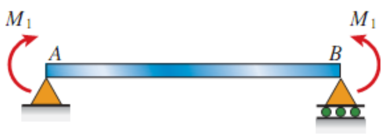
Flexion

5.1. INTRODUCTION

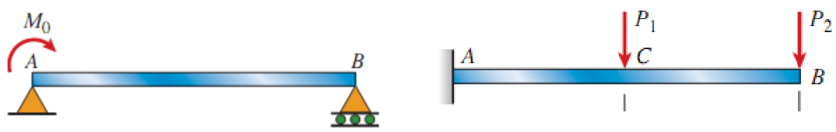
Une flexion est un mode de déformation dû :

- à l'action de forces perpendiculaires à l'axe longitudinal de la poutre.
- à un moment appliqué dans le plan de l'axe longitudinal de la poutre.

Si les efforts tranchants et les efforts normaux n'existent pas, la flexion est dite pure.
Si les efforts existent en même temps que les moments, la flexion est dite simple.



Flexion pure



Flexion Simple

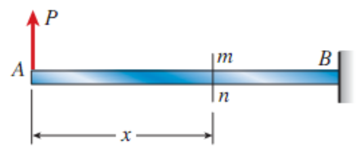
5.2. EFFORT TRANCHANT ET MOMENT FLECHISSANT

Lorsqu'une poutre est sollicitée par des forces ou des couples, il apparait des contraintes internes dans la poutre, ce sont en général, des contraintes normales et de cisaillement. Pour calculer la grandeur de ces contraintes, il est nécessaire de connaitre les forces et les moments internes agissant dans la poutre. Ces éléments sont déterminés généralement à partir des équations de l'équilibre statique.

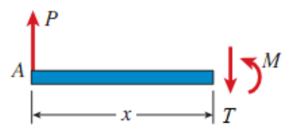
Pour la poutre encastrée ci-contre, les résultantes des forces et des moments au niveau de la section *mn* se réduisent à une force T appelée effort tranchant et à un moment M appelé moment fléchissant. L'équilibre statique autour de la section *mn* s'écrit comme suit :

$$T = P$$

$$M = Px$$



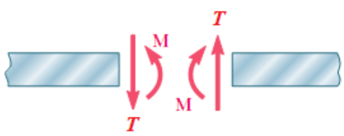
(a)



(b)

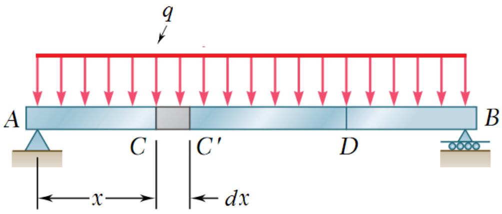
<u>*Convention de signe*</u> :

Afin d'assurer la compatibilité entre les signes des efforts et des moments calculés à droite et à gauche d'une section, la convention de signe suivante est utilisée :



5.3. RELATION ENTRE CHARGE REPARTIE, EFFORT TRANCHANT ET MOMENT FLECHISSANT

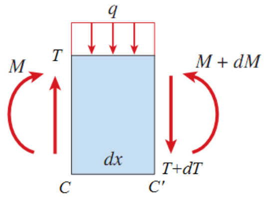
Soit un élément dx d'une poutre en flexion soumis à une charge uniformément repartie. L'élément est en équilibre si :



- $T = qdx + T + dT$

ou bien $q = -\dfrac{dT}{dx}$

- $\sum M_{/C} = M + qdx\dfrac{dx}{2} + (T + dT)dx - (M + dM) = 0$



Négligeant le terme dx^2 devant dx, on obtient :

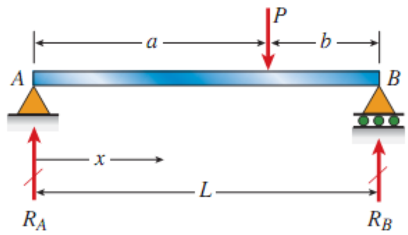
$$T = \frac{dM}{dx}$$

5.4. DIAGRAMMES DE L'EFFORT TRANCHANT ET DU MOMENT FLECHISSANT

Il est possible à partir des équations de T et M de tracer leurs variations le long de la poutre, ceci permet de rendre l'interprétation des résultats très aisés.

