

**Exercice 1 :** Considérons une poutre plane articulée – appuyée représentée à la figure 1. Nous supposons que le point A est l'origine du repère globale auquel est rapportée la poutre. La poutre est soumise à une charge ponctuelle au point C milieu de  $AB = L$ .

- 1- Calculer les composantes des efforts de liaison (réactions d'appuis) en A et en B.
- 2- Calculer les efforts intérieurs en considérant les deux tronçons  $[AC]$  et  $[CB]$ .
- 3- Représenter graphiquement ces efforts en fonction de l'abscisse  $x$ .

**Exercice 2 :** Une poutre encastree en son extrémité A est soumise sur toute sa longueur  $L$  à l'action d'une charge uniformément répartie de densité linéique  $\bar{p}$  (voir figure 2). On donne le module d'Young longitudinal  $E$  du matériau de base de la poutre et le moment quadratique  $I_z$  de sa section droite.

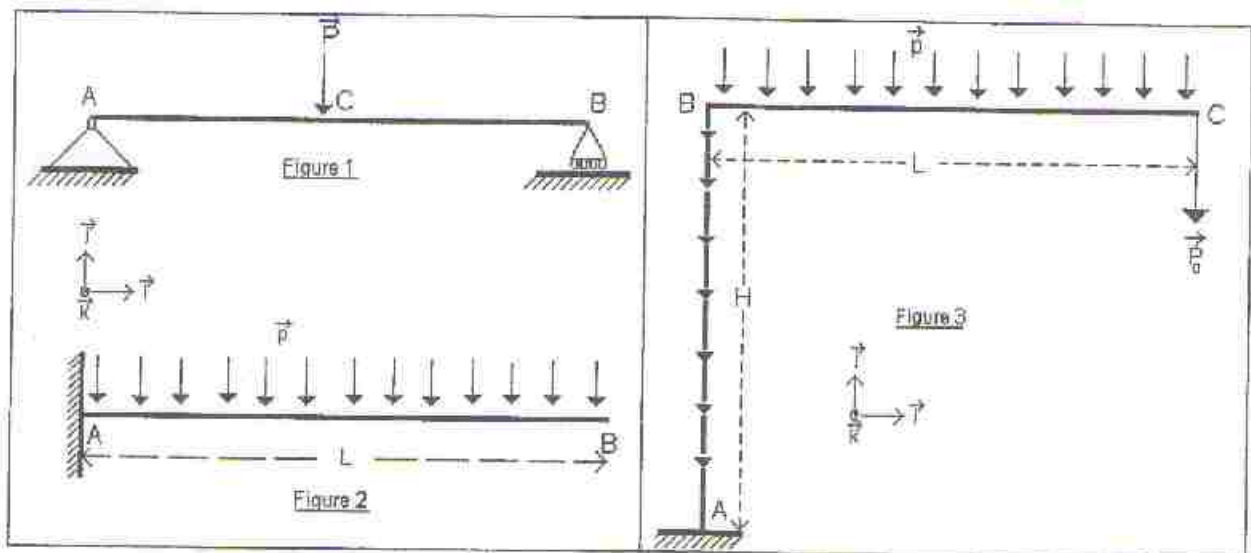
- 1- Calculer les composantes de l'effort et du moment de liaison en A.
- 2- Calculer les efforts intérieurs qui s'exercent sur la poutre.
- 3- En déduire l'équation de la déformée.
- 4- Calculer la flèche et l'angle de rotation en B.

**Exercice 3 :** On considère la structure de la figure 3 qui est représentative d'une grue. Elle est encastree en A, soumise à son propre poids et au poids  $\bar{P}_0$  d'une masse qui est accrochée au point C. On donne :

- Le poids linéique  $\bar{p}$  de la poutre.
- $AB = H$ ,  $BC = L$  et A est l'origine du repère global auquel est rapportée la structure.

