II. Si $p > 0 \wedge q < 0 \rightarrow$ siempre tendrá 2 raíces reales
III. Si $p^2 = 4q \Rightarrow$ tendrá 4 raíces reales

- A) VVV B) VVF C) FVF
D) VFF E) FFF

46. Si la ecuación fraccionaria:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2 - 3x + 11}{x^2 + 3x + 11}$$

se transforma en una ecuación polinomial. Halle la suma de productos binarios de las raíces de la ecuación transformada.

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

47. Dar un valor de "m" para el cual la suma de las cuartas potencias de las raíces de la ecuación

$$x^2 - mx + 1 = 0 \text{ sea mínimo}$$

- A) $\sqrt{2}$ B) 1 C) $\sqrt{3}$
D) -1 E)

48. Resolver la ecuación bicuadrada en x
 $x^4 + (b-a)(x^3+1) + (x+1)^3 + c(x-3) - 1 = 0$ y señale el producto de dos de sus raíces.

- A) 5i B) $\sqrt{5}i$ C) -10i
D) $\sqrt{10}i$ E) $\sqrt{8}i$

49. Sabiendo que las ecuaciones:

$$x^2 + mx + 2n = 0$$

$$x^2 + nx + 2m = 0$$

poseen una raíz en común, halle otra ecuación cuadrática cuyas raíces sean las no comunes de las anteriores

- A) $x^2 + (m+n)x + mn = 0$
B) $x^2 - (m+n)x + mn = 0$
C) $x^2 + 2mx + n = 0$
D) $x^2 + 2nx + m = 0$
E) $x^2 - 2(m+n)x + 9mn = 0$

50. Siendo $a+b+c=0$, halle una raíz de
 $a(a+2b)x^2 + b(b+2c)x + c(c+2a) = 0$

- A) $\frac{c-a}{b-c}$ B) $\frac{a-b}{b-c}$ C) $\frac{b(c-a)}{a(b-c)}$
D) $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$ E) $\frac{a-b}{c-a}$

51. Resuelva la ecuación en "x"

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{b} + \sqrt{x-a}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \{a, b\} \subset \mathbb{R}^+$$

- A) a-b B) 2a-b C) a+b
D) 2b-a E) 2(a+b)

52. De la ecuación: $3x^3 - 4x^2 + 13x + 2 = 0$
Es cierto que:

- A) tiene 3 raíces reales y positivas
B) tiene 2 raíces positivas y 1 raíz negativa
C) tiene 2 raíces negativas y 1 raíz positiva
D) 1 sola raíz real y negativa
E) 1 sola raíz real y positiva

53. Si la suma de las dos raíces positivas de

$$4x^4 - (4m+1)x^2 + m = 0 \quad \text{es} \quad 1 + \frac{1}{p} \quad \text{y}$$

$2px^2 - 4px + 5p = 3x^2 + x - 8$ tiene el producto de sus raíces igual a dos veces su suma. Halle $p+m$.

- A) 3 B) 7 C) 11
D) 15 E) 19

54. Para qué valores de "m" la ecuación:

$$(2\sqrt{x})^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 + 3\left(1 + \frac{3}{m}\right) = 0$$

tiene 2 soluciones iguales

- A) $1 \vee -3/5$ B) $2 \vee -3$
C) 4
D) $1 \vee 2$ E) $-\frac{3}{5}, -3$

55. Dada la ecuación: $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ cuyo conjunto solución es:

$$\left\{1 + \frac{1}{3k+1}, 1 + \frac{1}{3k+4}\right\}$$

Halle: $\frac{(3k+1)(3k+4)(a_0 + a_1 + a_2)}{a_2}$

- A) 1 B) -1 C) $\frac{2}{a_1}$
D) -2 E) $\frac{a_1}{a_2}$

56. Dado el polinomio:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, a_0 \neq 0$$

Si $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ Además $P(1) = 1$

Halle: $(a_0+1)^2 + (a_1+1)^2 + \dots + (a_n+1)^2$

- A) n B) n+2 C) n+3
D) 2n+4 E) n+4

57. Dado el polinomio

$$P(x) = x^4 - (ab+ac+bc)x^3 + (ab+ac+bc)x - 2abc(a+b+c)$$

Halle $\frac{P(ab+ac+bc)}{(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2}$

- A) 1 B) 2 C) -2
D) -1 E) 0

58. Calcule el módulo de una de las raíces de la ecuación

$$(x-2)^2 + \sqrt{7+2\sqrt{10}}x = -4x$$

- A) 3 B) 2 C) 1
D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

59. Resolver la ecuación en "x"

$$\frac{x^3 + 6x}{3x^2 + 2} = \frac{3\sqrt{2}(1 + \sqrt[3]{3})}{3\sqrt[3]{9} + 1} \quad \text{en } \mathbb{R}$$

- A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt[3]{6}$ C) $\sqrt[12]{12}$
D) $\sqrt[6]{12}$ E) $\sqrt[6]{72}$

60. Si $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 1$

Halle el valor de:

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$

- A) 61 B) 32 C) 21
D) 10 E) 6

1	E	16	A	31	E	46	D
2	A	17	C	32	B	47	A
3	C	18	B	33	D	48	E
4	B	19	A	34	E	49	B
5	C	20	C	35	C	50	D
6	D	21	B	36	D	51	C
7	E	22	C	37	D	52	B
8	D	23	D	38	C	53	A
9	A	24	E	39	C	54	A
10	C	25	C	40	C	55	A
11	B	26	A	41	C	56	C
12	D	27	C	42	A	57	A
13	E	28	E	43	C	58	B
14	E	29	E	44	C	59	E
15	C	30	A	45	E	60	E