Soit la poutre représentée par la figure ci-contre.

Les réactions aux appuis A et B sont :

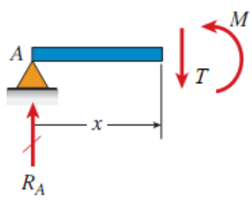


$$R_A = \frac{Pb}{L} \qquad R_B = \frac{Pa}{L}$$

Les équations de T et M sont :

- Pour la section limitée par l'intervalle [$0 \quad a$]

$$T = R_A = \frac{Pb}{L} \qquad M = R_A x = \frac{Pbx}{L} \qquad (0 < x < a)$$



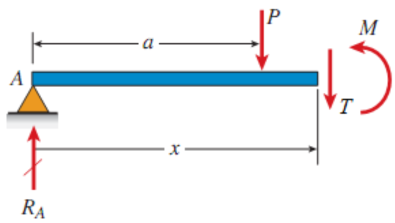
(b)

- Pour la section limitée par l'intervalle [$a \quad L$]

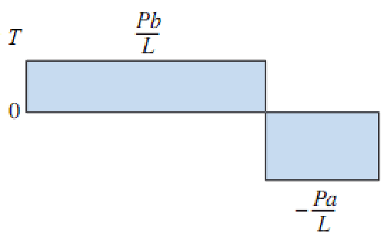
$$T = R_A - P = \frac{Pb}{L} - P = -\frac{Pa}{L} \qquad (a < x < L)$$

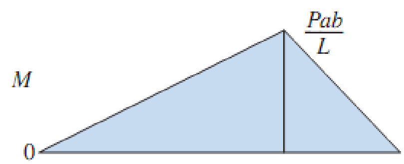
$$M = R_A x - P(x - a) = \frac{Pbx}{L} - P(x - a)$$

$$= \frac{Pa}{L}(L - x) \qquad (a < x < L)$$



Les courbes représentatives de T et M sont les suivantes :

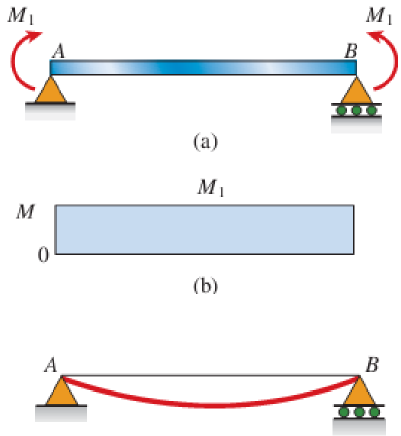




5.5. CONTRAINTES DANS UNE POUTRE EN FLEXION PURE

Une poutre est en flexion pure lorsque l'ensemble des efforts internes se réduit à un moment de flexion constant est un effort tranchant nul (T=0 et M=Constant).

Considérons une poutre sur appuis sous l'action de deux moments égaux et de sens opposés, agissant sur les deux extrémités de la poutre. La poutre est en flexion pure car T=0 et M constant.



Sous l'effet de ce chargement la poutre se déforme suivant un arc de cercle. La forme fléchie de la poutre montre que les fibres situées sur la surface latérale supérieure se rétrécissent alors que les fibres situées sur la surface inferieure s'allongent. Ces changements de longueur produisent des contraintes dans les fibres, celles qui s'allongent subissent des contraintes de tension agissant dans la direction longitudinale de la poutre, les fibres qui se contractent subissent des contraintes de compression.

Il est évident qu'il existe entre ces deux surfaces une surface contenant des fibres qui ne sont ni tendues ni comprimées (fibres neutres ou moyennes), cette surface est appelée surface neutre (moyenne). Sur cette surface, la contrainte de compression (ou de traction) est nulle. L'intersection de la surface neutre avec la section droite de la poutre définie l'axe neutre.