- 1- Calculer les composantes  $X_A$  et  $Y_A$  de l'effort et  $M_A$  du moment de liaison en A.
- 2- Calculer les efforts intérieurs (de cohésion) qui s'exercent sur la structure.
- 3- Ecrire et vérifier les équations d'équilibre local de la structure étudiée. Ces équations sont données par :

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T_y}{R} + p_x = 0, \quad \frac{dT_y}{ds} + \frac{N}{R} + p_y = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dM_z}{ds} + T_y + m_z = 0$$



Barème : Exercice 1 : 06 Pts Exercice 2 : 07 Pts Exercice 3 : 07 pts

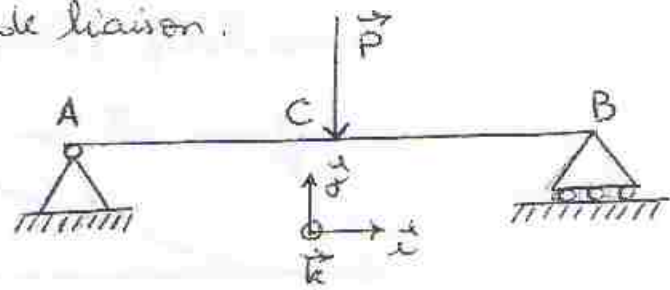
Exercice 1:

1<sup>o</sup> Calcul des composantes des efforts de liaison.

$$\{\vec{z}_A^L\} = \begin{Bmatrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\vec{z}_B^L\} = \begin{Bmatrix} Y_B \vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix}_B$$

$$\{\vec{z}_C^C\} = \begin{Bmatrix} -P \vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix}_C$$



Principe fondamental de la statique écrit au point A = origine du repère global:

$$\begin{Bmatrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} Y_B \vec{j} \\ \vec{AB} \wedge Y_B \vec{j} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -P \vec{j} \\ \vec{AC} \wedge (-P \vec{j}) \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{AB} = L \vec{i} \quad \vec{AC} = \frac{L}{2} \vec{i} \quad \text{d'où:}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} Y_B \vec{j} \\ L Y_B \vec{k} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -P \vec{j} \\ -\frac{PL}{2} \vec{k} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ce qui donne:

$$X_A = 0$$

$$Y_A + Y_B - P = 0$$

$$L Y_B - \frac{PL}{2} = 0$$

$\Rightarrow$

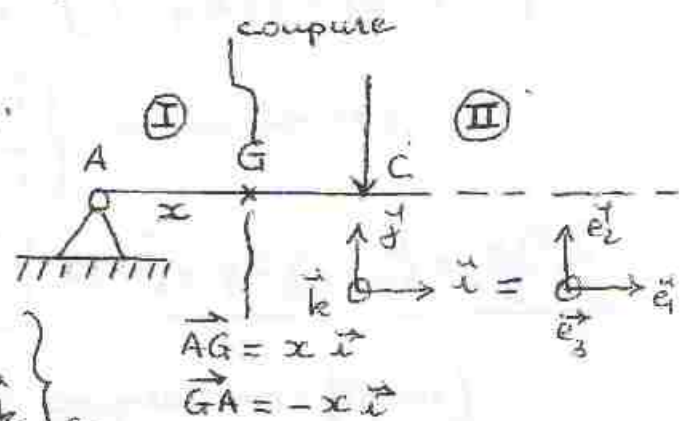
$X_A = 0$
$Y_B = \frac{P}{2}$
$Y_A = \frac{P}{2}$

$$\vec{R}_A = \frac{P}{2} \vec{j} \quad R_B = \frac{P}{2} \vec{j}$$

2<sup>o</sup> Efforts intérieurs (de cohésion).

Tronçon AC:

$$\begin{aligned} \{\vec{z}_{int}\} &= -\{\vec{z}_{ext \rightarrow I}\} = -\{\vec{z}_A\}_G \\ &= -\begin{Bmatrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ \vec{GA} \wedge (X_A \vec{i} + Y_A \vec{j}) \end{Bmatrix}_G = -\begin{Bmatrix} \frac{P}{2} \vec{j} \\ -x \frac{P}{2} \vec{k} \end{Bmatrix}_G \end{aligned}$$



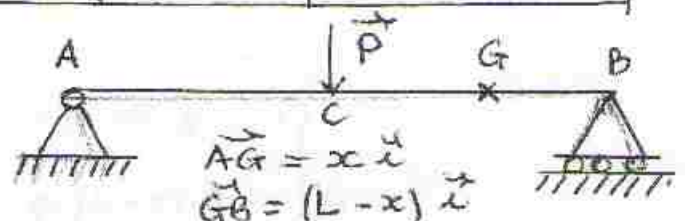
$$\{\vec{z}_{int}\} = \begin{Bmatrix} -\frac{P}{2} \vec{e}_2 \\ +\frac{P}{2} x \vec{e}_3 \end{Bmatrix}_G$$

d'où:

$N = 0$	$T_y = -\frac{P}{2}$	$M_z = +\frac{P}{2} x$
---------	----------------------	------------------------

Tronçon CB

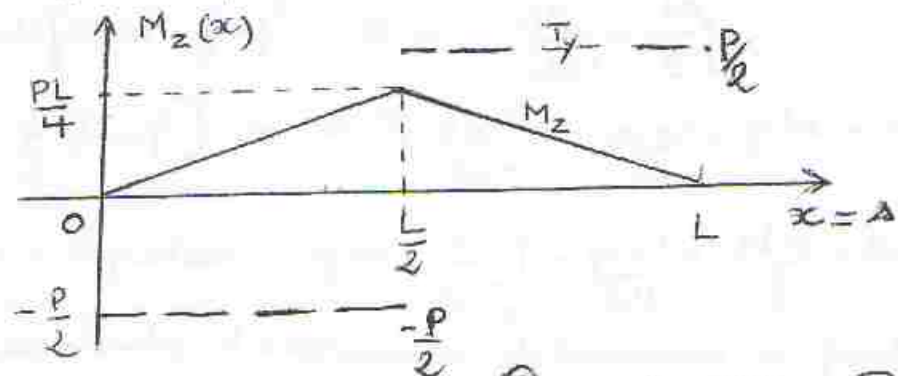
$$\{\vec{z}_{int}\} = \{\vec{z}_{ext \rightarrow II}\} = \{\vec{z}_B\}_G$$



$$\{\vec{T}_{int}\} = \left\{ \begin{matrix} Y_B \vec{j} \\ \vec{G}B \wedge Y_B \vec{j} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} \frac{P}{2} \vec{j} \\ \frac{P}{2}(L-x) \vec{k} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} \frac{P}{2} \vec{j} \\ \frac{P}{2}(L-x) \vec{e}_3 \end{matrix} \right\}_G$$

d'où:  $N=0$   $T_y = \frac{P}{2}$   $M_z = \frac{P}{2}(L-x)$

3°. Représentation graphique du moment fléchissant.



### Exercice 2:

1° Composantes des efforts de liaison

$$\{\vec{T}_A^L\} = \left\{ \begin{matrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ M_A \vec{k} \end{matrix} \right\}_A$$

$$d\{\vec{T}_G^c\} = \left\{ \begin{matrix} -p dx \vec{j} \\ 0 \end{matrix} \right\}_G$$

en A,  $d\{\vec{T}_G^c\}_A = \left\{ \begin{matrix} -p dx \vec{j} \\ \vec{AG} \wedge (-p dx \vec{j}) \end{matrix} \right\}_A$

$$\vec{AG} = x \vec{i}$$

Le PFS en A s'écrit:  $\left\{ \begin{matrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ M_A \vec{k} \end{matrix} \right\}_A + \int_0^L \left\{ \begin{matrix} -p dx \vec{j} \\ -p x dx \vec{k} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ u \\ 0 \end{matrix} \right\}$

soit:  $\left\{ \begin{matrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ M_A \vec{k} \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} -pL \vec{j} \\ -\frac{pL^2}{2} \vec{k} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ u \\ 0 \end{matrix} \right\}$  ce qui donne:

$X_A = 0$	$Y_A = pL$	$M_A = \frac{pL^2}{2}$
-----------	------------	------------------------

où  $\vec{R}_A = pL \vec{j}$   $\vec{M}_A = \frac{pL^2}{2} \vec{k}$

2° Efforts intérieurs (de cohésion) (voir coupe sur figure).

$$\{\vec{T}_{int}\} = \{\vec{T}_{ext \rightarrow II}\} = \int_x^L d\{\vec{T}_D^c\}_G$$

$$d\{\vec{T}_D^c\} = \left\{ \begin{matrix} -p du \vec{j} \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

et  $d\{\vec{T}_D^c\}_G = \left\{ \begin{matrix} -p du \vec{j} \\ \vec{GD} \wedge (-p du \vec{j}) \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -p du \vec{j} \\ -p(u-x) du \vec{k} \end{matrix} \right\}_G$

$$\vec{GD} = (u-x) \vec{i}$$

(2)



$$\{\vec{z}_{int}\} = \int_x \left\{ \begin{matrix} -p(l-x) \\ -p(l-x) \end{matrix} \right\} \vec{k} = \left\{ \begin{matrix} 1-l-x \\ -\frac{p}{2}(l-x)^2 \end{matrix} \right\} \vec{k} = \left\{ \begin{matrix} -1(l-x) \\ -\frac{p}{2}(l-x)^2 \end{matrix} \right\} \vec{e}_3$$

On obtient:

$N=0$	$T_y = -p(l-x)$	$M_z = -\frac{p}{2}(l-x)^2$
-------	-----------------	-----------------------------

③ Equation de la déformée  $y(x)$ ? On a:  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}$

soit  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI_z} \left[ -\frac{p}{2}(l-x)^2 \right] \Rightarrow EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{p}{2}x^2 + plx - \frac{pl^2}{2}$

Après une double intégration:  $y(x) = \frac{1}{EI_z} \left[ -\frac{px^4}{24} + \frac{plx^3}{6} - \frac{pl^2x^2}{4} + C_1x + C_2 \right]$

$C_1$  et  $C_2$  sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions aux limites: en A  $y=0$  et  $\frac{dy}{dx}=0$  d'où:

$C_2=0$  et  $C_1=0$

En définitif:  $y(x) = \frac{1}{EI_z} \left[ -\frac{px^4}{24} + \frac{plx^3}{6} - \frac{pl^2x^2}{4} \right]$

$y(x) = -\frac{px^2}{24EI_z} [x^2 - 4lx + 6l^2]$

④ La flèche en B:  $x=L$   $y_B = -\frac{pl^4}{8EI_z}$

L'angle de rotation en B:  $\theta_B = \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=L} = -\frac{pl^3}{6EI_z}$

### Exercice 3:

(12) Composantes des efforts de liaison  
abscisse curviligne  $s$ :

segment AB:  $s = y$

segment BC:  $s = H + x$

$$\{\vec{Z}_A^L\} = \begin{Bmatrix} - \\ - \\ - \end{Bmatrix}$$

$$d\{\vec{Z}_G^C\} = \begin{Bmatrix} -p ds \vec{j} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

$$\{\vec{Z}_C^C\} = \begin{Bmatrix} -P_0 \vec{j} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_C$$

On applique le PFS en A.