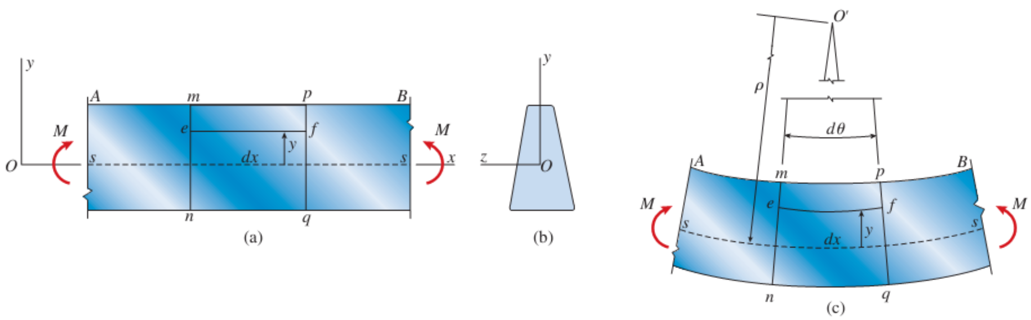
Considérons un élément *mnqp* de la poutre de longueur *dx*, soit ρ le rayon de courbure de la ligne déformée et *dθ* l'angle que fait *Om* avec *Oq*.

La déformation linéaire d'une fibre *ef* distante de y de la ligne moyenne mesurée par rapport à la longueur initiale *dx* est :

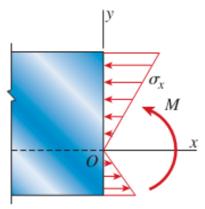
$$\varepsilon_{ef} = \frac{\delta_{ef}}{dx} = \frac{(\rho - y)d\theta - dx}{dx} = \frac{(\rho - y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{y}{\rho}$$

Le signe (-) indique que la fibre subit une compression. La contrainte enveloppée sur cette fibre s'exprime par la loi de Hooke comme suit :

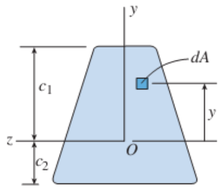
$$\sigma_x = E\varepsilon_{ef} = -E\frac{y}{\rho}$$



La contrainte donc est une fonction linéaire de y, elle est extrême sur les fibres latérales et nulle sur la fibre moyenne.



Si dA est une surface élémentaire de la section droite de la poutre, située à une distance y de l'axe neutre, l'effort normale développé sur dA est :



$$dN_x = \sigma_x dA$$

Le moment de cet effort par rapport à l'axe neutre est :

$$dM = y.dN_x = y\sigma_x dA$$

L'effort normal total développé sur la section est donc :

$$N_x = \int_A dN_x = \int_A \sigma_x dA$$

De même pour le moment total :

$$M = \int_A dM = \int_A y\sigma_x dA$$

Tenons compte de l'expression de σ_x, on peut écrire :

$$N_x = \frac{E}{\rho}\int_A ydA \qquad \text{et} \qquad M = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA$$

Par hypothèse, l'effort normal est nul, c.à.d. :

$$N_x = \frac{E}{\rho}\int_A ydA = 0 \qquad \text{ou bien} \quad \int_A ydA = 0$$

La dernière intégrale représente le moment statique de A par rapport à l'axe neutre, sa valeur nulle implique que l'axe neutre est un axe central, autrement dit l'axe neutre passe toujours par le centre de gravité de la section.