$$d\{\vec{Z}_G^C\}_A = \begin{Bmatrix} -p ds \vec{j} \\ \vec{AG} \wedge (-p ds) \vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix}_A =$$

segment AB:  $\vec{AG} = y \vec{j}$   $d\{\vec{Z}_G^C\}_A = \begin{Bmatrix} -p dy \vec{j} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_A$

segment BC:  $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG} = H \vec{j} + x \vec{i}$   $d\{\vec{Z}_G^C\}_A = \begin{Bmatrix} -p dx \vec{j} \\ -p x dx \vec{k} \\ 0 \end{Bmatrix}_A$

$$\{\vec{Z}_C^C\}_A = \begin{Bmatrix} -P_0 \vec{j} \\ \vec{AC} \wedge (-P_0 \vec{j}) \\ 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -P_0 \vec{j} \\ -P_0 L \vec{k} \\ 0 \end{Bmatrix}_A$$

Le PFS s'écrit alors par:

$$\begin{Bmatrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ M_A \vec{k} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -P_0 \vec{j} \\ -P_0 L \vec{k} \end{Bmatrix}_A + \int_0^H \begin{Bmatrix} -p dy \vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix}_A + \int_0^L \begin{Bmatrix} -p dx \vec{j} \\ -p x dx \vec{k} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ M_A \vec{k} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -P_0 \vec{j} \\ -P_0 L \vec{k} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -pH \vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -pL \vec{j} \\ -p \frac{L^2}{2} \vec{k} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

d'où les équations:

$$X_A = 0$$

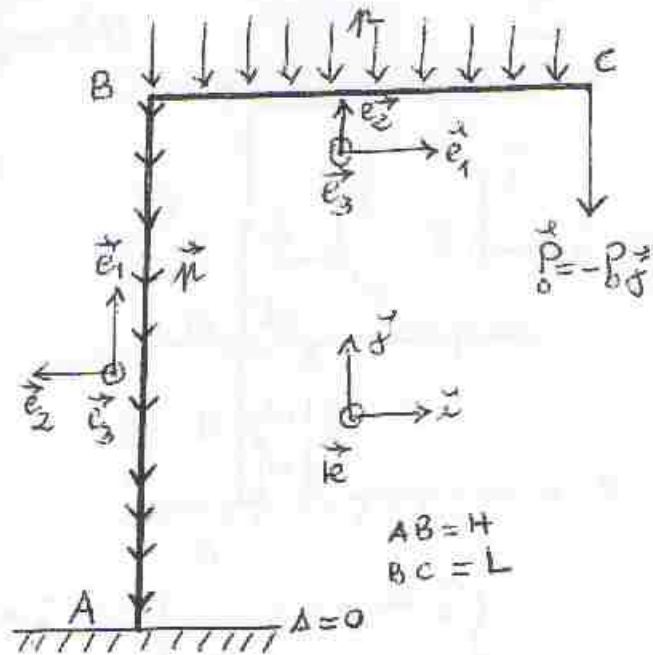
$$Y_A - p(H+L) - P_0 = 0 \Rightarrow$$

$$M_A - p \frac{L^2}{2} - P_0 L = 0$$

$X_A = 0$
$Y_A = p(H+L) + P_0$
$M_A = p \frac{L^2}{2} + P_0 L$

La réaction d'appui en A:  $\vec{R}_A = [p(H+L) + P_0] \vec{j}$

Son moment est:  $\vec{M}_A = (p \frac{L^2}{2} + P_0 L) \vec{k}$



(2) Les efforts intérieurs (de cohésion): Tracéon AB

$$\left\{ \tilde{c}_{int}^I \right\}_G = - \left\{ \tilde{c}_{ext \rightarrow I} \right\} = - \left\{ \tilde{c}_A^L \right\}_G - \int_{AG} d \left\{ \tilde{c}_D^C \right\}_G$$

$$\left\{ \begin{matrix} \vec{L} \\ \vec{z}_A \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} X_A \vec{z} + Y_A \vec{\delta} \\ M_A \vec{k} + \vec{GA} \wedge (X_A \vec{z} + Y_A \vec{\delta}) \end{matrix} \right\}_G$$

$$\vec{G}_A = -y \vec{j} \quad \vec{G}_A \wedge (x_A \vec{i} + y_A \vec{j}) = y x_A \vec{k}$$

$$\left\{ \bar{z}_A^L \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} x_A \bar{z}^1 + y_A \bar{z}^2 \\ (M_A + y x_A) \bar{k} \end{array} \right\}_G$$

$$d\left\{\vec{z}_0^c\right\} = \left\{\begin{matrix} -n du \vec{f} \\ 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow d\left\{\vec{z}_0^c\right\}_G = \left\{\begin{matrix} -n du \vec{f} \\ \vec{G} \wedge (-n du \vec{f}) \end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} -n du \vec{f} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$$

$$\vec{G}_D = -(y-u) \vec{j}$$

$$\text{Ainsi: } \left\{ \vec{z}_{\text{int}} \right\}_G = - \left\{ \begin{matrix} x_A \vec{i} + y_A \vec{j} \\ (M_A + y x_A) \vec{k} \end{matrix} \right\}_G - \int_0^y \left\{ \begin{matrix} -p \, du \\ 0 \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -x_A \vec{i} - y_A \vec{j} + p y \vec{j} \\ -(M_A + y x_A) \vec{k} \end{matrix} \right\}_G$$

sur le segment AB.  $\vec{i} = -\vec{e}_2$   $\vec{j} = \vec{e}_1$   $\vec{k} = \vec{e}_3$

$$\text{d'ou: } \left\{ \tilde{z}_{int} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} (m_y - y_A) \tilde{e}_1 + x_A \tilde{e}_2 \\ - (M_A + y x_A) \tilde{e}_3 \end{array} \right\}_G$$

$$\begin{aligned} \text{Solut: } N &= p_y - Y_A = p_y - p(H+L) - P_0 \\ T_y &= X_A = 0 \\ M_z &= -(M_A + y X_A) = -\left(p \frac{L^2}{2} + P_0 L\right) \end{aligned}$$

Trigon BC:

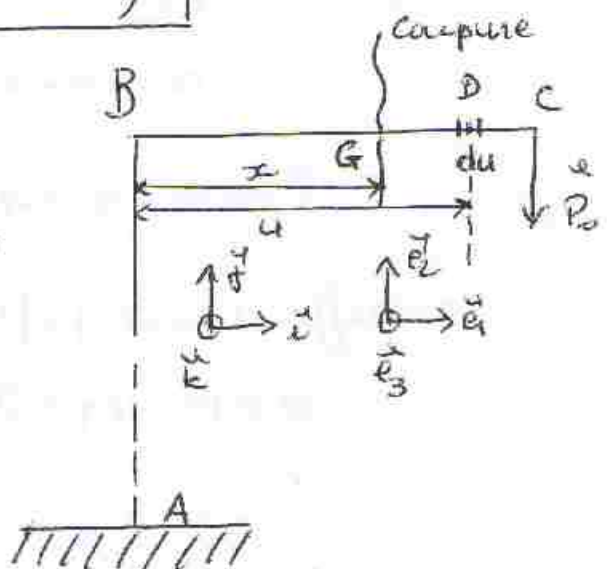
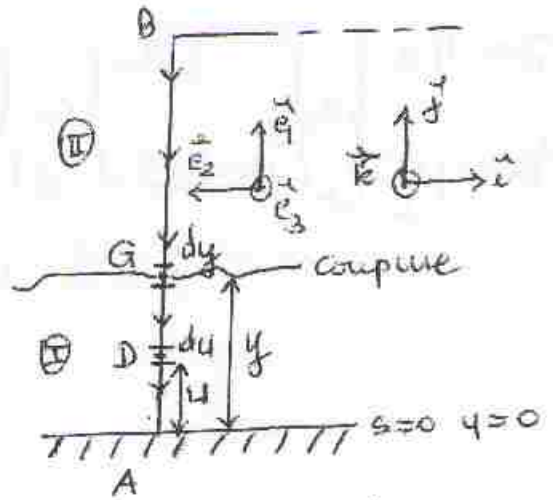
$$\left\{ \tilde{Z}_{int}^c \right\}_G = \left\{ \tilde{Z}_{ext \rightarrow \square}^c \right\} = \left\{ \tilde{Z}_c^c \right\}_G + \int_{GC} d \left\{ \tilde{Z}_g^c \right\}_G$$