L'expression du moment s'écrit :

$$M = \frac{E}{\rho} I_{AN}$$

avec : $I_{AN} = \int_A y^2 dA$, le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre.

et comme $\rho = \frac{Ey}{\sigma_x}$ alors $M = \frac{\sigma_x I_{AN}}{y}$

on obtient finalement :

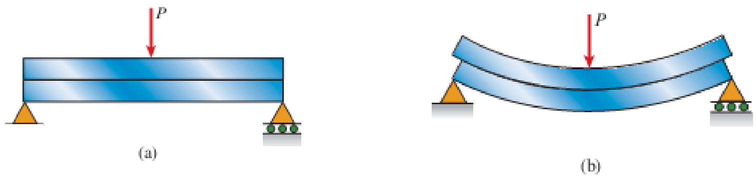
$$\sigma_x = \frac{M}{I_{AN}} y$$

Pour une section rectangulaire d'épaisseur h, les contraintes extrémales sont :

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_{AN}}\frac{h}{2} \quad \text{et} \quad \sigma_{\min} = \frac{M}{I_{AN}}\left(-\frac{h}{2}\right)$$

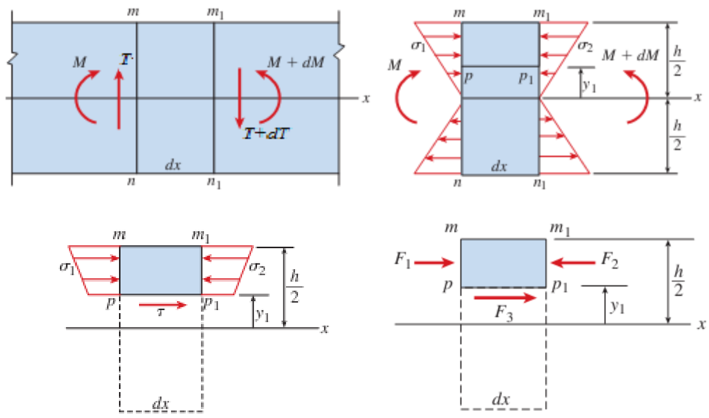
5.6. CONTRAINTES DANS UNE POUTRE EN FLEXION SIMPLE

En flexion simple, l'effort tranchant n'est pas nul, en plus de la contrainte normale, il apparait des contraintes tangentielles verticales et horizontales.



Considérons un élément *mnn₁p₁* de la poutre de dimensions dx. On suppose que la poutre à une section rectangulaire. Soit M le moment fléchissant sur la section mn, sur la section n_1p_1 la valeur du moment est M+dM

Soit mpp_1m_1 élément situé à une distance y de la ligne moyenne. La force agissant sur un élément dA de la face mp est :



$$dF_1 = \sigma_x dA = \frac{My}{I_{AN}} dA$$

La somme de toutes ces forces sur cette face est obtenue par intégration :

$$F_1 = \int_A \frac{My}{I_{AN}} dA = \frac{M}{I_{AN}} \int_A y dA = \frac{M}{I_{AN}} S_{AN}$$

De même, sur la face m_1p_1 la force normale est donnée par :

$$F_2 = \frac{M + dM}{I_{AN}} S_{AN}$$

L'équilibre de cet élément exige la présence d'une force horizontale F_3 agissant sur la face pp_1 provenant du glissement interfacial et égal à $\tau.dx.b$ où b est la largeur de la poutre.

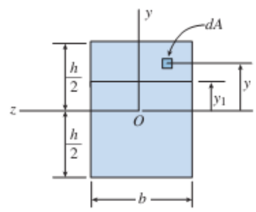
Cet équilibre conduit à écrire : $F_1 + F_2 + F_3 = 0$

On obtient :

$$\tau.b.dx = \frac{dM}{I_{AN}} S_{AN} \Rightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_{AN}}{I_{AN} b} = T \frac{S_{AN}}{I_{AN} b}$$

Ou bien :

$$\tau = \frac{T}{I_{AN} b} \int_A y dA$$



Pour une poutre de section rectangulaire, la contrainte de cisaillement sur une surface située à une distance y_1 de l'axe neutre est :

$$\tau = \frac{T}{I_{AN} b} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) . \frac{b}{2} = \frac{T}{2 I_{AN}} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

La contrainte est maximale sur l'axe neutre et nulle sur les fibres extrêmes.