$$\left\{ \vec{z}_c \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -P_0 \vec{f} \\ \vec{G}_C \wedge (-P_0 \vec{f}) \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -P_0 \vec{f} \\ -P_0 (L - x) \vec{h} \end{matrix} \right\}_G$$

$$G_C = (L - x) \frac{w}{l}$$

$$d\{\vec{z}^c\}_G = \left\{ \begin{array}{l} -p du \vec{j} \\ \vec{G} \wedge (-p du \vec{j}) \end{array} \right\}_G$$

$$GD = (u-x) \hat{x}$$





$$d\left\{\vec{z}_0^c\right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} -p \, du \, \vec{j} \\ -p(u-x) \, du \, \vec{k} \end{array} \right\}_G \quad d'où :$$

$$\left\{\vec{z}_{int}\right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} -P_0 \vec{j} \\ -P_0(L-x) \vec{k} \end{array} \right\}_G + \int_x^L \left\{ \begin{array}{l} -p \, du \, \vec{j} \\ -p(u-x) \, du \, \vec{k} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} -P_0 \vec{j} \\ -P_0(L-x) \vec{k} \end{array} \right\}_G + \left\{ \begin{array}{l} -p(L-x) \vec{j} \\ -\frac{p}{2}(L-x)^2 \vec{k} \end{array} \right\}_G$$

sur le segment BC  $\vec{i} = \vec{e}_1$   $\vec{j} = \vec{e}_2$  et  $\vec{k} = \vec{e}_3$

$$d'où \left\{\vec{z}_{int}\right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} -(P_0 + p(L-x)) \vec{e}_2 \\ -[P_0(L-x) + \frac{p}{2}(L-x)^2] \vec{k} \end{array} \right\}_G$$

Par identification :

$N = 0$	$T_y = -(P_0 + p(L-x))$
$M_z = -P_0(L-x) - \frac{p}{2}(L-x)^2$	

(3°) Equations d'équilibre local.

Segment AB :  $s = y$   $R \rightarrow +\infty$   $p_x = -p$   $p_y = 0$   $m_z = 0$

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T_y}{R} + p_x = \frac{d}{dy}(p_y - p(H+L) - P_0) - p = p - p = 0$$

$$\frac{dT_y}{ds} + \frac{N}{R} + p_y = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\frac{dM_z}{ds} + T_y + m_z = \frac{d}{dy}\left(-\frac{pL^2}{2} - P_0L\right) + 0 + 0 = 0$$

Segment BC :  $s = H+x$   $ds = dx$   $R \rightarrow +\infty$   $p_y = -p$   $p_x = 0$   $m_z = 0$

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T_y}{R} + p_x = \frac{dN}{dx} - \frac{T_y}{R} + p_x = \frac{d}{dx}(0) - 0 + 0 = 0$$

$$\frac{dT_y}{ds} + \frac{N}{R} + p_y = \frac{d}{dx}[-P_0 - p(L-x)] + 0 - p = p - p = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dM_z}{ds} + T_y + m_z &= \frac{d}{dx}\left[-P_0(L-x) - \frac{p}{2}(L-x)^2\right] + [-P_0 - p(L-x)] + 0 = p \\ &= [P_0 + p(L-x)] - [P_0 + p(L-x)] = 0 \end{aligned}$$